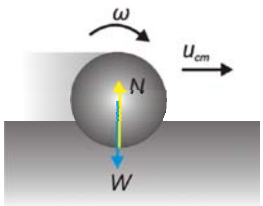
3.3.11 Δυναμική Μελέτη της Κύλισης

Νωρίτερα σε προηγούμενο κεφάλαιο της μηχανικής στερεού είχαμε ασχοληθεί με την κινηματική της κύλισης και με μερικά βασικά στοιχεία της. Τώρα θα ασχοληθούμε με την δυναμική της κύλισης όπως επίσης και με ορισμένα στοιχεία τα οποία θα είναι πολύ χρήσιμα στην βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό μου;



Σχήμα 48: Κύλιση χωρίς ολίσθηση

1η Περίπτωση:

Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή u_{cm} και σταθερή ω.

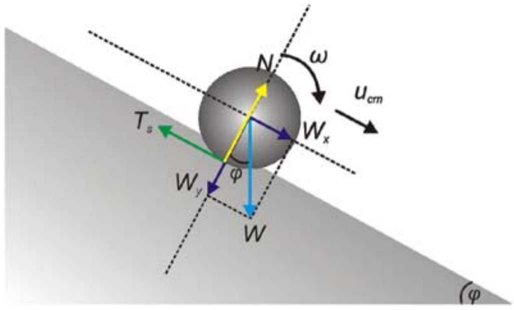
Σε αυτή την περίπτωση ο τροχός κινείται λόγω αδράνειας και υποχρεωτικά, όλες οι δυνάμεις που του ασκούνται θα πρέπει να έχουν συνισταμένη μηδέν. Αφού εμείς δεν ασκούμε καμία δύναμη στην σφαίρα αυτή θα συνεχίσει να κινείται με την ίδια ταχύτητα που είχε αρχικά. Παρατηρήστε ότι για λόγους διακρισιμότητας το βάρος και η κάθετη αντίδραση δεν έχουν σχεδιαστεί ακριβώς στον ίδιο άξονα όπως θα έπρεπε αλλά σε λίγο μετατοπισμένους άξονες. Ο αναγνώστης όταν σχεδιάζει τις δυνάμεις θα πρέπει να τις φτιάχνει πάντα στον ίδιο άξονα.

Η επιλογή του τροχού είναι τυχαία. Θα μπορούσε η εκφώνηση να αναφέρεται σε κύλινδρο, σφαίρα, δακτύλιο κλπ. Χωρίς να αλλάζει η μεθοδολογία. Η μοναδική αλλαγή που γίνεται είναι υπολογιστική και αφορά την ροπή αδράνειας του εν λόγω σώματος.

2η Περίπτωση:

Ο τροχός αφήνεται να κυλήσει σε κεκλιμένο επίπεδο

Ο τροχός τώρα κάνει σύνθετη κίνηση και το μεταφορικό κομμάτι αυτής είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Δηλαδή η u_{cm} αυξάνεται και αφού ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει κάθε χρονική στιγμή $u_{cm} = \omega R$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η γωνιακή ταχύτητα ω θα πρέπει να αυξάνεται. Ποια ροπή όμως είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας; Σίγουρα δεν μπορεί να είναι το βάρος αφού το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας του σώματος και έτσι δεν προκαλεί καμία ροπή. Το ίδιο ισχύει και για την κάθετη αντίδραση γιατί και αυτή διέρχεται από το κέντρο μάζας. Η μοναδική δύναμη που μας έχει απομείνει είναι η τριβή, η οποία θα πρέπει να έχει τέτοια φορά ώστε να προκαλεί ροπή που αυξάνει την γωνιακή ταχύτητα:



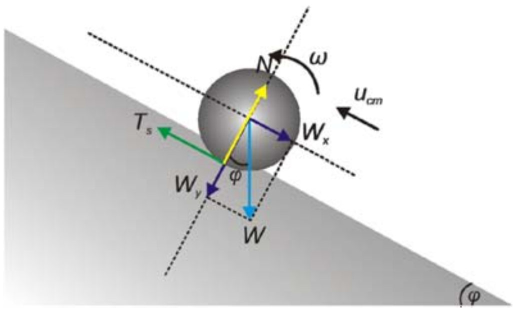
Σχήμα 49: Κάθοδος σε κεκλιμένο επίπεδο

3η Περίπτωση:

