ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ,
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: «ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ: ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ»

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναστάσιος Πατρώνης
Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια: Ελισάβετ Αναστασοπούλου
(Α.Μ.89)

Πάτρα, 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να σκιαγραφηθεί κάποια απάντηση στο εξής ερώτημα: Κατά πόσο μπορεί το παραδοσιακό στυλ διδασκαλίας, αλλά και οι απλές ιστορικές αναφορές σε Μαθηματικές έννοιες, να παρακινήσουν, ή να ενθαρρύνουν μαθητές και φοιτητές ώστε να αποκτήσουν μια ουσιαστικότερη μαθηματική παιδεία και ένα ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο; Και αν αυτό το στυλ δεν επαρκεί, πώς θα μπορούσε να είναι ένα εναλλακτικό στυλ παρουσίασης που θα ενθάρρυνε περισσότερο τους μαθητές και φοιτητές;

Η ανάγκη για συζήτηση επάνω στο «πάντρεμα» ιστορίας και διδασκαλίας των μαθηματικών προέρχεται από την ανάγκη για ουσιαστικότερη γνώση και μετάδοση αυτής της επιστήμης. Δεν μπορούμε λοιπόν να αγνοήσουμε αυτή την ανάγκη που συνδέεται άμεσα με τη σχολική ή πανεπιστημιακή πραγματικότητα. Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο, σχετικά με τα παραπάνω, είναι ότι, για να γίνουν κάποιες έννοιες κατανοητές ή ενδιαφέρουσες σε μαθητές ή φοιτητές, δεν αρκεί από τη μεριά των διδασκόντων να κατέχουν ένα πλήθος αποσπασματικών γνώσεων, αλλά απαιτείται δημιουργική διάθεση, γνώση σε βάθος, κριτική σκέψη, υπομονή και αγάπη για το διδακτικό τους έργο, πράγμα που πολλές φορές, εξαιτίας ποικίλων λόγων, δεν υπάρχει τόσο στο πανεπιστημιακό όσο και στο σχολικό περιβάλλον.

Το παραδοσιακό στυλ διδασκαλίας (Αξίωμα – Θεώρημα – Απόδειξη – Πόρισμα – Άσκηση…) δημιουργεί έναν τρόπο επαφής με τη γνώση «γραμμικό» και προκαθορισμένο, όπου ουσιαστικά αντί για δημιουργικό τρόπο επαφής με τη γνώση αποτελεί – σε μεγάλο τουλάχιστον βαθμό – υποταγή στην λογική: «κοπιάζω στο να αποστηθίσω έννοιες, μεθόδους και διαδικασίες, στα οποία και αξιολογούμαι χωρίς, ωστόσο, να τα κατανοώ». Νομίζω ότι το παραδοσιακό στυλ διδασκαλίας αλλά και αξιολόγησης (για τα μαθηματικά) ενός μέσου μαθητή στηρίζεται στην ετοιμότητά του να ανταποκρίνεται σε πράγματα που *δεν κατανοεί ουσιαστικά.*

Πιο κάτω παραθέτουμε ένα απόσπασμα από βιβλίο Μιγαδικής Ανάλυσης που διδάσκεται σε φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος.

«Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων

Έστω Χ τυχόν σύνολο και (Ψ,ρ) ένας μετρικός χώρος, και ας υποθέσουμε ότι f, f_1, f_2,……είναι συναρτήσεις από τον Χ εντός του Ψ. Θα λέμε ότι η ακολουθία $<f_n>_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε και μόνο όταν δοθέντος αριθμού ε>0 υπάρχει ακέραιος και θετικός Ν (εξαρτώμενος μόνο από το ε) τέτοιος ώστε για όλα τα $x \in X$ και για όλα τα $n \geq N$ έχουμε $\rho(f(x),f_n(x))<\varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για $n \geq N$ είναι

$\mathrm{Sup}\{\rho(f(x), f_n(x)) : x \in X\} \leq \varepsilon$

<u>Θεώρημα</u> Έστωσαν (Χ, d) και (Ψ, ρ) δύο μετρικοί χώροι και ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2, ………, f_n,…….είναι συνεχείς στον Ψ, Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $<f_n>_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f . Τότε η f είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\alpha \in X$ και ε>0. Αφού η $<f_n>_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f , υπάρχει συνάρτηση f_n για την οποία έχουμε $\rho(f(x),f_n(x))<\varepsilon\backslash 3$ για όλα τα $x \in X$. Επίσης , επειδή η f_n $\rho(f_n(a),f_n(x))<\varepsilon\backslash 3$ όταν $d(\alpha, x)<\delta$. Συνεπώς για $d(\alpha, x)<\delta$ έχουμε

$\rho(f(\alpha), f(x)) \quad \rho(f(\alpha),f_n(\alpha))+\rho(f_n(\alpha), f_n(x))+ \rho(f_n(x), f(x))<\varepsilon$

και το θεώρημα αποδείχτηκε.

<u>Ορισμός</u> Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση κατα την οποία στο ανωτέρω θεώρημα, Ψ=C. Εάν $u_n : X \rightarrow C$, θέτουμε

$f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, και υποθέσουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ για κάθε } x \in X$$

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στην f τότε και μόνο τότε όταν η ακολουθία $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση f».

Η σειρά: Ορισμός → Θεώρημα → Απόδειξη → Ορισμός...,όπως φαίνεται έδω, χαρακτηρίζει την παραδοσιακή παρουσίαση και αφήνει αναπάντητο το ερώτημα του <u>νοήματος</u>: από πού προέρχονται όλα αυτά;

Διαβάζοντας βιβλία γενικής μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών (όπως του Boyer κ.α.) μπορεί κάποιος να δει μια γενική (ίσως λίγο βεβιασμένη) εικόνα για την πορεία της μαθηματικής σκέψης και τα επιτεύγματα σπουδαίων μαθηματικών ανά τους αιώνες. Διαβάζοντας αυτού του είδους τα βιβλία μπορούμε να δούμε ημερομηνίες και παραπομπές σε άλλα μαθηματικά κείμενα, που θα μπορούσαν να αποτελέσουν μια βάση για περαιτέρω έρευνα.

Ωστόσο, πιστεύω ότι για να κατανοήσει κάποιος νέες έννοιες, ή έννοιες που δεν έχει διασαφηνίσει από προηγούμενη διδασκαλία (είτε πρόκειται για φοιτητή μαθηματικών είτε πρόκειται για νέο δάσκαλό) δεν αρκεί μια τέτοια ανάγνωση. Αυτό συμβαίνει διότι ένα βιβλίο γενικής ιστορίας των μαθηματικών – λόγω του περιορισμένου «χώρου» που διαθέτει – δεν κάνει αναφορές στην πραγματική πορεία εμφάνισης μιας έννοιας. Δεν περιγράφει τους λόγους εκείνους που δημιούργησαν την ανάγκη να οριστεί μια νέα έννοια και να επεκταθεί ή να ξεπεραστεί μια παλαιότερη αντίληψη.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αποδοχή των αρνητικών αριθμών ή και των μιγαδικών (εφόσον αυτοί δεν εκφράζουν μια ποσότητα). Οι κοινωνικές και ιδεολογικές συνθήκες της εποχής εκείνης αποτελούσαν τροχοπέδη και χρειάστηκαν αρκετά χρόνια ώστε να ξεπεραστούν αυτά τα εμπόδια. Αν κάποιος δει με λεπτομέρεια και προσοχή την πορεία για την αποδοχή, για παράδειγμα,της έννοιας του μιγαδικού αριθμού (που φυσικά συνδέεται στενά με την έννοια του αρνητικού) δεν έχει παρά να διαπιστώσει ότι δεν υπάρχει μια γνώση, η οποία να μένει αναλλοίωτη, αλλά όλα ίσως μπορούν να αναθεωρηθούν, αν αλλάξουν ορισμένες συνθήκες και πάγιες αντιλήψεις.

