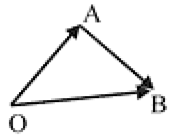
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

◆ **Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων**

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	Αντιμεταθετική
(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$	Προσεταιριστική
(3) $\vec{\alpha}+\vec{O}=\vec{\alpha}$	Ύπαρξη ουδετέρου
(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{O}$	Ύπαρξη αντιθέτου

◆ **Διάνυσμα θέσεως**

Αν Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου, για κάθε σημείο Μ ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ και λέγεται **διάνυσμα θέσεως** του Μ ή **διανυσματική ακτίνα** του Μ. Το Ο που αποτελεί κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



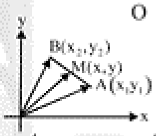
Γενικά, για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}$

Που σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα στο χώρο ισούται με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

◆ **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα:**

1) $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, **2)** $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$, **3)** $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

◆ **Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:** $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$



◆ **Συντεταγμένες μέσου τμήματος:** $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

◆ **Συντεταγμένες με γνωστά άκρα:** Οι συντεταγμένες (x, y) ενός διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις: $\mathbf{x=x_2-x_1}$ και $\mathbf{y=y_2-y_1}$.

◆ **Μέτρο διανύσματος:** $\vec{\alpha}=(x,\ y)$: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

◆ **Απόσταση δύο σημείων** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

◆ **Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος** $\vec{\alpha}=(x,\ y)$: $\boldsymbol{\lambda=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\varphi}$ όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x΄x.

◆ **Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων:** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}$ όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και φ η μεταξύ τους γωνία. **Αν** $\boldsymbol{\vec{\alpha}=\vec{0}}$ **ή** $\boldsymbol{\vec{\beta}=\vec{0}}$ **τότε** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0}$.

● Προσοχή: *Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός.*

◆ **Συνέπειες του ορισμού του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, αφού συνφ=0.

Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$, αφού συνφ=1.

Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$, αφού συνφ=-1.

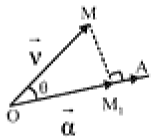
◆ **Τετράγωνο διανύσματος:**

Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,\ y)$ με τον εαυτό του λέγεται τετράγωνο του $\vec{\alpha}$ και είναι: $\boldsymbol{\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=x^2+y^2}$

◆ **Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου:** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$ όπου $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$

◆ **Συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων:** $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

- **Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα:** $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$
  όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\overrightarrow{OM_1}$ η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ στο $\vec{\alpha}$.



- **Συνθήκες παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$:**

(1) Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$

(2) Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$ όπου $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ η ορίζουσα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που είναι $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$.

(3) Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι ίσοι:
$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$.

(4) Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με το γινόμενο των μέτρων τους ή με το αντίθετο του γινομένου των μέτρων τους:
$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

- **Εξίσωση ευθείας:** $Ax+By+\Gamma=0$, $A\neq0$ ή $B\neq0$ ◆ **Συντελεστής διεύθυνσης:** $\lambda=-\dfrac{A}{B}$
- **Ορισμός συντελεστή διεύθυνσης:** Η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x΄x ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση της ευθείας**.
- Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, με $x_1\neq x_2$: $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- **Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών:**
  - $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ (συντελεστές διεύθυνσης αντίθετοαντίστροφοι).
  - $\varepsilon_1\parallel\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$ (συντελεστές διεύθυνσης ίσοι).
  - Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$.

$$y-y_0=\lambda(x-x_0)$$

- **Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης ευθείας:**
  - $x=x_0$ κατακόρυφη ευθεία που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(x_0, 0)$ και δεν ορίζεται γι' αυτήν συντελεστής διεύθυνσης.
  - $y=\lambda x+\beta$ εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.
  - $y=\lambda x$ ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνση λ και διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων.
  - $y=y_0$ οριζόντια ευθεία που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=0.
- **Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία:**
  Η ευθεία με εξίσωση Ax+By+Γ=0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.
  Η ευθεία με εξίσωση Ax+By+Γ=0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$.