Ο τροχός ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο

Ο τροχός και τώρα κάνει σύνθετη κίνηση και το μεταφορικό κομμάτι αυτής είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Δηλαδή η u_{cm} ελαττώνεται και αφού ο τροχός κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει κάθε χρονική στιγμή $u_{cm} = \omega R$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η γωνιακή ταχύτητα ω θα πρέπει να ελαττώνεται. Ποια ροπή όμως είναι αυτή τη φορά υπεύθυνη για την μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας; Όπως πολύ σωστά μπορεί να μαντέψατε είναι πάλι η τριβή η οποία θα έχει τέτοια φορά ώστε να επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση. Η φορά αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Μεγάλη προσοχή στην θετική φορά. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε θέσει ως θετική την φορά της κίνησης είτε αυτή είναι ανοδική είτε καθοδική. Ο αναγνώστης μπορεί να επιλέξει την δική του θετική φορά αρκεί η θετική φορά της περιστροφικής κίνησης να «παράγει» την θετική φορά της μεταφορικής κίνησης.

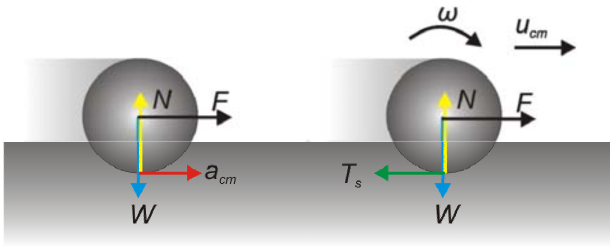


Σχήμα 50: Άνοδος σε κεκλιμένο επίπεδο

4η Περίπτωση:

Ο τροχός κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και ασκούμε δύναμη στο κέντρο μάζας, κατά την διεύθυνση της κίνησης

Είναι προφανές ότι αφού η δύναμη που ασκούμε διέρχεται από το κέντρο μάζας του τροχού, δεν είναι δυνατόν να του προκαλέσει ροπή άρα θα πρέπει να υπάρχει και κάποια άλλη δύναμη η οποία να μπορεί να προκαλέσει ροπή. Σωστά υποπτευθήκατε! Η δύναμη αυτή είναι η τριβή, η φορά της οποίας μπορεί να βρεθεί με τον εξής συλλογισμό βλέποντας το παρακάτω σχήμα:

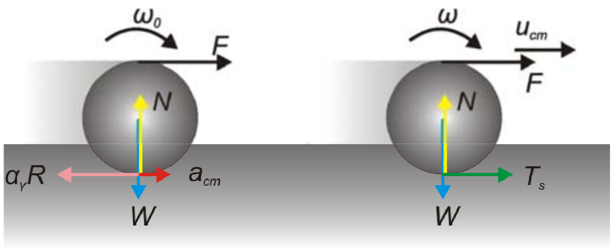


Σχήμα 51: Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε τις δυνάμεις στο σώμα χωρίς την τριβή. Παρατηρήστε στο κατώτερο σημείο την απουσία γωνιακής επιτάχυνσης. Στο σχήμα δεξιά βλέπουμε και τη φορά της στατικής τριβής

Αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κάθε χρονική στιγμή, η ταχύτητα του κατώτερου σημείου, του κάθε σημείου που έρχεται σε επαφή θα πρέπει να είναι μηδενική. Επειδή αυτή η συνθήκη θα πρέπει να ισχύει κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει και η επιτρόχια επιτάχυνση να είναι μηδενική. Όπως βλέπουμε όμως από το σχήμα 51 χωρίς την τριβή η επιτάχυνση του σημείου αυτού είναι ίση με a_{cm}. Άρα η τριβή θα έχει τέτοια κατεύθυνση ώστε «να επαναφέρει την τάξη» δηλαδή με φορά αντίθετη προς την επιτάχυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα 51.