Μέσα από τα βιβλία γενικής ιστορίας, επίσης, δεν μπορεί να κατανοήσει κάποιος την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, αφού βλέπει μόνο μια αναφορά σε αυτές και δεν μπορεί να αντιληφθεί την προέλευση, τη χρησιμότητα και το εύρος τους.

Οι νέοι δάσκαλοι των μαθηματικών καλούνται να διδάξουν μεγάλο όγκο γνώσεων μέσα σε πολύ μικρό διάστημα. Πολλές φορές έχει γίνει λόγος για την ανάγκη ιστορικών αναφορών σε μαθηματικές έννοιες που διδάσκουν, ώστε η κατανόηση να είναι ουσιαστικότερη από τους μαθητές. Αυτό όμως στην πραγματικότητα δε βοηθά, διότι οι απλές ιστορικές αναφορές μέσα στο μάθημα απλά ενισχύουν τον όγκο πληροφοριών που δέχονται οι μαθητές.

Για να γίνει κάτι ουσιαστικότερο, θα έπρεπε να δοθεί βάρος σε εργασίες-έρευνες γύρω από την γένεση και εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, ώστε να προκύψουν τα κατάλληλα ερεθίσματα για την καλύτερη αποδοχή και κατανόηση των όσων διδάσκονται μέσα στις σχολικές τάξεις. Μια τέτοια διδακτική προσέγγιση θα μπορούσε να ονομαστεί «Ιστορικο-γενετική προσέγγιση» στα Μαθηματικά[1]. Κάτι τέτοιο, βέβαια, είναι δύσκολο για ποικίλους λόγους, ωστόσο με την απλή παρουσίαση εννοιών, μεθόδων και εφαρμογών και με μια βεβιασμένη ιστορική αναφορά οι μαθητές χάνουν το ενδιαφέρον τους για το αντικείμενο, το οποίο διδάσκονται, καθώς παράλληλα δεν

1 Σχετικά με τις «γενετικές» προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών βλ.Τ.Πατρώνης-Δ.Σπανός, *Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες* στη Μαθηματική Παιδεία, εκδ. Πνευματικός, 1996.

καλλιεργούν τις δυνατότητές τους για έρευνα, σύγκριση και προβληματισμό στο μάθημα των μαθηματικών.

Πολλές φορές το να διαβάσει κανείς ένα βιβλίο γενικής ιστορίας των μαθηματικών αρκεί για να πάρει τη γνώση μιας γενικής περιγραφής της πορείας της μαθηματικής εξέλιξης, θα ήταν όμως λάθος να πιστέψει ότι αυτό επαρκεί για την βαθύτερη κατανόηση (ιδίως αν πρόκειται για τον διδάσκοντα, γιατί τότε μπορεί να «περάσει» στους μαθητές λάθος εντυπώσεις και για την ιστορία των μαθηματικών).

Από πολλούς πιστεύεται ότι μελετώντας την εμφάνιση και εξέλιξη μιας έννοιας π.χ. στα μαθηματικά, θα μπορέσει να την διδάξει ακολουθώντας την ίδια περίπου διαδικασία σε μαθητές. Δεν ξέρω κατά πόσο μπορεί να εφαρμοστεί αυτή η διαδικασία στις ιδιαιτερότητες κάθε μαθητή ή κατά πόσο ακόμα μπορεί να μελετηθεί η πορεία μιας έννοιας – ανεξάρτητα από τις κοινωνικές συνθήκες και ιδιαιτερότητες κάθε εποχής – σίγουρα όμως πρέπει να προβληματίζει τους διδάσκοντες στο σχολείο, ή στο πανεπιστήμιο η εισαγωγή μιας νέας έννοιας και να εξετάζονται οι δυσκολίες της αποδοχής και τα προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν με την βοήθεια της έννοιας αυτής κατά την ιστορική της εξέλιξη.

Η επαφή με τις πηγές της ιστορίας των μαθηματικών, αντίθετα επιδιώκει μια καλλιέργεια της σκέψης στο να αναζητεί αιτίες για ένα αποτέλεσμα(π.χ. ένα θεώρημα) πέρα από την απλή λογική σχέση μεταξύ υποθέσεων και συμπεράσματος, (το ερώτημα είναι βέβαια ποιούς ανθρώπους ή θεσμούς εξυπηρετεί ή δεν εξυπηρετεί κάτι τέτοιο).

Η εργασία αυτή έχει τρία μέρη:

Στο Μέρος Α΄ εκθέτω συνοπτικά την ιστορική εμφάνιση των μιγαδικών αριθμών και των μιγαδικών συναρτήσεων, καθώς και τις εφαρμογές που έχουν οι μιγαδικοί στη Φυσική, λόγω της διανυσματικής τους ερμηνείας.

Στο Μέρος Β΄ παρουσιάζω την πρώτη προσπάθεια, για γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών, σε μια εργασία του Caspar Wessel.

Στο Μέρος Γ΄ παραθέτω, προσαρμοσμένη για τους Έλληνες φοιτητές, μια εποπτική παρουσίαση της επιφάνειας Riemann, για την συνάρτηση logz, μιας ενότητας η οποία αποφεύγεται συστηματικά από την διδακτέα ύλη των φοιτητών των Μαθηματικών Τμημάτων.

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μιγαδικοί Αριθμοί

Το 1484 στη Γαλλία ο Nicolas Chuquet γράφει το έργο με τίτλο *Triparty en la science des nombres*. Το δεύτερο ήμισυ του τελευταίου τμήματος της *Triparty* είναι αφιερωμένο στην επίλυση εξισώσεων. Θεωρώντας εξισώσεις της μορφής $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$, όπου οι συντελεστές και οι εκθέτες είναι συγκεκριμένοι θετικοί αριθμοί, ο Chuquet ανακάλυψε ότι μερικές από αυτές είχαν «φανταστικές» λύσεις. Στις περιπτώσεις αυτές απλώς πρόσθεσε: “Tel nombre est ineperible” (Αυτού του είδους ο αριθμός είναι αδύνατος).

Το 1545 δημοσιεύεται η *Ars Magna* του Gerolamo Cardano (1501-1576). Χάρη στη δημοσίευση αυτή γίνεται ευρέως γνωστή η επίλυση της τριτοβάθμιας, αλλά και της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Στο έργο αυτό ο Cardano αναφέρει ότι η εξίσωση με μορφή $x^3 + px = q$, έχει λύση την

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}}$$

(με σύγχρονο συμβολισμό). Εδώ όμως υπάρχει μία δυσκολία. Όταν εφαρμόσουμε τον κανόνα του Cardano στην εξίσωση $x^3 = 15x + 4$, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα είναι $x = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$. Ο Cardano ήξερε ότι δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού και ταυτόχρονα γνώριζε ότι x = 4 ήταν μια ρίζα της εξίσωσης. Δεν μπορούσε δηλαδή να καταλάβει πώς ο κανόνας του είχε νόημα σ’ αυτήν την περίπτωση.

Είχε, ωστόσο, συναντήσει τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών και σε μια άλλη περίπτωση, που θέλησε να μοιράσει το 10 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το γινόμενό τους να ισούται με 40. Οι συνήθεις κανόνες της άλγεβρας οδηγούν στις λύσεις 5 +$\sqrt{-15}$ και 5 -$\sqrt{-15}$. Ο Cardano δεν αποδέκτηκε τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών και συμπέρανε ότι το αποτέλεσμά του στην περίπτωση αυτή ήταν «μυστηριώδες και άχρηστο». Οι μεταγενέστεροι συγγραφείς, βέβαια, έδειξαν ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να ήταν μυστηριώδη, αλλά καθόλου άχρηστα! Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι αλγεβριστές απέφευγαν τους φανταστικούς αριθμούς , ισχυριζόμενοι ότι η $x^2+1=0$ δεν έχει λύση, σύμφωνα με τους αρχαίους Έλληνες.

