



08
επαναληπτικά
θέματα

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. σχολικό βιβλίο σελ.122.

Β. i. δ
ii. α
iii. β

Γ. i. Σ
ii. Σ
iii. Λ
iv. Λ
v. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Πρέπει και αρκεί $x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$.

Β.

$$A = \frac{f(3) - f(1)}{\sqrt{f(4) - 2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}-2} = \frac{2}{\sqrt{2}-2} = \frac{2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \frac{2(\sqrt{2}+2)}{2-4} = -(\sqrt{2}+2)$$

Γ. $|f(4) \cdot x - 1| = |2 - f(3) \cdot x| \Leftrightarrow |2x - 1| = |2 - x| \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 - x$ ή $2x - 1 = -2 + x \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

ΘΕΜΑ 3^ο

i)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0$$

ii)

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

$$\text{όπου } x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda + 1)}{1} = \lambda + 1 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{1} = \lambda.$$

iii) Αν $\lambda = 3$ τότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οπότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$\text{Άρα } S = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ και}$$

$$P = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η

$$x^2 - S \cdot x + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$i) D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0. \text{ Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.}$$

$$ii) D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda^2 + \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 - \lambda = -\lambda^2 - 3\lambda.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 + \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda - \lambda = -\lambda^2 - 2\lambda.$$

$$\text{Επομένως } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda^2 - 3\lambda}{1} = -\lambda^2 - 3\lambda \text{ και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda^2 - 2\lambda}{1} = -\lambda^2 - 2\lambda \text{ οπότε } (x_0, y_0) = (-\lambda^2 - 3\lambda, -\lambda^2 - 2\lambda)$$

είναι η λύση του συστήματος.

$$\text{iii) } x_0 + y_0 \geq -3 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 3\lambda + (-\lambda^2 - 2\lambda) \geq -3 \Leftrightarrow -2\lambda^2 - 5\lambda + 3 \geq 0.$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5+7}{-4} = -3 \\ \lambda_2 = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

