Θέμα 03

Μια άσκηση (υποψήφιο 3ο θέμα των πανελλαδικών, μέτριας δυσκολίας) για την οποία χρειάζεται καλή γνώση της θεωρίας και κατανόηση των βασικών εννοιών και τεχνικών στο μέτρο των μιγαδικών αριθμών.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ell nx + x - 1,\ x > 0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f αντιστρέφεται

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Β. Για τον μιγαδικό αριθμό z με $z \neq 4 + 3i$ ισχύει

$$\ell n|z - 4 - 3i| = 1 - |z - 4 - 3i|.$$

α. Να βρείτε το σύνολο των εικόνων του z.

β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - \bar{z}|$.

γ. Να αποδείξετε ότι $9 \leq |z + 4 + 3i| \leq 11$.

Ας δούμε τη λύση και τα όποια σχόλια:

Α. **α.** Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$, για κάθε $x > 0$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (0, +\infty)$, επομένως, ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης.

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει προφανή λύση την $x_0 = 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, η λύση αυτή είναι μοναδική.

Β. **α.** Από το **Α** *β)* ερώτημα έχουμε ότι η εξίσωση

$$\ell n|z - 4 - 3i| = 1 - |z - 4 - 3i|$$

έχει μοναδική ρίζα το 1. Επομένως, ισχύει $|z - 4 - 3i| = 1$.

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού $z = x + \psi i$ είναι τα σημεία που έχουν την ιδιότητα να απέχουν από το σημείο Κ(4, 3) σταθερή απόσταση ίση με 1. Επομένως, το σύνολο των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(4, 3) και ακτίνα $\varrho = 1$.

$$(x - 4)^2 + (\psi - 3)^2 = 1 \qquad (1)$$

β. Είναι: $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z) = 2\psi$, έτσι επειδή η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο *(1)* η μέγιστη τιμή του ψ είναι 4, ($\psi_\kappa + \rho = 3 + 1 = 4$), η ελάχιστη τιμή είναι 2, ($\psi_\kappa - \rho = 3 - 1 = 2$). Έτσι η μέγιστη τιμή του $|z - \bar{z}|$ είναι 8 και η ελάχιστη 4.

γ. Είναι $|z + 4 + 3i| = |(z - 4 - 3i) + 8 + 6i|$ και λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\big||z-4-3i| - |8+6i|\big| \leq |(z-4-3i) + (8+6i)| \leq |z-4-3i| + |8+6i|$$

ή $|1 - 10| \leq |z + 4 + 3i| \leq 1 + 10$

ή $9 \leq |z + 4 + 3i| \leq 11$