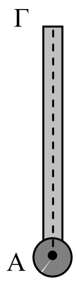
ΠΛΗΡΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΙΑΣ ΑΡΧΙΚΑ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΧΩΡΙΣ ΤΡΙΒΕΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΕΝΑ ΑΡΘΡΩΜΕΝΟ ΑΚΡΟ ΕΞΑΙΤΙΑΣ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΤΗΣ



Ομογενής ράβδος ΑΓ μήκους ℓ=0,6m και μάζας Μ=0,8Kg μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α, που είναι αρθρωμένο. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη σε ασταθή ισορροπία (σχήμα) και με μια μικρή οριζόντια ώθηση αρχίζει να περιστρέφεται.

Α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Β. Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία φ, να υπολογίσετε:

Ι. τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου,

ΙΙ. τη γωνιακή ταχύτητά της,

ΙΙΙ. το ρυθμό μετατροπής της δυναμικής ενέργειας της ράβδου σε κινητική,

ΙV. το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της και

V. τη στροφορμή της ράβδου ως προς τον ίδιο άξονα.

Γ. Ι. Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία φ να υπολογίσετε τις συνιστώσες της δύναμης επαφής που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

ΙΙ. Να υπολογίσετε τη δύναμη επαφής που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στις περιπτώσεις που έχει στραφεί κατά γωνία φ=0°, φ=90° και φ=180°.

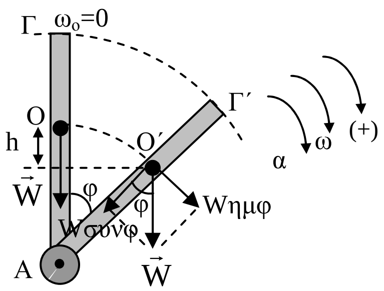
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της $\mathbf{I_{cm}=\frac{ML^2}{12}}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s².

__Λύση__

Α. Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Α είναι:

$$I=I_{cm}+M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I=\frac{M\ell^2}{12}+\frac{M\ell^2}{4} \Rightarrow I=\frac{4M\ell^2}{12} \Rightarrow \boxed{I=\frac{M\ell^2}{3}} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \underline{\underline{I=0{,}096Kg\cdot m^2}}$$

Β.

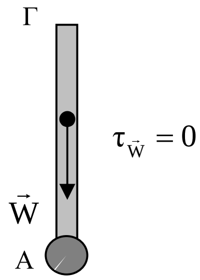


Εξετάζω τη ράβδο όταν έχει στραφεί κατά γωνία φ από την αρχική της θέση.

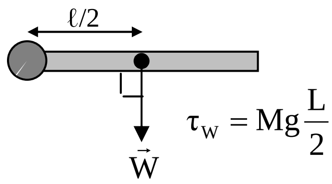
Ι. Εφαρμόζοντας τον Θεμελιώδη Νόμο Περιστροφής τότε για τη ράβδο έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(A)}=I\vec{\alpha} \Rightarrow \tau_{\vec{W}}=I\alpha \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi\frac{\ell}{2}=\frac{M\ell^2}{3}\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{3g}{2\ell}\eta\mu\varphi} \quad (1)$$

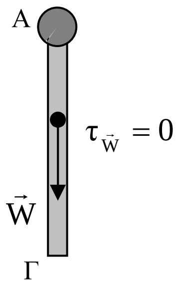
$$\text{Όταν } \varphi = 0^o \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell}\eta\mu 0^o \Rightarrow \alpha = 0\,.$$

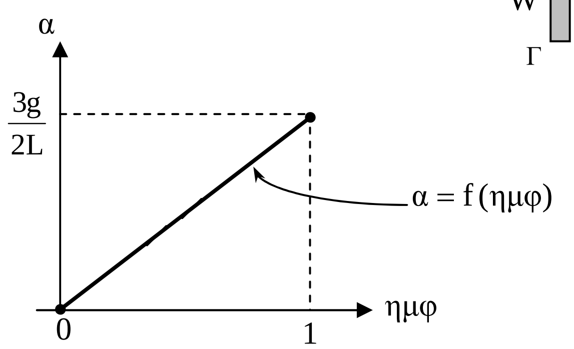


$$\text{Όταν } \varphi = 90^0 \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell}\eta\mu 90^o \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell} = \alpha_{max}\,.$$



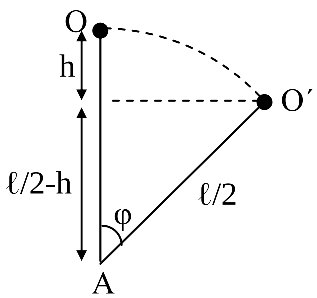
$$\text{Όταν } \varphi = 180^o \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell}\eta\mu 180^o \Rightarrow \alpha = 0\,.$$





