

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ – ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Έστω η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

A.2 Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται “1 - 1”;

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με **Σωστό** ή **Λάθος**.

- α.** Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- β.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- γ.** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- δ.** Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- ε.** Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, \bar{z} είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x' .
- στ.** Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx$.

ΘΕΜΑ 2^ο

- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2 .
- β.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:
 - i.** να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$
 - ii.** να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι η f είναι “1 - 1”.
- β.** Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
- γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

- α.** Να δείξετε ότι: **i.** $f(0) = 0$, **ii.** $f'(0) = 1$.
- β.** Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$
- γ.** Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο \mathbb{R} και $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
 - i.** $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.
 - ii.** $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1°

A.1 → Θεωρία

A.2 → Θεωρία

B. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό, στ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2°

α. Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = \alpha + \beta i$. Τότε

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \Leftrightarrow (x + \alpha) + (y + \beta)i = 4 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x + \alpha = 4 & (1) \\ y + \beta = 4 & (2) \end{cases}$$

$$2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i \Leftrightarrow (2x - \alpha) + (2y + \beta)i = 5 + 5i \Rightarrow \begin{cases} 2x - \alpha = 5 & (3) \\ 2y + \beta = 5 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Από (1), (3)} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases} \text{ και από (2), (4)} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3i$.

β. i. Η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο $K(1, 3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο $\Lambda(3, 1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{2}$.

$$(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} = R + \rho,$$

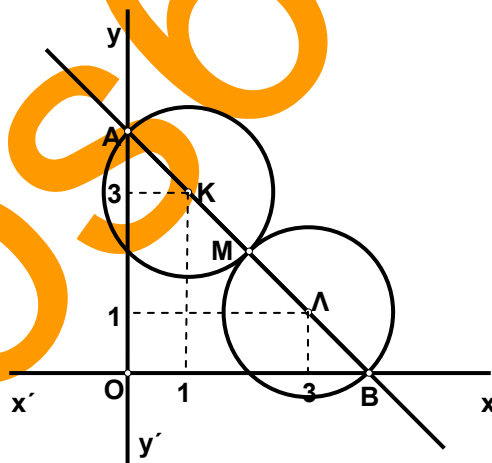
άρα οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά,

δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w , έτσι ώστε $z = w$

(στο σχήμα η εικόνα τους είναι το κοινό σημείο των κυκλικών δίσκων).

ii. Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η απόσταση (AB) ,

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ίση με $2R + 2\rho = 4\sqrt{2}$.



ΘΕΜΑ 3°

α. Έστω ότι η f δεν είναι "1 - 1".

Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Από Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Ατοπο διότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι "1 - 1".

β. Τα σημεία $A(1, 2005)$, $B(-2, 1)$ είναι σημεία της C_f άρα $f(1) = 2005$ και $f(-2) = 1$.

$$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2 \text{ άρα } f(f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8))) = f(-2) \Leftrightarrow$$

$$-2004 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = 2005 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = f(1)$$

$$\text{και επειδή η } f \text{ είναι "1 - 1" θα είναι } x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

γ. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-2, 1]$

Από Θ. Μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2005 - 1}{1 + 2} = \frac{2004}{3} = 668 \text{ και } \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{668},$$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε) .

ΘΕΜΑ 4^ο

α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{f(x) - x}{x^2}$, $x \neq 0$.

Είναι $f(x) = x^2 \cdot g(x) + x$ και επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , θα είναι
 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot g(x) + x] = 0$

$$\begin{aligned} \text{ii. } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot g(x) + 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + 1 = 0 \cdot 2005 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} &= 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \lambda \frac{(f(x))^2}{x^2}}{2 \frac{x^2}{x^2} + \frac{(f(x))^2}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} &= 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2}{2 + \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2} = 3 \Leftrightarrow \\ \frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} &= 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 9 \Leftrightarrow \lambda = 8 \end{aligned}$$

γ. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.

Είναι $g'(x) = (f'(x) - f(x)) \cdot e^{-x} > 0$, διότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

- $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} < 0$ άρα $f(x) < 0$ και $x \cdot f(x) > 0$
- $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} > 0$ άρα $f(x) > 0$ και $x \cdot f(x) > 0$

Άρα $x \cdot f(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii. Είναι $f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } \int_0^1 [f'(x) - f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx < f(1).$$