Μετά τη λύση της κυβικής εξίσωσης τα πράγματα άλλαξαν ριζικά. Μια κυβική εξίσωση έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα τουλάχιστον. Αλλά και όταν οι τρεις ρίζες μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι πραγματικές και μη μηδενικές, ο τύπος Cardano – Tartaglia οδηγεί αναπόφευκτα σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Ήταν γνωστό ότι ο στόχος ήταν ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός, αλλά δεν ήταν δυνατό να καταλήξει κανείς σ' αυτόν χωρίς πρώτα να κατανοήσει κάτι για τους «φανταστικούς» αριθμούς. *Έτσι έπρεπε πλέον να ληφθούν υπόψη οι «φανταστικοί» αριθμοί, ακόμη κι αν κάποιος αποφάσιζε να περιοριστεί στις πραγματικές ρίζες.* Τα γεγονότα αυτά μπορεί να δικαιολογήσουν την εισαγωγή των μιγαδικών ως νέων αριθμών στα μάτια των σημερινών μαθητών και φοιτητών, αντί (όπως γίνεται συνήθως) οι μαθητές και φοιτητές να είναι υποχρεωμένοι να μάθουν τους μιγαδικούς αριθμούς χωρίς να κατανοούν το λόγο της ύπαρξής τους. Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν επινοήθηκαν απλά ως «γενίκευση για την γενίκευση» ("l'art pour l'art") αλλά χρησίμευσαν σε κάτι σημαντικό –την επίλυση εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού.

Ένας άλλος Ιταλός αλγεβριστής, ο Rafael Bombelli, την ίδια περίπου εποχή (1526-1573) είχε, όπως έλεγε, «μια τρελλή ιδέα», γιατί το όλο θέμα «φαινόταν να βρίσκεται μέσα στα πλαίσια της σοφιστείας». Οι δύο υπόρριζες ποσότητες των κυβικών ριζών που προκύπτουν από το γνωστό τύπο διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο. Είδαμε ότι η λύση της $x^3 = 15x + 4$ οδηγεί στην $x=\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$ ενώ με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι η x = 4 είναι η μόνη θετική ρίζα της εξίσωσης (ο Cardano είχε παρατηρήσει ότι αν όλοι οι όροι στο ένα μέλος της εξίσωσης είναι μεγαλύτερου βαθμού από τους όρους στο άλλο μέλος, τότε η εξίσωση έχει μια και μόνο μια θετική ρίζα – μια προαναγγελία ως ένα βαθμό ενός μέρους του κανόνα των προσήμων του Descartes). Ο Bombelli έκανε τη σκέψη ότι τα ριζικά μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο που συνδέονται οι υπόρριζες ποσότητες· ότι, δηλαδή, όπως θα λέγαμε σήμερα, είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι οδηγούν στον πραγματικό αριθμό 4. Είναι προφανές ότι αν το άθροισμα των πραγματικών τμημάτων είναι 4, τότε το πραγματικό μέρος του καθενός είναι 2· κι αν ένας αριθμός της μορφής $2 + b\sqrt{-1}$ είναι μια κυβική ρίζα του $2 + 11\sqrt{-1}$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι το b πρέπει να είναι 1.

Έτσι, $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1} = 4$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι εκείνη την εποχή η ευφυέστατη παρατήρηση του Bombelli δε βοήθησε καθόλου στην επίλυση των κυβικών εξισώσεων, γιατί κανείς έπρεπε να γνωρίζει εκ των προτέρων μια από τις ρίζες. Ωστόσο, μέσα απ’ αυτήν φάνηκε ο σημαντικός ρόλος που έμελλε να παίξουν οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί στο μέλλον.

Στη συνέχεια, σημειώνουμε την ικανότητα του Viète (1540-1603) να αναγνωρίσει ορισμένες από τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές μιας εξίσωσης, αν και στο σημείο αυτό τον εμπόδισε η επίμονη άρνησή του να δεχθεί αρνητικές ρίζες και συντελεστές.

Τελικά, ο Girard το 1629, στο βιβλίο του *Invention nouvelle en l’ algèbre* («Νέα εφεύρεση στην Άλγεβρα») διατύπωσε σαφώς τις σχέσεις ανάμεσα στις ρίζες και στους συντελεστές, γιατί αποδέχθηκε την ύπαρξη αρνητικών και «φανταστικών» ριζών (ενώ ο Viète αποδεχόταν μόνο τις θετικές ρίζες). Ο Girard συνειδητοποίησε ότι γενικά οι αρνητικές ρίζες έχουν αντίθετη φορά από τις θετικές προαναγγέλλοντας, έτσι, την ιδέα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Ο Girard διατήρησε τις «φανταστικές» ρίζες των εξισώσεων, επειδή δείχνουν τις γενικές αρχές του σχηματισμού μιας εξίσωσης από τις ρίζες της.

Γύρω στα 1693 ο Leibnitz αναφέρει για τους μιγαδικούς τα εξής: Παραγοντοποιεί το $x^4 + α^4$ στο : $(x + α\sqrt{\sqrt{-1}}) \cdot (x - α\sqrt{\sqrt{-1}}) \cdot (x + α\sqrt{\sqrt{-1}}) \cdot (x - α\sqrt{\sqrt{-1}})$ και δείχνει ότι $\sqrt{6} = \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$, μια ανάλυση ενός θετικού πραγματικού που εξέπληξε. Παρόλα' αυτά ο Leibnitz δεν έγραψε τις τετραγωνικές ρίζες των μιγαδικών αριθμών στην κανονική μιγαδική μορφή ούτε ήταν σε θέση να αποδείξει την υπόθεσή του ότι ο $f(x + ψ\sqrt{-1}) + f(x - ψ\sqrt{-1})$ είναι πραγματικός, αν το $f(z)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο. Η αμφίβολη θέση των μιγαδικών φαίνεται καθαρά στο σχόλιό του ότι «οι φανταστικοί είναι ένα είδος αμφιβίου, βρισκόμενοι ανάμεσα στην ύπαρξη και στην ανυπαρξία».

Ο L. Euler (1707-1783) εισάγει το σύμβολο $i = \sqrt{-1}$ γύρω στο 1777. Ίσως να το χρησιμοποίησε τόσο αργά, επειδή στα προηγούμενα έργα του είχε χρησιμοποιήσει το i για να παραστήσει έναν «άπειρα μεγάλο αριθμό», όπως ο Wallis είχε περίπου χρησιμοποιήσει το ∞.

Έτσι ο Euler είχε γράψει $e^x = (1 + x/i)^i$, ενώ εμείς θα προτιμούσαμε το $e^x = \lim_{h\to\infty} (1 + x/h)^h$. Μάλιστα, μολονότι ο Euler χρησιμοποίησε το σύμβολο i, για την $\sqrt{-1}$ σε ένα χειρόγραφο το 1777, αυτό δημοσιεύθηκε το 1794. Το σύμβολο καθιερώθηκε όταν χρησιμοποιήθηκε από τον Gauss στο έργο του *Disquisitiones arithmeticae* το 1801.

Το 1797 ο Wessel (1745-1818) ανακαλύπτει τη γεωμετρική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών, η οποία δημοσιεύτηκε από την Ακαδημία της Δανίας το 1798. Αυτό το άρθρο, το οποίο θα μας απασχολήσει λεπτομερώς στο Μέρος Β' της εργασίας μας, δε βρήκε ανταπόκριση και γι' αυτό αργότερα το μιγαδικό επίπεδο ονομάστηκε «Επίπεδο Gauss». Η σκέψη του ήταν να απεικονίσει το πραγματικό και του φανταστικό μέρος του μιγαδικού α+bi, ως ορθογώνιες συντεταγμένες σημείων σ' ένα επίπεδο.