II. Για τη στροφική κίνηση της ράβδου εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της αρχικής της θέσης και της τυχαίας που αντιστοιχεί σε γωνία στροφής της ράβδου κατά φ. Δηλαδή:

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_T - K_A = W_W\,,$$



$$\text{όμως } K_T = K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M\ell^2}{6}\omega^2\,,\; K_A = 0\,,\; W_{\vec{W}} = +Mgh$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\frac{\ell}{2} - h}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow h = \frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)\text{, οπότε}$$

$$\frac{M\ell^2}{6}\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{\ell}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)}} \quad (2)$$

- Αν $\varphi = 0^o \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}(1 - \sigma\upsilon\nu 0^o)} \Rightarrow \omega = 0$
- Αν $\varphi = 90^o \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}(1 - \sigma\upsilon\nu 90^o)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

- Αν $\varphi = 180^o \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}(1-\text{συν}180^o)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \omega_{max}$

III. Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ράβδου αποτελεί την ισχύ της ροπής του βάρους (προσοχή στο πρόσημο $\rightarrow$ (-):κάθοδος, (+):άνοδος). Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{dU_g}{dt} = -P_{\tau_{\vec{W}}} \Rightarrow \frac{dU_g}{dt} = -\tau_{\vec{W}} \cdot \omega \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{dU_g}{dt} = -Mg\frac{\ell}{2}\text{ημφ}\sqrt{\frac{3g}{2\ell}(1-\text{συνφ})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dU_g}{dt} = -\frac{Mg}{2}\text{ημφ}\sqrt{3g\ell(1-\text{συνφ})}}$$

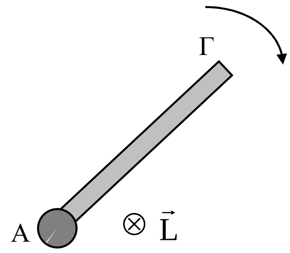
και αφού $K + U_g = E_{\mu\eta\chi} = \text{σταθ.}$, είναι $\frac{dK}{dt} = -\frac{dU_g}{dt}$.

IV. Από την γενική έκφραση του Θεμελιώδους Νόμου της Περιστροφής έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\tau} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \tau_{\vec{W}} \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = Mg\frac{\ell}{2}\text{ημφ}}$$

V. Η στροφορμή της ράβδου απεικονίζεται με ένα διάνυσμα που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

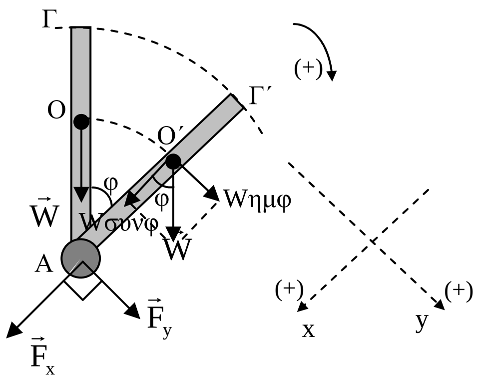
- Σημείο εφαρμογής: Το σημείο Α
- Διεύθυνση: Κατά μήκος του άξονα περιστροφής, δηλαδή κάθετη στη σελίδα
- Φορά: Προς τη σελίδα
- Μέτρο:



$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{M\ell^2}{3}\sqrt{\frac{3g}{L}(1-\text{συνφ})} \Rightarrow L = M\sqrt{\frac{\ell^4 3g}{9\ell}(1-\text{συνφ})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = M\sqrt{\frac{\ell^3 g}{3}(1-\text{συνφ})}}$$

Γ. I.



Θεωρούμε ότι η δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση(σημείο Α) κάθε στιγμή αναλύεται σε δυο συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$. Η $\vec{F}_x$ έχει πάντοτε τη διεύθυνση της ράβδου, ενώ η $\vec{F}_y$ είναι κάθε στιγμή κάθετη σε αυτή. Είναι φανερό ότι όταν η ράβδος κινείται στροφικά τότε το κέντρο μάζας της διαγράφει κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ℓ/2 έχοντας κάθε στιγμή ταχύτητα

$$\upsilon_{cm} = \omega\frac{\ell}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_{cm} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{3g}{\ell}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{3g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

και επιτρόχια επιτάχυνση

$$a_{T(cm)} = \alpha\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_{T(cm)} = \frac{1}{2}\frac{3g}{2\ell}\eta\mu\varphi \Rightarrow \boxed{a_{T(cm)} = \frac{3}{4}g\eta\mu\varphi} \quad (5)$$

Ας εφαρμόσουμε στη συνέχεια για το κέντρο μάζας το Θ.Ν.Μ. τόσο στον άξονα x΄x όσο και στον άξονα y΄y.

