1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2\ln x$.Να εξετάσετε αν είναι ίσες και αν δεν είναι να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

2. Δίνεται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

3. Να εκφράσετε τις συναρτήσεις f, g ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων αν $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = \text{συν}^3(2x) + 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = x^2 - 2x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f(2)$.

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & x < 1 \\ \\ -x^2 + 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

6. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η C_f είναι κάτω από τη C_g να δείξετε ότι $(f \circ f)(x) < (g \circ g)(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

8. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(x) < g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι

$$f(g(x)) < g(f(x))\ \forall x \in \mathbb{R}$$

9. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει

$$f(x) = f(4-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

να δειξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

10. Έστω οι συναρτήσεις από τις οποίες η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.Αν η f είναι γνησίως αύξουσα,τότε η $f \circ g$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση.Αν ισχύει

$$f\left(\frac{2x + 3f(x)}{5}\right) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι $f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.Μπορείτε να γενικεύσετε την άσκηση;

12. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$.Αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ να δείξετε ότι

$$f(2a + 3b) > 2f(a) + 3f(b) \ \ \forall a, b \in [1, +\infty)$$

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

14. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$
Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

15. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι

- $(f \circ f)(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x + f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
- g αντιστρέψιμη

Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση.[1] **Δίνεται η συνάρτηση** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **η οποία ικανοποιεί τη σχέση**
$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$

Λύση. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $f\left(f\left(x_1\right)\right) = f\left(f\left(x_2\right)\right)$ και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε
$$f\left(f\left(x_1\right)\right) + f^3\left(x_1\right) = f\left(f\left(x_2\right)\right) + f^3\left(x_2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$
Άρα η συνάρτηση είναι 1-1.Για τη λύση της εξίσωσης έχουμε
$$f\left(2x^3 + x\right) = f\left(4 - x\right) \overset{f1-1}{\Leftrightarrow} 2x^3 + x = 4 - x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 + x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 1\right) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

[1] πανελλήνιες 1999

Άσκηση. **Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει**

$$f\left(\frac{\ln a^x+\ln b^{f(x)}}{\ln(ab)}\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$$

όπου $a,b>1$.**Να δείξετε ότι** $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Υποθέτουμε κατ αρχήν ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα[2].Υποθετουμε επίσης ότι το ζητούμενο δεν ισχύει,δηλαδη υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)\neq x$.Τότε θα έχουμε $f(x)>x$ ή $f(x)<x$. Έστω $f(x)>x$.Τότε λόγω της υπόθεσης έχουμε

$$f(x)>f\left(\frac{\ln a^x+\ln b^{f(x)}}{\ln(ab)}\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x>\frac{\ln a^x+\ln b^{f(x)}}{\ln(ab)}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln(ab)>0}{\Leftrightarrow}x\ln(ab)>\ln a^x+\ln b^{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\ln a+\ln b)>\ln a^x+\ln b^{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln a+x\ln b>x\ln a+f(x)\ln b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln b>f(x)\ln b\overset{\ln b>0}{\Leftrightarrow}x>f(x)$$

το οποίο είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $f(x)>x$.Άρα $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

16. Έστω $a,b>0, a<2\sqrt{b}$ και οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=0$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$(g\circ f)(x)=x^2+ax+b\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει κανενά κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x, x\in\mathbb{R}$.

$i)$ Να αποδειχτεί ότι η είναι γνησίως μονότονη.

$ii)$ Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1}

$iii)$ Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1-x$

$iv)$ Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\leq 1-x$

18. Να βρεθούν οι τιμές του $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & x<1\\ \\ 3x^2+a & x\geq 1\end{cases}$$

είναι 1-1.

19. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

[2] Η άλλη περίπτωση είναι εντελώς όμοια.