Ταυτόχρονα με τον Wessel, ίσως και νωρίτερα, εργάζεται και μελετά τους μιγαδικούς ο D' Alembert (1718-1783). Ο D' Alembert πέρασε ένα μεγάλο διάστημα για να αποδείξει το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (διατυπωμένο ήδη από τον Girard), ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση f (x) = 0, η οποία έχει μιγαδικούς συντελεστές και βαθμό n ≥ 1, έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα. Αν θεωρήσουμε τη λύση μιας τέτοιας πολυωνυμικής εξίσωσης ως μια γενίκευση των γνωστών αλγεβρικών πράξεων, μπορούμε να πούμε ότι στην ουσία ο D' Alembert ήθελε να δείξει ότι το αποτέλεσμα οποιασδήποτε αλγεβρικής πράξης των μιγαδικών αριθμών είναι με τη σειρά του μιγαδικός αριθμός. Με τη βοήθεια των αλγεβρικών ταυτοτήτων, ακόμα, δεν είναι δύσκολο να βρούμε ποσότητες όπως ημ (1 + i) ή τοξσυν(i) εκφρασμένες στη γνωστή μορφή των μιγαδικών αριθμών a+bi. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $ημ(1 + i) = [e^{i(1+i)} – e^{–i(1+i)}]/2i$ και καταλήγουμε στην $ημ(1 + i) = a + bi$,

όπου $a = [(1 + e^2)\ ημ1] / 2e$ και $b = [(e^2 – 1)\ συν1] / 2e$

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τοξσυνi = x + iψ, ή i = συν (x + iψ),

ή $i = [\ e^{i(x + iψ)} + e^{-i(x + iψ)}\ ]/2 =$

$$\frac{1 + e^{2Ψ}}{2e^{Ψ}}\,συνx + \frac{i(1 – e^{2Ψ})}{2e^{Ψ}}\,ημx.$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη βλέπουμε ότι συνx = 0 και x = ±π/2. Άρα $\frac{1-e^{2\psi}}{2e^{\psi}}$ = ±1, ή $e^{Ψ} = \mp 1 \pm \sqrt{2}$. Εφόσον x,ψ πρέπει να είναι πραγματικοί, βλέπουμε ότι x = ± π/2 και $ψ = \ln(\mp 1+\sqrt{2})$. Τα αποτελέσματα είναι πάντα μιγαδικοί αριθμοί, όταν εκτελούμε στοιχειώδεις υπερβατικές πράξεις στους μιγαδικούς. Με άλλα λόγια, όπως έδειξε ο Euler το σύνολο των μιγαδικών είναι κλειστό ως προς τις στοιχειώδεις υπερβατικές πράξεις, ενώ ο D' Alembert είχε υποθέσει ότι είναι κλειστό ως προς τις αλγεβρικές πράξεις.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε και τον τύπο του Euler $e^{iθ}$ = συνθ + ιημθ, ο οποίος οδηγεί για θ =π στην $e^{iπ}$ = -1, ή $e^{iπ}$ +1=0, σχέση που συνδέει τους πέντε σπουδαιότερους αριθμούς στην Μαθηματική Ανάλυση, τους 0, 1, e, i και π . Από την ίδια σχέση καταλαβαίνουμε και το ότι οι λογάριθμοι των αρνητικών δεν είναι πραγματικοί – όπως φαντάζονταν οι Jean Bernoulli και ο D' Alembert – αλλά καθαρά φανταστικοί. Η ίδια σχέση ακόμη μας δείχνει ότι μια «φανταστική» δύναμη ενός πραγματικού αριθμού μπορεί να είναι πραγματικός. Στα Memoirs της Ακαδημίας του Βερολίνου, του 1749, ο Euler απέδειξε ότι κάθε μιγαδική δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού $(α + bi)^{c+di}$ μπορεί να γραφεί ως ένας μιγαδικός αριθμός p + qi.

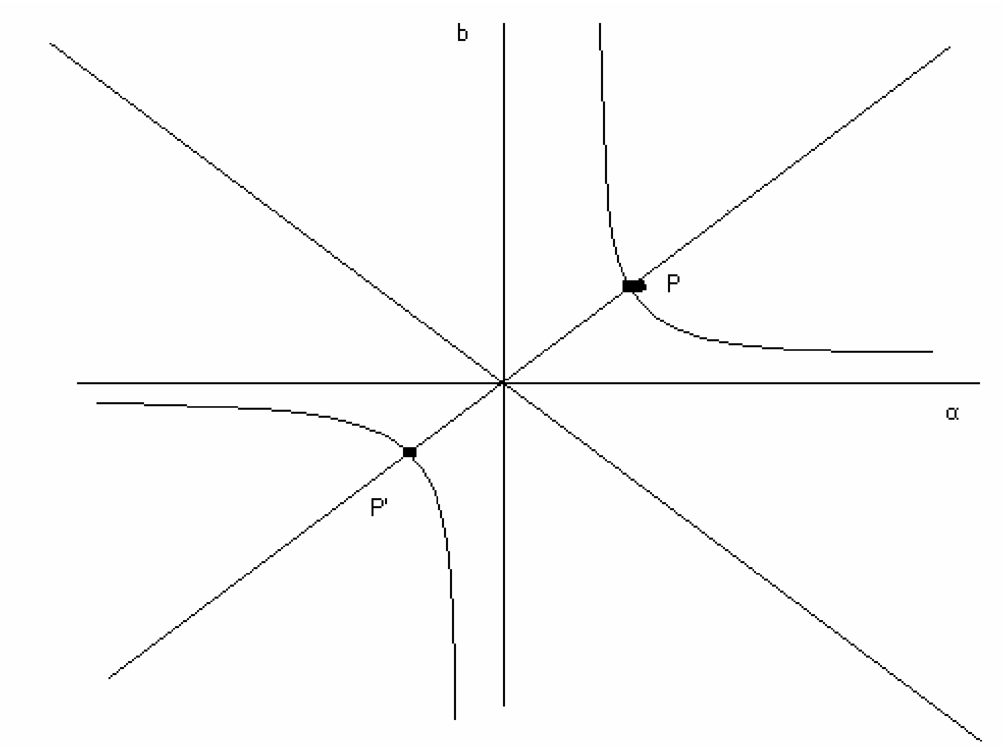
Μιγαδικές Συναρτήσεις

Όπως ο Euler, έτσι και ο D' Alembert ασχολήθηκε με την έκφραση $(α + bi)^{c+di}$. Σε κάποιο στάδιο θεώρησε τη βάση α + bi ως *μεταβλητή* και παραγώγισε τη συνάρτηση προβλέποντας τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Ο D' Alembert υπέθεσε ότι ένας απειροστικός λογισμός μιγαδικών μεταβλητών θα προέκυπτε από αλγεβρικούς συνδυασμούς των πραγματικών μεταβλητών, έτσι ώστε η μαθηματική έκφραση του df(x + iψ) = f'(x+ iψ)d(x+iψ) θα μπορούσε πάντοτε να γραφεί στη μορφή du + idv, στην οποία το πραγματικό μέρος διαχωρίζεται από το φανταστικό. Δεν μπόρεσε όμως να αποδείξει την υπόθεσή του. Ένα άρθρο του το 1752, που αναφέρεται στην πίεση των υγρών, περιέχει τις εξισώσεις Cauchy – Riemann, που παίζουν σημαντικότατο ρόλο στη Μιγαδική Ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα, αν εξετάσουμε την αναλυτική συνάρτηση

f(x + iψ) = u + iv, τότε θα έχουμε f(x – iψ) = u – iv και θu/θx = θv/θψ και θu/θψ = -θv/θx.

