

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1°

A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ , παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ. Αν f, g είναι συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

ΘΕΜΑ 2°

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) , τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

Θέμα 1°

A. → Θεωρία

B. α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστό.

Γ. → Θεωρία

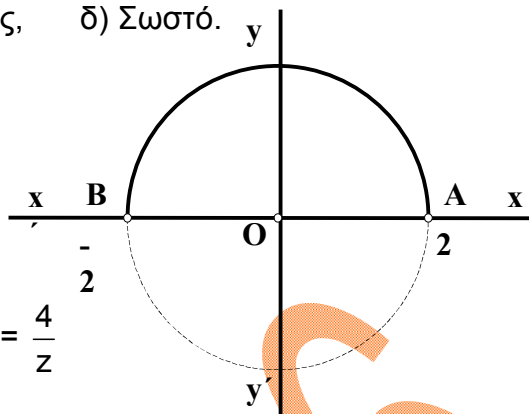
Θέμα 2°

α) Είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 2 που βρίσκονται στον άξονα $x'x$ ή πάνω από τον άξονα $x'x$.

$$\beta) |z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα το πραγματικό μέρος του z , άρα και η εικόνα του w κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB .



Θέμα 3°

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 0$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x}$$

$$\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = -2 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = 0 = \beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της C_f , όταν το x τείνει στο $-\infty$, είναι η $y = -2x$.

$$\gamma. f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = - \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{άρα } f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = - \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = f(x) + f(x) = 0.$$

$$\delta. \text{ Από } (\gamma) \text{ ερώτημα έχουμε : } \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int_0^1 - \frac{f'(x)}{f(x)} dx = - \int_0^1 [\ln f(x)]' dx = - [\ln f(x)]_0^1 \\ &= - [\ln f(1) - \ln f(0)] = - \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1)^{-1} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Θέμα 4°

α. Η f' είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .
Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Είναι $f(x) = -f(2-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } f(1) = -f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0.$$

Άρα το $x_0 = 1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$.

γ. Έστω ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_0, 0)$.

$$\text{Πρέπει } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0, \text{ άρα } A(1, 0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f'(x) \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x - 1} \cdot \frac{1}{f'(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} = f'(1) \cdot \frac{1}{f'(1)} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{διότι } \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = f'(1) \text{ και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)} \stackrel{f' \text{ συνεχής}}{=} \frac{1}{f'(1)}$$

$$\text{άρα } g'(1) = 1 = \tan 45^\circ,$$

επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, 0)$, στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .