

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x^2$  και  $g(x) = 2 \ln x$ . Να εξετάσετε αν είναι ίσες και αν δεν είναι να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο είναι ίσες.

2. Δίνεται συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - f(x) - 1 = x(x - 1)$$

Να δείξετε ότι η  $C_f$  δεν τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

3. Να εκφράσετε τις συναρτήσεις  $f, g$  ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων αν  $f(x) = e^{-x}$  και  $g(x) = \sin^3(2x) + 1$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = x^2 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το  $f(2)$ .

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & x < 1 \\ -x^2 + 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

6. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και η  $C_f$  είναι κάτω από τη  $C_g$  να δείξετε ότι  $(f \circ f)(x) < (g \circ g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

7. Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

8. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει  $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι

$$f(g(x)) < g(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

9. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και ισχύει

$$f(x) = -f(4 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

10. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  από τις οποίες η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε η  $f \circ g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$ .

11. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αν ισχύει

$$f\left(\frac{2x + 3f(x)}{5}\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Μπορείτε να γενικεύσετε την άσκηση;

12. Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  να δείξετε ότι

$$f(2a + 3b) > 2f(a) + 3f(b) \quad \forall a, b \in [1, +\infty)$$

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

15. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες υποθέτουμε ότι

- $(f \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x + f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $g$  αντιστρέψιμη

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και ότι  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Άσκηση.<sup>1</sup> Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση  $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

**Λύση.** Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ . Τότε  $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$  και  $f^3(x_1) = f^3(x_2)$  οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(f(x_1)) + f^3(x_1) &= f(f(x_2)) + f^3(x_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x_1 + 3 &= 2x_2 + 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση είναι 1-1. Για τη λύση της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} f(2x^3 + x) &= f(4 - x) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} 2x^3 + x = 4 - x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^3 + x + x - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 &= 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> πανελλήνιες 1999

Άσκηση. Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία

ισχύει

$$f\left(\frac{\ln a^x + \ln b^{f(x)}}{\ln(ab)}\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου  $a, b > 1$ . Να δείξετε ότι  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση.** Υποθέτουμε κατ αρχήν ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα<sup>2</sup>. Υποθέτουμε επίσης ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) \neq x$ . Τότε θα έχουμε  $f(x) > x$  ή  $f(x) < x$ . Έστω  $f(x) > x$ . Τότε λόγω της υπόθεσης έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) > f\left(\frac{\ln a^x + \ln b^{f(x)}}{\ln(ab)}\right) &\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x > \frac{\ln a^x + \ln b^{f(x)}}{\ln(ab)} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{\ln(ab) > 0}{\Leftrightarrow} x \ln(ab) > \ln a^x + \ln b^{f(x)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(\ln a + \ln b) > \ln a^x + \ln b^{f(x)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \ln a + x \ln b > x \ln a + f(x) \ln b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \ln b > f(x) \ln b \stackrel{\ln b > 0}{\Leftrightarrow} x > f(x) \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι  $f(x) > x$ . Άρα  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

16. Έστω  $a, b > 0, a < 2\sqrt{b}$  και οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(0) = 0$  οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$(g \circ f)(x) = x^2 + ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα  $x'x$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} - x, x \in \mathbb{R}$ .

- i) Να αποδειχτεί ότι η είναι γνησίως μονότονη.
- ii) Να εξεταστεί αν ορίζεται η  $f^{-1}$
- iii) Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 1 - x$
- iv) Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x) \leq 1 - x$

18. Να βρεθούν οι τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 3x^2 + a & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι 1-1.

19. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
20. Να δείξετε με ένα παράδειγμα ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως μονότονη σε δύο ξένα διαστήματα, αλλά όχι και στην ένωσή τους.

<sup>2</sup> Η άλλη περίπτωση είναι εντελώς όμοια.