- Απόσταση σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από ευθεία ε:Αx+Βy+Γ=0: $d(M_0,\varepsilon)=\dfrac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

- Εμβαδό τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right| = =\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$$

ΚΥΚΛΟΣ

- **Ορισμός**: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο Ο είναι σταθερή και ίση με ρ, λέγεται **κύκλος** με **κέντρο Ο** και **ακτίνα ρ**.
- **Εξίσωση**:
- Αν $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου και ρ η ακτίνα του, η εξίσωσή του είναι:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{y_0})^2=\boldsymbol{\rho}^2$$

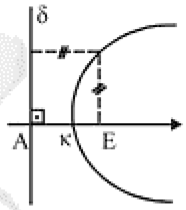
- Αν O(0, 0) το κέντρο του κύκλου και ρ η ακτίνα του, η εξίσωσή του είναι: $\mathbf{x^2+y^2=\rho^2}$
- **Εξίσωση εφαπτομένης**: Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του (x_1, y_1) είναι: $xx_1+yy_1=\rho^2$.

Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο, αν και μόνο αν ισχύει $A^2+B^2-4\Gamma>O$.

Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

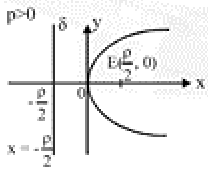
- **Ορισμός**: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων οι αποστάσεις από μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ είναι ίσες ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία δ.

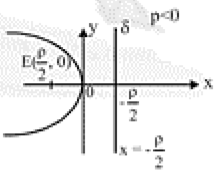


- Αν φέρουμε την $EA\perp\delta$, τότε το μέσο κ του τμήματος ΕΑ λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
- Η ευθεία ΕΑ που ορίζεται απ' την εστία και την κορυφή της παραβολής είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.

- **Εξίσωση**:

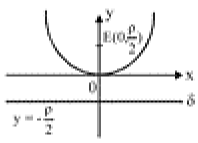
α) Αν η κορυφή της παραβολής είναι το Ο(0,0) και άξονας ο x΄x η εξίσωσή της είναι: $\mathbf{y^2=2\rho x}$

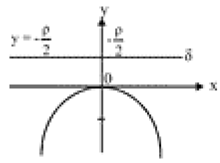




- Ο σταθερός αριθμός $\rho\neq O$ λέγεται **παράμετρος** της παραβολής. Ο αριθμός $|\rho|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας απ' τη διευθετούσα.

β) Αν η κορυφή της παραβολής είναι το Ο(Ο, Ο) και άξονας ο y΄y η εξίσωσή της είναι: $\mathbf{x^2=2\rho y}$

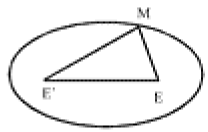




- **Εξίσωση εφαπτομένης**: Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2\rho x$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $yy_1=\rho(x+x_1)$.

ΕΛΛΕΙΨΗ

◆ **Ορισμός**: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε΄ και Ε είναι σταθερό, λέγεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία Ε΄ και Ε. Η απόσταση των Ε΄Ε λέγεται **εστιακή απόσταση**.

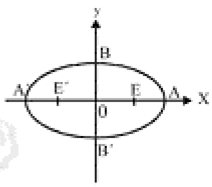


• Αν Μ ένα σημείο της έλλειψης τότε το **σταθερό άθροισμα** (ΜΕ΄)+(ΜΕ) συμβολίζεται με **2α** (α>0).

Η **εστιακή απόσταση** (Ε΄Ε) συμβολίζεται με **2γ** (γ>0). Δηλαδή είναι: $(ΜΕ΄)+(ΜΕ)=2α$, $(ΕΕ΄)=2γ$ **και α>γ.**

◆ **Εξίσωση:**

α) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία του άξονα x΄x Ε΄(-γ, 0) και Ε (γ, 0) είναι: $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ με $β^2=α^2-γ^2$

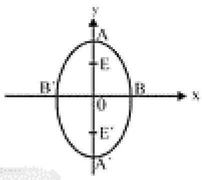


• Τα σημεία Α΄ (-α, 0), Α (α, 0) λέγονται **κορυφές** της έλλειψης και το τμήμα Α΄Α με μήκος 2α λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης.