Ο Carl Friedrich Gauss (1777-1855) στη συνέχεια και ενώ ήταν ακόμη φοιτητής έγραψε τη διατριβή του με τίτλο «Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ρητή ακέραια αλγεβρική συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δευτέρου βαθμού». Παραθέτουμε τη βασική σειρά της σκέψης του μέσα από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

Θα λύσουμε την εξίσωση $z^2 - 4i = 0$ γραφικά δείχνοντας ότι υπάρχουν δύο μιγαδικές τιμές του $z = \alpha + bi$ (με $\alpha, b \neq 0$), οι οποίες επαληθεύουν την εξίσωση. Αντικαθιστώντας το z με $\alpha + bi$ και διαχωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της εξίσωσης παίρνουμε $\alpha^2 - b^2 = 0$ και $\alpha b - 2 = 0$. Αν ερμηνεύσουμε τα α, b ως μεταβλητές ποσότητες και σχεδιάσουμε αυτές τις εξισώσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων (ο ένας άξονας να αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος α και ο άλλος στον φανταστικό b), θα έχουμε δύο καμπύλες· η μία θα αποτελείται από τις δύο ευθείες $\alpha + b = 0$ και $\alpha - b = 0$ και η άλλη από την ορθογώνια υπερβολή $\alpha b = +2$ (βλ. σχήμα 1). Είναι σαφές ότι οι καμπύλες θα έχουν ένα σημείο τομής P στο πρώτο τεταρτημόριο και άλλο ένα, P΄, στο τρίτο. Οι συντεταγμένες α και b αυτών τών σημείων τομής είναι τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη, αντίστοιχα, των μιγαδικών αριθμών, που είναι λύσεις της εξίσωσης $z^2 - 4i = 0$. Ας σημειώσουμε εδώ ότι ο Gauss βασιζόταν στις γραφικές παραστάσεις των εν λόγω καμπυλών, για να δείξει ότι τέμνονται. Δεδομένου αυτού του αποτελέσματος είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο z^2-4i μπορεί να αναλυθεί σε δύο πραγματικούς γραμμικούς παράγοντες.



Σχήμα 1

Στα 1806 ο Jean Robert Argand (1768-1822) είχε δημοσιεύσει τη γραφική παράσταση των μιγαδικών. Μολονότι η δημοσίευση πέρασε απαρατήρητη (όπως και του Wessel), έως το τέλος της δεύτερης δεκαετίας του 19ου αιώνα το μεγαλύτερο μέρος της Ευρώπης γνώρισε μέσω του Cauchy όχι μόνο την εικόνα ενός μιγαδικού κατά Wessel-Argand-Gauss, αλλά και τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων από τη φυσική του Euler και του D' Alembert. Αυτή τη φορά όμως αυτές έγιναν(μέσω του Cauchy) τμήμα των θεωρητικών μαθηματικών. Εφόσον απαιτούνται δύο διαστάσεις για τη γραφική απεικόνιση μιας συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής και μόνο, θα χρειαζόμασταν τέσσερις διαστάσεις για αν απεικονίσουμε γραφικά μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα σε δύο μιγαδικές μεταβλητές w = f(z). Άρα οι ορισμοί και οι κανόνες παραγώγισης δεν μεταφέρονται αυτούσιοι από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς και η παράγωγος στην περίπτωση των μιγαδικών δεν είναι πλέον η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης. Ο Cauchy κάλυψε την ανάγκη για ακριβέστερους ορισμούς.

Γύρω στα 1846 ο Riemann μελέτησε τη σειρά $\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$ (σειρά Dirichlet), την οποία είχε ήδη μελετήσει και ο Euler για s ακέραιο. Ο Riemann μελέτησε τη σειρά θεωρώντας το s μιγαδική μεταβλητή. Το άθροισμα αυτό ορίζει μια συνάρτηση ζ(s) η οποία είναι γνωστή ως η συνάρτηση ζ του Riemann. Οι μαθηματικοί ως σήμερα δεν έχουν καταφέρει να αποδείξουν την αλήθεια ή όχι της υπόθεσης του Riemann ότι όλες οι μιγαδικές ρίζες s = σ + i τ της συνάρτησης ζ έχουν πραγματικό μέρος σ = ½. Ο Riemann είναι γνωστός και για τις επιφάνειες Riemann. Οι επιφάνειες αυτές ήταν τρόπος ομαλοποίησης (δηλαδή μετατροπής σε απεικόνιση 1 προς 1) μιας μιγαδικής συνάρτησης η οποία στο επίπεδο Gauss θα είχε πολλές τιμές, όπως συμβαίνει με τον μιγαδικό λογάριθμο (βλ. Μέρος Γ΄ αυτής της εργασίας).

Μέχρι το 1837 οι μιγαδικοί αριθμοί ήταν συνδεδεμένοι με τη γεωμετρία. Το 1837 ο Hamilton παρέστησε τους μιγαδικούς ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών χωρίς τη χρήση του συμβόλου i. Από εκεί και πέρα η θεμελίωση των μιγαδικών αριθμών θεωρείται θέμα αλγεβρικό. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τις μιγαδικές συναρτήσεις, όπου η τοπολογία έπαιξε ένα θεμελιώδη ρόλο-έστω και εκ των υστέρων. Προκειμένου όμως για μια πρώτη εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών στους μαθητές, η γεωμετρική αναπαράσταση και ερμηνεία θα μπορούσε να παίξει ένα κύριο διδακτικό ρόλο, αποδίδοντας νόημα στο νέο και «μυστηριώδες» αυτό είδος αριθμών και ιδιαίτερα στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό τους.

Ανάλογα, όπως θα δούμε πιο κάτω, η επιφάνεια Riemann που αντιστοιχεί στο μιγαδικό λογάριθμο μπορεί να παρουσιαστεί με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και του στοιχειώδους λογισμού στους φοιτητές.

Εφαρμογές των Μιγαδικών στη Φυσική

Λόγω της διανυσματικής τους ερμηνείας οι μιγαδικοί αριθμοί μπορεί να χρησίμευσαν από τον 19ο για τη μαθηματική παράσταση διαφόρων ανυσματικών φυσικών μεγεθών του επιπέδου.

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η παράσταση με μιγαδικούς στην ηλεκτροτεχνία των διαφόρων μεγεθών και ειδικά στα εναλλασσόμενα ρεύματα.

Ετσι την αντίσταση ενός κυκλώματος R_L που χαρακτηρίζεται από το ζεύγος (ωμική αντίσταση R, επαγωγική αντίσταση Lω) την ονομάζουμε μιγαδική αντίσταση του κυκλώματος και τη συμβολίζουμε με $Z = R + iL\omega$.

Η αντίσταση αυτή λέγεται και σύνθετη αντίσταση και το μέτρο της που δίνει την εμπέδηση του κυκλώματος είναι $|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

Η σύνθετη αντίσταση σε ένα κύκλωμα RLC ορίζεται ως μιγαδικός $Z = R + i(L\omega - 1/C\omega)$, όπου R είναι η ωμική αντίσταση και $L\omega - 1/L\omega$ είναι η αντίσταση που οφείλεται στην αυτεπαγωγή L και στη χωρητικότητα C.

Το μέτρο της αντίστασης, δηλαδή η εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

Για τη μαθηματική επεξεργασία των εναλλασσομένων ρευμάτων χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

$I(t) = I_0 (\cos\omega t + i\sin\omega t)$, για την ένταση

$V(t) = V_0 (\cos\omega t + i\sin\omega t)$, για την τάση.

