ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R).

Μονάδα 1

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.

Μονάδα 1

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$.

Μονάδα 1

δ. Σε κύκλο (Ο, R), το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ^o δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$.

Μονάδα 1

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$.

Μονάδα 1

Β. **α.** Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (Ο, R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = $μ_α$. Αν ισχύει η σχέση

$$2μ_α^2 - βγ = \frac{α^2}{2},$$

α. να αποδείξετε ότι $α^2 = β^2 + γ^2 - βγ$,

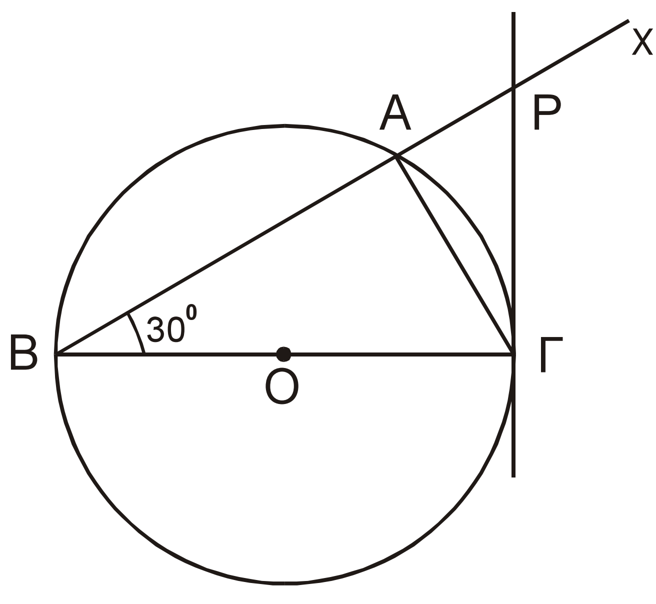
Μονάδες 15

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία ΓΒx να είναι 30^o. Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ.



Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΓ = R.

Μονάδες 5

β. $\frac{(ΡΒΓ)}{(ΡΑΓ)} = 4$.

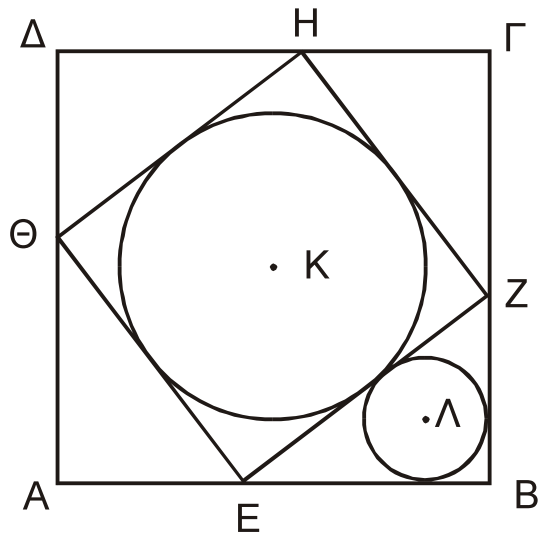
Μονάδες 10

γ. $ΡΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε:
ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3 cm.



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι ρ = 1cm.

Μονάδες 12

γ. Εάν (Κ, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ).

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία, θεώρημα IV σελ. 214 σχολ. βιβλίου.

Α.2.

α Σ
β Σ
γ Λ
δ Λ
ε Λ

Β. Θεωρία σελ. 238 σχολ. βιβλίου.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\frac{\alpha^2}{2}.$$

Έτσι η δοσμένη σχέση $2\mu_\alpha^2-\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{2}$ γράφεται:

$$\beta^2+\gamma^2-\frac{\alpha^2}{2}-\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow \beta^2+\gamma^2-\beta\gamma=\alpha^2.$$

β. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A.$$

Λόγω της σχέσης $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$ του (α) ερωτήματος προκύπτει:

$$2\sigma\upsilon\nu A=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A=\frac{1}{2}.$$

Άρα η γωνία Α είναι 60^o.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Στο εγγεγραμμένο στον κύκλο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ η γωνία $\hat{A}$ είναι 90^o, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Επομένως το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο Α.

Επειδή η γωνία $\hat{B}$ =30^o, προκύπτει από γνωστό θεώρημα ότι:

$$A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{2R}{2}=R.$$

β. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma P}$ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού ΓΡ εφαπτόμενη στον κύκλο, στο σημείο Γ.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{PB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{P\Gamma A}$ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την $\hat{P}$ κοινή γωνία.
Επομένως:

$\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = \lambda^2$, όπου λ ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων.

Όμως $\lambda = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{2R}{R} = 2$.

Οπότε $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 2^2 = 4$.

γ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε:
$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$
οπότε
$AB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$
Άρα
$AB = R\sqrt{3}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma P}$ έχουμε:

$A\Gamma \perp BP$

Επομένως
$A\Gamma^2 = AB \cdot AP$

οπότε
$R^2 = R\sqrt{3} \cdot AP$ ή

$AP = \frac{R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ (2)

Ακόμα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AP\Gamma}$ έχουμε $P = 60^\circ$,
οπότε $A\Gamma P = 30^\circ$. Επομένως $P\Gamma = 2AP$
και λόγω της (2) προκύπτει ότι $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η πλευρά α του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm. Έτσι:

$$\alpha^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 25\text{cm}^2 \Leftrightarrow \alpha = 5\text{cm}.$$

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι 25cm^2.

β. $(EBZ) = \frac{EB \cdot ZB}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{cm}^2$.

Όμως είναι και (ΕΒΖ) = ρ • τ όπου $\tau = \frac{3+4+5}{2} = 6\text{cm}$. Έτσι:

$$6 \bullet \rho = 6 \text{ άρα } \rho = 1\text{cm}.$$

γ. Είναι $R = \frac{5}{2}\text{cm}$ και ρ = 1cm, οπότε ο ζητούμενος λόγος ισούται με:

$$\frac{\pi R^2}{\pi \rho^2} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$