ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 224**
Α.2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 188**
Β. α. **Σωστό**
β. **Σωστό**
γ. **Λάθος**
δ. **Λάθος**
ε. **Σωστό**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν $z = x + yi$, τότε

$$(2 - i)z + (2 + i)\overline{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - i)(x + yi) + (2 + i)(x - yi) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 2yi - xi + y + 2x - 2yi + xi + y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2y = -4x + 8 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4 \quad (1)$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία **(ε) : $y = -2x + 4$**.

β. Από τη σχέση (1) για $y = 0$ έχουμε $x = 2$, άρα $z_1 = 2$
Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε $y = 4$, άρα $z_2 = 4i$

γ. $$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |2 + 4i|^2 + |2 - 4i|^2$$

$$= \left(\sqrt{2^2 + 4^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (-4)^2}\right)^2$$

$$= 4 + 16 + 4 + 16$$

$$= 40$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2},\ x > -1$$

και $$e^{f(x)} = \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{f(x)} \underset{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim_{u\to L} e^u = e^L \in \mathbb{R}$$

άρα και $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} \in \mathbb{R}$$

Ο παρονομαστής είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο

άρα πρέπει και ο αριθμητής να είναι επίσης πρώτου βαθμού

άρα $\lambda + 1 = 0 \iff \boldsymbol{\lambda = -1}$

Β. Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2),\ x > -1$

α. $$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0, \text{ για } x > -1.$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}[\ln(x+1) - \ln(x+2)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1) - \ln(x+2)]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x+2} \underset{\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2} = 1}{\overset{\frac{x+1}{x+2} = u}{=}} \lim_{u\to 1}\ln u = 0$$

άρα **το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 0)$**.

β. $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, άρα

η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = -1$ και

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ (x΄x)

γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x) = -\alpha^2 < 0$.

Το $-\alpha^2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = -\alpha^2$ έχει μοναδική λύση, για κάθε $\alpha \neq 0$

ΘΕΜΑ 4ο

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, \quad 0 \le x \le 2 \quad \textbf{(1)}$$

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \le x \le 2$$

$$g'(x) = \left(3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}\right)'$$

$$= 6x - \frac{[f''(x) - 2f'(x)]\cdot e^{2x} - [f'(x) - 2f(x)]\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$$

$$= 6x - \frac{f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}}$$

$$= 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \quad \textbf{(2)}$$

$$\overset{(1)}{=} 6x - \frac{kxe^{2x}}{e^{2x}} = 6x - kx$$

$$= (6 - k)x \quad \textbf{(3)}$$

α. • Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως πράξεις συνεχών

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $g'(x) = (6 - k)x$

• $g(0) = \dfrac{f'(0) - 2f(0)}{e^0} = \dfrac{2f(0) - 2f(0)}{1} = 0$

$$g(2) = 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = 12 - \frac{2f(2) + 12e^4 - 2f(2)}{e^4}$$

$$= 12 - \frac{12e^4}{e^4} = 12 - 12 = 0$$

Άρα **η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle**.

β. Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 6\xi - \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$6\xi e^{2\xi} - f''(\xi) + 4f'(\xi) - 4f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)}$$

γ. $g'(\xi) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} (6 - k)\xi = 0 \overset{\xi > 0}{\Leftrightarrow} 6 - k = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k = 6}$

(3) $\overset{k = 6}{\Rightarrow}$ $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 2]$, άρα g σταθερή στο $[0, 2]$ και επειδή $g(0) = 0$, θα είναι **$g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 2]$**

δ. Για κάθε $x \in [0\ ,\ 2]$ είναι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$(x^3)' = \left[\frac{f(x)}{e^{2x}}\right]' \overset{\text{συνέπειες Θ.Μ.Τ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(x)}{e^{2x}} = x^3 + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x^3 + c)e^{2x} \ \mathbf{(4)}$$

$$(4) \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1) = (1 + c)e^2 \Leftrightarrow e^2 = (1 + c)e^2 \Leftrightarrow c = 0$$

$$(4) \overset{c=0}{\Rightarrow} \mathbf{f(x) = x^3e^{2x}, x \in [0\ ,2]}$$

ε.

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx$$

$$= \int_1^2 xe^{2x}dx$$

$$= \int_1^2 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$$

$$= \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 (x)'\frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_1^2$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4}$$

$$= \frac{4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2}{4}$$

$$= \mathbf{\frac{3e^4 - e^2}{4}}$$