Τότε ισχύει: $I_{στιγμ} = I_m(I_{(t)}) = I_0\sin\omega t$

$V_{στιγμ} = I_m(V_{(t)}) = V_0\sin\omega t$

Η πρακτική αξία του μιγαδικού συμβολισμού της σύνθετης αντίστασης του εναλλασσόμενου ρεύματος και της τάσης είναι η εξής:

Αποδεικνύεται στην ηλεκτροτεχνία ότι:

«Ο νόμος του Ohm για το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει την ίδια μορφή όπως και στο συνεχές ρεύμα, όταν ρεύμα, τάση και αντίσταση εκφράζονται μιγαδικώς».
Δηλαδή ισχύει: $I = V/Z$

Επίσης αν κ στοιχεία με σύνθετες αντιστάσεις $Z_1, Z_2, \ldots, Z_κ$ συνδεθούν:

ι) Σε σειρά, τότε η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι
$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{κ.}$

ii) Παράλληλα, τότε η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι
$1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2 + \ldots + 1/Z_{κ.}$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι με τη βοήθεια των μιγαδικών αριθμών επιλύονται εύκολα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, κυρίως όσον αφορά ανυσματικά μεγέθη που δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Π.χ. εμπεδήσεις, ενεργά μεγέθη (τάσεως, εντάσεως) καθώς και ο προσδιορισμός διαφορών φάσεως, τάσεων και εντάσεων.
Η ευκολία κυρίως συνίσταται α) στη δυνατότητα να βρεθούν διάφορα ζητούμενα που έχουν σχέση με τα παραπάνω μεγέθη, ως συνάρτηση των δεδομένων με σχετικά απλές πράξεις και β) στη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν απλές σχέσεις των αντιστάσεων των κλάδων της συνδεσμολογίας ή σχέσεις εντάσεων σε κόμβο (1ος κανόνας Kirchoff) σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, οπότε πραγματοποιείται «μεταφορά μάθησης» από το συνεχές στο εναλλασσόμενο.

Για παράδειγμα έστω ότι ζητείται να βρεθεί η εμπέδηση του παρακάτω κυκλώματος (Σχήμα 2) και η διαφορά φάσης τάσης – έντασης. Έχουμε:

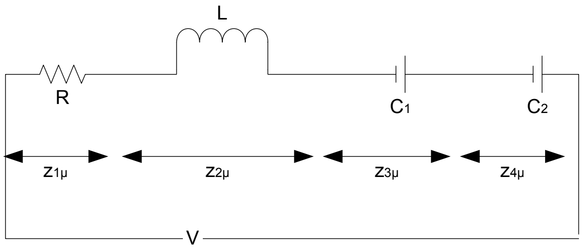
$Z_μ = Z_{1μ} + Z_{2μ} + Z_{3μ} + Z_{4μ}$

$Z_{1\mu} = R + i0$

$Z_{2\mu} = 0 + iL\omega$

$Z_{3\mu} = 0 - i\,\dfrac{1}{c_1\omega}$

$Z_{4\mu} = 0 - i\,\dfrac{1}{c_2\omega}$



Σχήμα 2

Οπότε:

$$Z_\mu = R + i\left(L\omega - \frac{1}{c_1\omega} - \frac{1}{c_2\omega}\right)$$

$$|Z_\mu| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c_1\omega} - \frac{1}{c_2\omega}\right)^2}$$

και

$$\varepsilon\varphi\theta = \left(L\omega - \frac{1}{c_1\omega} - \frac{1}{c_2\omega}\right)/R$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Ο CASPAR WESSEL (1745-1818) ΚΑΙ Η ΠΡΩΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ «ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ»[2]

Η πρώτη επιστημονική παρουσίαση της σύγχρονης γεωμετρικής μεθόδου αναπαράστασης του $i=\sqrt{-1}$ και των πράξεων μεταξύ αυτών των οντοτήτων που σήμερα ονομάζουμε «μιγαδικούς αριθμούς» έγινε σε ένα άρθρο με τίτλο «Σχετικά με την Αναλυτική Αναπαράσταση της κατεύθυνσης», που παρουσιάστηκε στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών και Γραμμάτων, το 1797 στη Δανία από το Νορβηγό γεωδαίτη Caspar Wessel. Η εργασία περιλαμβάνει μια ολοκληρωμένη έκθεση των ιδιοτήτων των πράξεων μεταξύ προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων.

Ο Caspar Wessel γεννήθηκε στο Jonsrud της Νορβηγίας στις 8 Ιουνίου του 1745. Ο πατέρας του ήταν πάστορας και η υπόλοιπη οικογένεια αποτελούνταν από 13 παιδιά. Έλαβε εξαιρετική μόρφωση ξεκινώντας από το Jonsrud και συνεχίζοντας το 1757 σε λύκειο της Christiania. Το 1763 ο C. Wessel πήγε στην Κοπεγχάγη για περαιτέρω σπουδές. Το επόμενο έτος προσλήφθηκε ως βοηθός στη δανική Ακαδημία των Επιστημών για την κατασκευή χάρτη της Δανίας. Στην Ακαδημία παρέμεινε συνεχώς ως το 1805. Έχοντας πολλά ενδιαφέροντα μελέτησε το ρωμαϊκό δίκαιο περνώντας τις εξετάσεις και σ' αυτό το πεδίο το 1778.

[2] Το Β΄ Μέρος της εργασίας μου, στηρίζεται στο: E. Midownik, *The Treasury of Mathematics* Vol. 2, Penguin Books, pp. 320-329. Η απόδοση του κειμένου του Wessel από τα αγγλικά είναι δική μου.

Ο Wessel δέχθηκε πολλές τιμές για τις υπηρεσίες του στη Δανία. Μετά τη συνταξιοδότησή του βραβεύτηκε από την Ακαδημία με ασημένιο μετάλλιο. Παρόλο που ο ίδιος δεν θεώρησε τον εαυτό του ως μαθηματικό, η ακαδημία είδε πολύ θετικά την εργασία του. Έχοντας οικονομική και ηθική υποστήριξη από τον Tetens, ο Wessel παρουσίασε τη δουλειά του το 1797 και τη δημοσίευσε το 1798. Γραμμένη, ωστόσο, στα δανέζικα, δεν ήταν προσιτή στους μαθηματικούς των άλλων χωρών με αποτέλεσμα αυτή η έξοχη και ακριβής εργασία να παραμείνει άγνωστη, εώς ότου μια γαλλική της μετάφραση είδε το φως της δημοσιότητας μόλις το 1897 (έναν αιώνα μετά την πρώτη της δημοσίευση).

Η προσπάθεια του Wessel σχετίζεται με το ερώτημα πώς θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε την κατεύθυνση με αναλυτικό τρόπο. Αυτό σημαίνει: πώς θα εκφράσουμε μήκος και κατεύθυνση ταυτόχρονα με μία και μόνο μαθηματική οντότητα.

«Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε», γράφει ο Wessel, «θα βασιστούμε σε δύο υποθέσεις που φαίνονται αδιαμφισβήτητες. Η πρώτη είναι η εξής: όποιες αλλαγές στην κατεύθυνση εξαρτώνται από αλγεβρικές πράξεις, αυτές οι αλλαγές πρέπει να εκφράζονται στο συμβολικό επίπεδο. Η δεύτερη είναι ότι η κατεύθυνση δεν είναι θέμα αλγεβρικό, αλλά αυτό που ισχύει είναι ότι μπορεί να αλλάξει με αλγεβρικές πράξεις. Καθώς όμως η κατεύθυνση δεν μπορεί να *αλλάξει* (τουλάχιστον όπως συνήθως ερμηνεύεται) παρά μόνο προς την αντίθετη φορά ενός και του ίδιου άξονα (από τη θετική φορά στην αρνητική και αντίθετα), αυτές είναι οι μόνες κατευθύνσεις που περιγράφονται με τις υπάρχουσες μεθόδους. Για άλλες κατευθύνσεις το πρόβλημα παραμένει άλυτο. Γι' αυτό ίσως το λόγο δεν έχει αναλάβει κανείς το θέμα αυτό: γιατί θεωρήθηκε ότι δεν επιτρέπεται να αλλάξει κανείς καθόλου την ερμηνεία (το νόημα) αυτών των πράξεων.

