



08
επαναληπτικά
θέματα

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A)** Σχολικό Βιβλίο Σελίδα 136.
B) Λάθος, Σωστό, Σωστό, Σωστό, Λάθος.
Γ) Γ, Β, Δ, Γ, Β, Α

ΘΕΜΑ 2^ο

- α)** $P(x) = F(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 16x - 12 = x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3.$$

- β)** Πρέπει και αρκεί $P(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 16x - 12 < 0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

1	-5	16	-12	1
	1	-4	12	
1	-4	12	0	

Η ανίσωση γίνεται $(x-1)(x^2-4x+12) < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Το τριώνυμο $x^2-4x+12$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\Delta < 0$.

Τελικά για $x \in (-\infty, 1)$ η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον x' .

- γ)** Έχουμε $a_1 = 3$ και $\lambda = 2$, άρα $a_v = a_1 \lambda^{v-1} = 3 \cdot 2^{v-1}$.

- i)** $a_v = 192 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{v-1} = 192 \Leftrightarrow 2^{v-1} = 64 \Leftrightarrow 2^{v-1} = 2^6 \Leftrightarrow v-1 = 6 \Leftrightarrow v = 7$, άρα ο όρος είναι ο έβδομος.

- ii)** Έχουμε: $\frac{a_{v+1}}{a_v} = \lambda$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$. Το ζητούμενο γινόμενο ισούται με

$$\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι:

$$f(x) = \frac{\eta\mu 4x + 2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu 2x (\sigma\upsilon\nu 2x + 1)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2 \cdot 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 1)}{\sigma\upsilon\nu x} = 8\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x = 8\eta\mu x (1 - \eta\mu^2 x) = 8\eta\mu x - 8\eta\mu^3 x.$$

β) Για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι:

$$f(x) = 16\eta\mu x \Leftrightarrow 8\eta\mu x - 8\eta\mu^3 x = 16\eta\mu x \Leftrightarrow 8\eta\mu^3 x + 8\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow 8\eta\mu x (\eta\mu^2 x + 1) = 0 \stackrel{\eta\mu^2 x + 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8\eta\mu \frac{\pi}{6} - 8\eta\mu^3 \frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{1}{2} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 - 1 = 3$

$$f(0) = 8\eta\mu 0 - 8\eta\mu^3 0 = 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 8\eta\mu^3\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -4 + 1 = -3.$$

Έχουμε: $2f(0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, άρα οι $f\left(-\frac{\pi}{6}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$f(x) = \ln(x + \alpha - \beta), x > -\alpha + \beta.$$

A. α) $\ln 6 + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln 5 = \ln \pi \Leftrightarrow \ln 6 + \ln\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) - \ln 5 = \ln \pi \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \ln 5 + \ln \pi - \ln 6 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) = \ln \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}.$$

β) $f(x) = \ln\left(x + \frac{\pi}{3}\right), x > -\frac{\pi}{3}$

$$\eta\mu(e^{f(x)}) \sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu(e^{f(x)}) \sigma\upsilon\nu(e^{f(x)}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(2e^{f(x)}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(2e^{\ln(x + \frac{\pi}{3})}) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2(x + \frac{\pi}{3})) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(2x + \frac{2\pi}{3}) = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Πρέπει: $x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \kappa\pi - \frac{\pi}{12} > -\frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = 0, 1, 2, \dots$

Τελικά $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \{0, 1, 2, \dots\}$

(Η μη χρησιμοποίηση του τελευταίου περιορισμού, προτείνεται να μη θεωρηθεί λάθος.)

B. α) $f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + \alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha - \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0.$

β) $f(x) = \ln x, x > 0$

Η ανίσωση ορίζεται όταν $x > 0$.

$$16 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln(2e^4)} \Leftrightarrow 2^4 \cdot 2^{f(x)} < 2^{\ln(2e^4)} \Leftrightarrow 2^{f(x)+4} < 2^{\ln(2e^4)} \\ \Leftrightarrow f(x) + 4 < \ln 2 + \ln e^4 \Leftrightarrow f(x) < \ln 2 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$