• Το τμήμα ΒΒ΄ με μήκος 2β και άκρα τα σημεία Β΄(0, β) και Β(0, β) λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης.

• Γενικά το μέσο του τμήματος Ε΄Ε λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.

β) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία του άξονα y΄y Ε΄(0, -γ) και Ε (0, γ) είναι: $\frac{x^2}{β^2}+\frac{y^2}{α^2}=1$ με $β^2=α^2-γ^2$



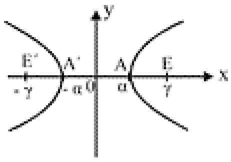
◆ **ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ:**

◆ **Ορισμός**: Ο λόγος της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα λέγεται εκκεντρότητα της έλλειψης. Η **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ είναι ο αριθμός

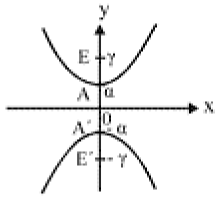
$ε=\frac{γ}{α}<1$ και ισχύει ότι $\frac{β}{α}=\sqrt{1-ε^2}$. ● Η εκκεντρότητα είναι μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης. Όσο μικραίνει η εκκεντρότητα πλησιάζοντας στο Ο τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα πλησιάζοντας το 1 τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη τείνοντας να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

◆ **Εξίσωση εφαπτομένης**: Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι: $\frac{xx_1}{α^2}+\frac{yy_1}{β^2}=1$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ



- **Ορισμός**: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε΄, Ε είναι σταθερή, ίση με 2α, και μικρότερη του (Ε΄Ε) λέγεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία Ε΄ και Ε. Αν Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής ισχύει: $\left|(ΜΕ') - (ΜΕ)\right| = 2α$, $(Ε'Ε) = 2γ$, $α<γ$.



- **Εξίσωση: α)** $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ με $β^2 = γ^2 - α^2$ αν οι εστίες είναι τα σημεία: Ε΄(-γ, 0) και Ε(γ, 0). Τα σημεία Α΄(-α, 0) και Α(α,0) ονομάζονται **κορυφές** της υπερβολής.

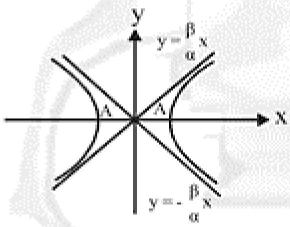
β) $\frac{y^2}{α^2} - \frac{x^2}{β^2} = 1$ με $β^2 = γ^2 - α^2$ αν οι εστίες είναι τα σημεία: Ε΄(0,-γ) και Ε(0, γ).

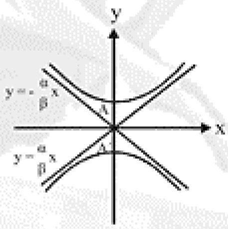
γ) $x^2 - y^2 = α^2$ ή $y^2 - x^2 = α^2$ αν α=β οπότε και η υπερβολή λέγεται ισοσκελής.

- **Ιδιότητα**: Αν ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή τότε ανήκουν σ' αυτήν και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$. Δηλαδή η υπερβολή έχει τους άξονες x΄x και y΄y ως άξονες συμμετρίας και το μέσο Ο της Ε΄Ε ως κέντρο συμμετρίας.
- **Ασύμπτωτες**:

α) Ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \frac{β}{α}x$ και $y = -\frac{β}{α}x$

β) Ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{α^2} - \frac{x^2}{β^2} = 1$ είναι οι ευθείες: $y = \frac{α}{β}x$ και $y = -\frac{α}{β}x$





- **ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ**
- **Ορισμός**: Ο λόγος της εστιακής απόστασης μιας υπερβολής προς την απόσταση των κορυφών της, λέγεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής.
- Εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ είναι ο αριθμός $ε = \frac{γ}{α} = \frac{\sqrt{α^2 + β^2}}{α} > 1$.
- **Εξίσωση εφαπτομένης**: Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι: $\frac{xx_1}{α^2} - \frac{yy_1}{β^2} = 1$.