Περνώντας από την αριθμητική στη γεωμετρική ανάλυση συναντάμε μεγέθη που έχουν ίδιες σχέσεις το ένα με το άλλο όπως οι αριθμοί, αλλά έχουν επίσης και ευρύτερο νόημα. Αν δώσουμε στις πράξεις μεταξύ αυτών των μεγεθών μια ευρύτερη έννοια και δεν περιοριστούμε στη χρήση ενός και μόνον άξονα με την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση, αλλά με κάποιο τρόπο επεκτείνουμε την έννοια των πράξεων, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν σε περισσότερες περιπτώσεις από πριν, τότε δε θα πρέπει να αντιτεθούμε στις βασικές αρχές (ιδιότητες) των αριθμών. Απλά θα τις «προεκτείνουμε», θα τις προσαρμόσουμε στη φύση των ποσοτήτων που χρησιμοποιούμε.

Δεν είναι παράλογο αίτημα τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία να επιδέχονται πιο ευρύ νόημα από αυτό που τους δίνεται όταν χρησιμοποιούνται στην αριθμητική. Πρέπει να παραδεχτεί κάποιος ότι με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να παραχθεί αλλαγή (μεταβολή) στην κατεύθυνση των γραμμών. Κάνοντας αυτό μπορούν να αποφευχθούν όλες οι αδύνατες πράξεις, αλλά επιπλέον η κατεύθυνση όλων των γραμμών στο ίδιο επίπεδο μπορεί να εκφραστεί τόσο αναλυτικά όσο τα μήκη τους – χωρίς να νοιαζόμαστε για άλλους συμβολισμούς ή κανόνες.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η αξιοπιστία των γεωμετρικών προτάσεων φαίνεται καλύτερα, όταν η κατεύθυνση δείχνεται αναλυτικά και συνοδεύεται από αλγεβρικούς κανόνες παρά όταν αναπαρίσταται από σχήμα.

Σκοπός μου σε αυτό το κεφάλαιο είναι :

1. Να ορίσω τους κανόνες αυτών των εργαλείων
2. Να δείξω την εφαρμογή τους, όταν οι γραμμές είναι στο ίδιο επίπεδο, με δύο παραδείγματα
3. Να ορίσω την κατεύθυνση των γραμμών, που βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα με μια νέα μέθοδο που δε θα είναι αλγεβρική
4. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο να αναλύσω επίπεδα και σφαιρικά πολύγωνα

5. Τέλος, με τον ίδιο τρόπο να καταλήξω στη σφαιρική τριγωνομετρία

Αυτά είναι τα βασικά θέματα της μελέτης αυτής».

Στη συνέχεια του κειμένου του ο Wessel ορίζει την πρόσθεση μεταξύ δύο, ή περισσότερων διαδοχικών «γραμμών» (που αντιστοιχούν στη σύγχρονη γλώσσα με τα διανύσματα). Η κυριότερη νέα πράξη που εισάγει είναι ο «πολλαπλασιασμός γραμμών», μια πράξη που ερμηνεύει γεωμετρικά το σημερινό μιγαδικό πολλαπλασιασμό γενικεύοντας έναν κανόνα με βάση τον οποίο ορίζεται ο πολλαπλασιασμός στη συνηθισμένη Αριθμητική. Όπως γράφει ο ίδιος:

« *Θα ήταν δυνατό σε κάθε περίπτωση να σχηματίσουμε το γινόμενο δύο γραμμών από τον καθένα από τους παράγοντές του με ίδιο τρόπο, όπως ο άλλος παράγοντας γίνεται από τη θετική ή απόλυτη γραμμή, που ορίζεται ίση με τη μονάδα.* Πιό συγκεκριμένα (να ορίσουμε) ότι οι παράγοντες έχουν τέτοιες κατευθύνσεις, όπου και οι δύο μπορούν να τοποθετηθούν στο ίδιο επίπεδο με τη θετική μονάδα. Δεύτερον, όσον αφορά το *μήκος,* το γινόμενο μπορεί να γίνει από τον ένα παράγοντα όπως ο άλλος γίνεται από τη μονάδα.

Και τελικά, αν η θετική μονάδα, οι παράγοντες και το γινόμενο ξεκινούν από τη συνήθη αρχή των αξόνων, το γινόμενο θα πρέπει, όσον αφορά την *κατεύθυνση*, να βρίσκεται στο επίπεδο της μονάδας και να σχηματίζει με τον έναν παράγοντα γωνία ίση με τη γωνία που σχηματίζει ο άλλος παράγοντας με τη θετική μονάδα, έτσι ώστε η γωνία διεύθυνσης του γινομένου, ή η απόκλιση του από τη θετική μονάδα να είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών διεύθυνσης των δύο παραγόντων».

Αμέσως μέτα ο Wessel εφαρμόζοντας τον γενικό ορισμό του γινομένου προχωράει στον πολλαπλασιασμό μεταξύ των πραγματικών και των «φανταστικών» μονάδων 1, -1, +ε, -ε, i και -i (με τον σημερινό συμβολισμό)ωςεξής:

«Θεωρώντας το +1 επάνω στον ένα θετικό ημιάξονα κανόνα και το +ε κάθετο σ' αυτόν, τότε η γωνία του +1 θα είναι 0^0, του +ε θα είναι 90^0

και του–1 θα είναι 180^0. Το –ε θα έχει γωνία -90^0 ή 270^0. Από τον κανόνα ότι η γωνία διεύθυνσης του γινομένου θα ισούται με το άθροισμα των γωνιών των παραγόντων θα έχουμε: (+1)·(+1)=+1, (+1)·(-1)=-1,

(-1)·(-1)=+1, (+1)·(+ε)=+ε,

(+1)·(-ε)=-ε, (-1)·(+ε)=-ε, (-1)·(-ε)=+ε, (+ε)·(+ε)=-1, (+ε)·(-ε)=-1

(-ε)·(-ε)=-1. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το ε ισούται με $\sqrt{-1}$

Με τον τρόπο αυτό δίνεται μια καθαρά γεωμετρική ερμηνεία στη «μυστηριώδη» αλγεβρική ισότητα $i^2 = -1$, ή $i=\sqrt{-1}$.

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΜΙΑ ΕΠΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ RIEMANN ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ logz [3]

Ολόκληρο το πεδίο τιμών της συνάρτησης w=logz ξετυλίγεται, όταν το z διατρέχει την άπειρη χώνη της επιφάνειας Riemann, με έναν τελείως μονοσήμαντο τρόπο. Ο logz γίνεται έτσι μια μονότιμη συνάρτηση, που ορίζεται πάνω στην επιφάνεια και παίρνει τιμές στο w-επίπεδο.

Πρέπει, ωστόσο, να πούμε κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με την κατανομή του πεδίου τιμών του logz στην επιφάνειά μας. Στο πρώτο φύλλο της επιφάνειας είναι προσαρτημένες οι πρωτεύουσες τιμές του logz = $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, δηλαδή αυτές που προκύπτουν, όταν το τόξο ολοκλήρωσης διανύεται εξ ολοκλήρου στο επίπεδο που έχει κοπεί κατά μήκος του αρνητικού άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν, για να πάμε από το +1 στο z, προχωρήσουμε κατά μήκος του θετικού άξονα των πραγματικών αριθμών στο σημείο IzI και μετά πάνω στον κύκλο (0, IzI), κατά μήκος του συντομότερου μονοπατιού για το z, έχουμε:

$$\mathrm{w} = \log z = \int_1^{|z|} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{|z|}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \mathrm{i} \int_0^{amz} d\phi = \mathrm{Log}|z| + \mathrm{i\ amz}$$

όπου log|z| είναι ο πραγματικός λογάριθμος του IzI και όπου –π<amz≤+π. Οι πολλαπλές τιμές του logz εμφανίζονται σαν άμεση συνέπεια της αμφισημίας του ορίσματος ενός μιγαδικού αριθμού.