Ο άξονας x΄x έχει τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας του κέντρου μάζας, με τα θετικά σε αυτόν τον άξονα, να θεωρούνται προς το κέντρο (Α) της κυκλικής τροχιάς . Επομένως ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_{x(cm)} = M\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu.(cm)} \Rightarrow Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + F_x = M\frac{\upsilon_{cm}^2}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + F_x = 2M\frac{\frac{1}{4}3g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}{\ell} \Rightarrow F_x = \frac{3}{2}Mg(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) - Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{3}{2}Mg - \frac{5}{2}Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{Mg}{2}(3-5\sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

Αντίστοιχα ο y΄y είναι κάθετος στην επιβατική ακτίνα του κέντρου μάζας και τα θετικά σε αυτόν θεωρούνται ομόρροπα με την κίνηση του κέντρου μάζας.

Δηλαδή θα ισχύει: $\Sigma\vec{F}_{y(cm)} = M\vec{a}_{T(cm)} \overset{(5)}{\Rightarrow} Mg\eta\mu\varphi + F_y = M\frac{3}{4}g\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F_y = -\frac{1}{4}Mg\eta\mu\varphi}$$

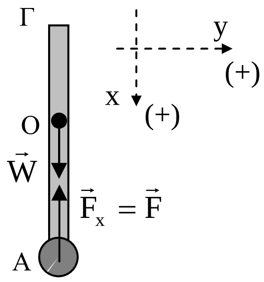
ΙΙ.

- Όταν η ράβδος είναι στην αρχική της θέση φ=0°:

$$F_x = \frac{Mg}{2}(3-5\cancelto{1}{\sigma\upsilon\nu 0^o}) \Rightarrow F_x = -Mg$$

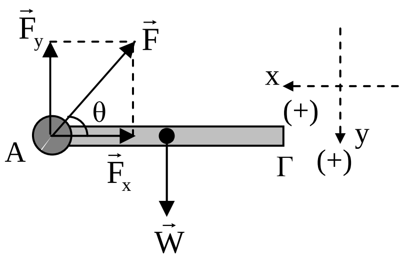
$$F_y = -\frac{1}{4}Mg\eta\mu 0^o = 0$$

Όμως $\vec{F} = \vec{F}_x + \cancelto{0}{\vec{F}_y} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_x \Rightarrow \begin{cases} \vec{F} \downarrow\uparrow x_{(+)} \\ |\vec{F}| = |\vec{F}_x| = Mg \end{cases}$



- Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά φ=90° από την αρχική της θέση:

$$F_x = \frac{Mg}{2}(3-5\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu 90^o}) \Rightarrow F_x = -\frac{3}{2}Mg \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_x \downarrow\uparrow x_{(+)} \\ \left|\vec{F}_x\right| = \dfrac{3}{2}Mg \end{cases}$$

$$F_y = -\frac{1}{4}Mg\cancelto{1}{ημ90^o} \Rightarrow F_y = -\frac{Mg}{4} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_y \downarrow\uparrow y_{(+)} \\ \left|\vec{F}_y\right| = \dfrac{Mg}{4} \end{cases}$$

Ισχύει $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. όμως $\vec{F}_x \perp \vec{F}_y$ άρα η $\vec{F}$ έχει:

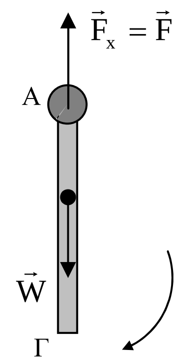
- Διεύθυνση: $εφθ = \dfrac{\left|\vec{F}_y\right|}{\left|\vec{F}_x\right|} = \dfrac{\frac{Mg}{4}}{\frac{3}{2}Mg} \Rightarrow εφθ = \dfrac{1}{6}$

- Φορά: όπως στο σχήμα.

- Μέτρο: $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}M^2g^2 + \dfrac{M^2g^2}{16}} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = \dfrac{Mg}{2}\sqrt{9 + \dfrac{1}{4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}\right| = \frac{Mg}{2}\sqrt{\frac{37}{4}} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = \frac{Mg}{4}\sqrt{37}$$

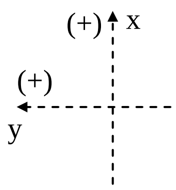
- Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία φ=180^o από την αρχική της θέση:



$$F_x = \frac{Mg}{2}(3 - 5\cancelto{-1}{συν180}) \Rightarrow F_x = \frac{Mg}{2}(3+5) = 4Mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_x \downarrow\downarrow x_{(+)} \\ \left|\vec{F}_x\right| = 4Mg \end{cases}$$

$$F_y = -\frac{1}{4}Mg\cancelto{0}{ημ180^o} = 0$$



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \cancelto{0}{\vec{F}_y} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_x \Rightarrow \begin{cases} \vec{F} \downarrow\downarrow \vec{F}_X \\ F = 4Mg \end{cases}$$