Αν υποθέσουμε ότι το φανταστικό μέρος του w=logz, περιοριστεί στο διάστημα –π<Im(w)≤+π, το σημείο w κείται μέσα σε μια λωρίδα του

[3] Στο Γ΄ μέρος της διπλωματικής μου, ακολούθησα προσαρμοσμένη κατάλληλα στις γνώσεις των Ελλήνων φοιτητών την παρουσίαση του K. Knopp στο βιβλίο του *Theory of Functions*, τόμος 2^{ος}, εκδ. Dover, 1947.

w-επιπέδου, το εύρος της οποίας είναι 2π και η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

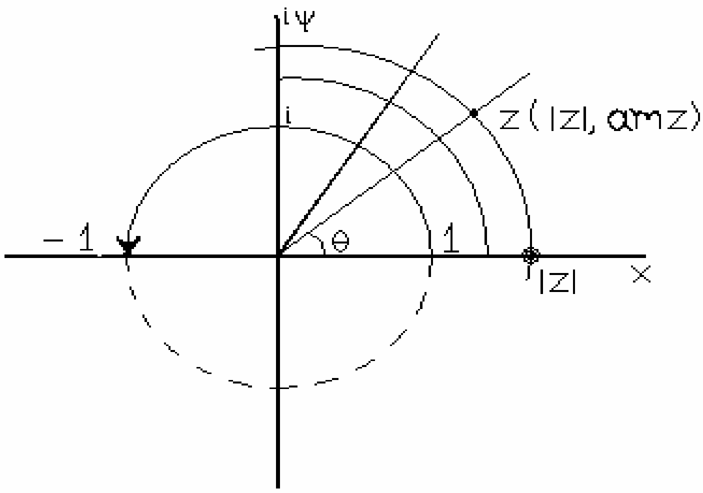
Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι αν $z=e^w$, κάθε σημείο w της παραπάνω λωρίδας είναι εικόνα κάποιου $z\neq 0$. Επομένως, το επίπεδο που έχει «κοπεί» κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών αριθμών, εξαιρουμένου και του μηδενός, απεικονίζεται ένα προς ένα στο εσωτερικό της παραπάνω λωρίδας του w-επιπέδου.

Οι υπόλοιπες τιμές του logz, οι οποίες θα οριστούν στα άλλα φύλλα της επιφάνειας Riemann της συνάρτησης w=logz , διαφέρουν από την αρχική τιμή μόνο κατά 2kπi, με ακέραιο k. Τα αντίστοιχα σημεία w, κατά συνέπεια, βρίσκονται μέσα στη λωρίδα, που περιγράφεται από την

$(2k - 1)\pi < \mathrm{Im}z \leq (2k + 1)\pi, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Όλες αυτές οι λωρίδες ενώνονται με την πρώτη λωρίδα σε μια αδιάσπαστη ακολουθία και γεμίζουν ολόκληρο το w-επίπεδο. Προφανώς αυτές είναι οι λωρίδες περιοδικότητας της συνάρτησης e^w. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η πολλαπλότητα των τιμών της w=logz είναι ακριβώς το «αντίστροφο» φαινόμενο της απλής περιοδικότητας της αντίστροφης συνάρτησης $z=e^w$, που έχει αρχική περίοδο 2πi.

Έστω, δηλαδή το πρώτο φύλλο της επιφάνειας Riemann (πεδίο ορισμού της w=logz). Αυτό είναι το z-επίπεδο, «κομένο» κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα των x. Κάθε σημείο z με όρισμα θ=amz (όπου $0< \theta \leq 2\pi, \theta\neq\pi$) ανήκει σε μια «ακτίνα» (ημιευθεία) που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα των x, καθώς και σ' έναν κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας ίσης με |z| (Σχήμα 3).

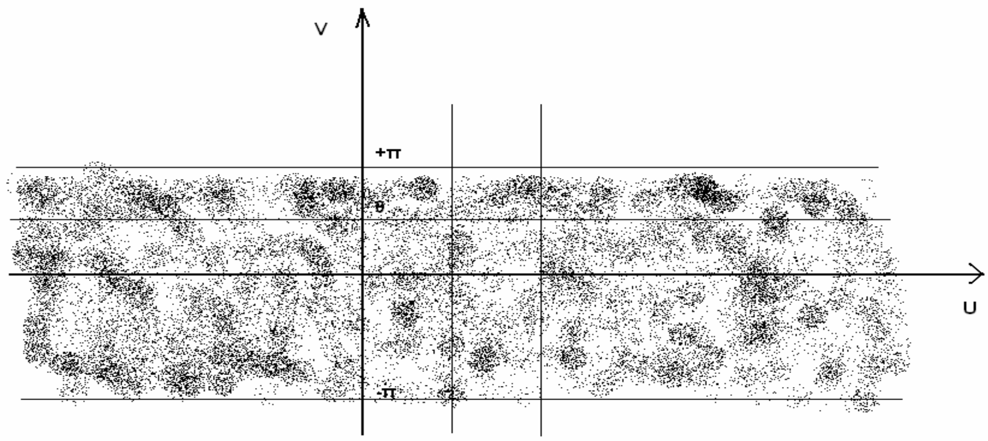


Σχήμα 3

z-επίπεδο (ή το πρώτο φύλλο της επιφάνειας Riemann
για την συνάρτηση w=logz)

Οι αντίστοιχες τιμές του w=logz,για όλα τα z που βρίσκονται στο πρώτο φύλλο της επιφάνειας Riemann (οι λεγόμενες και «πρωτεύουσες τιμές» του μιγαδικού λογαρίθμου) περιλαμβάνονται σε μια λωρίδα του w-επιπέδου (Σχήμα 3) και συγκεκριμένα τη λωρίδα που ορίζεται από τις παράλληλες προς τον άξονα των u που περνούν από τα σημεία –π και +π του άξονα των v.

w-επίπεδο



Σχήμα 4

Όπως παρατηρούμε συγκρίνοντας τα Σχ.3 και Σχ.4, τα σημεία με το ίδιο όρισμα θ απεικονίζονται σε ευθεία παράλληλη στον u-άξονα και μέσα στην παραπάνω λωρίδα, ενώ τα σημεία με το ίδιο |z| (σημεία των κύκλων κέντρου 0) απεικονίζονται σε ευθεία κάθετη στον u- άξονα (ή παράλληλη στον v-άξονα) αλλά πάλι σε κομμάτι της ευθείας περιοριζόμενο μέσα στην παραπάνω λωρίδα.

Γενικότερα μπορούμε να πούμε ότι μέσω της συνάρτησης w=logz, η επιφάνεια Riemann, με άπειρα φύλλα απεικονίζεται ένα προς ένα (και συνεχώς) πάνω στο w-επίπεδο, έτσι ώστε κάθε φύλλο της επιφάνειας να απεικονίζεται στο εσωτερικό μιας λωρίδας του w- επιπέδου που ορίζεται από την ανισότητα $(2k - 1)\pi < \mathrm{Im}z \leq (2k + 1)\pi$, για κ= 0, ±1,±2,±3,...

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. Carl. B. Boyer – Uta C. Merzbach, *Η Ιστορία των Μαθηματικών,* εκδ. Πνευματικού, 1997.
2. Τ. Πατρώνης – Δ. Σπανός*, Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία,* εκδ. Πνευματικού, 2000.
3. Ιωάννης Π. Κρόκος, *Μιγαδικές Συναρτήσεις*, εκδ. ΑΡΝΟΣ, 1998.
4. Νικόλαος Κ. Αρτεμιάδης, *Μιγαδική Ανάλυση*, εκδ. Λύχνος, 1998.
5. Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, εκδ. ΟΕΔΒ, 1998.
6. Σ. Βοσνιάδου, *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg, 1995.
7. Μ. Τουμάσης, *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg, 1999.
8. E. T. Bell, *Οι Μαθηματικοί*, τόμος Α΄, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.
9. Calvin Clawson, *Ο Ταξιδεύτης των Μαθηματικών*, εκδ. Κέδρος, 2005.
10. E. Midownik, *The Treasury of Mathematics* Vol. 2, Penguin Books, pp. 320-329.