5η Περίπτωση:
Ο τροχός κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και ασκούμε δύναμη κατά την διεύθυνση της κίνησης όχι στο κέντρο μάζας

Τώρα τα πράγματα γίνονται πιο ενδιαφέροντα αφού η δύναμη που ασκείται εκτός από την μεταφορική επιτάχυνση προκαλεί και ροπή, δηλαδή και στροφική επιτάχυνση. Το ερώτημα που τίθεται είναι το κατά πόσο αυτή η δύναμη είναι ικανή από μόνη της να διατηρήσει την κύλιση χωρίς ολίσθηση. Αυτό εξαρτάται από το σημείο εφαρμογής και την κατεύθυνση της δύναμης (εδώ θεωρούμε ότι είναι σύμφωνα με την κατεύθυνση κίνησης) όπως επίσης και από το τι στερεό έχουμε κύλινδρο, σφαίρα, κλπ. Έτσι καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να έχουμε πολλές περιπτώσεις. Το σημαντικό είναι ότι η μεθοδολογία που ακολουθούμε σε κάθε περίπτωση είναι η ίδια. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε έναν τροχό με ροπή αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$ και ότι η δύναμη ασκείται στο ανώτερο σημείο του όπως στο σχήμα 52:



Σχήμα 52: Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε τις δυνάμεις στο σώμα χωρίς την τριβή. Παρατηρήστε στο κατώτερο σημείο τις δύο επιταχύνσεις. Στο σχήμα δεξιά βλέπουμε και την φορά της στατικής τριβής

Αν δεν υπήρχε η τριβή… Το κατώτερο σημείο θα είχε επιτάχυνση a_{cm} λόγω της μεταφορικής του κίνησης και $a_E=\alpha_\gamma R$ λόγω της περιστροφικής κίνησης του στερεού. Έτσι θα έχουμε για την μεταφορική: $\sum F = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{F}{m}$ ενώ για την περιστροφική θα έχουμε:

$$\sum \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow F \cdot R = I\alpha_\gamma \Rightarrow F \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \alpha_\gamma \Rightarrow$$

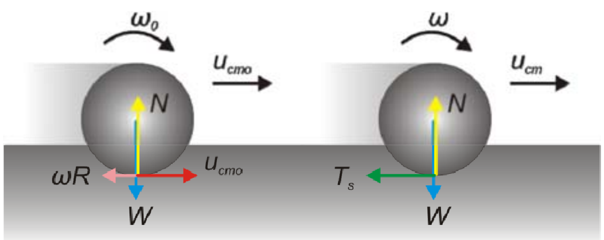
$$\alpha_\gamma R = \frac{2F}{m}$$

Παρατηρούμε ότι χωρίς την τριβή η εφαπτομενική επιτάχυνση στο κατώτερο σημείο είναι μεγαλύτερη από την a_{cm}. Άρα η τριβή θα έχει τέτοια κατεύθυνση ώστε να μειώσει την εφαπτομενική επιτάχυνση, δηλαδή θα είναι προς τα δεξιά.

6η Περίπτωση:

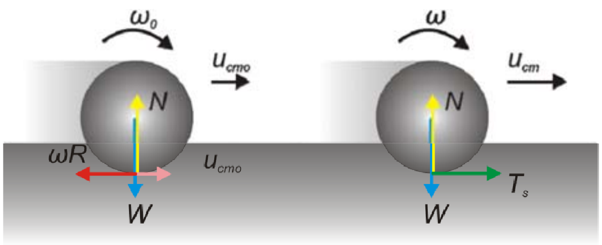
Κύλιση με ολίσθηση

Στην περίπτωση που έχουμε κύλιση με ολίσθηση το σώμα έχει μία αρχική ταχύτητα u_{cm0} μεταφορικά και μία αρχική ω_0. Οι δύο αυτές ταχύτητες δεν συνδέονται από την γνωστή πια σχέση $u_{cm0}=\omega_0 R$ αλλά μία από τις δύο ταχύτητες είναι μεγαλύτερη με αποτέλεσμα είτε ο τροχός να «σπινιάρει» είτε να «πατινάρει». Ας δούμε όμως τις περιπτώσεις στα παρακάτω σχήματα



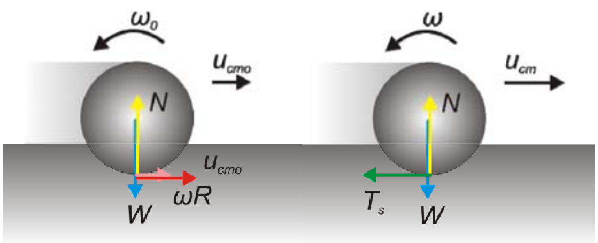
Σχήμα 53: Κύλιση με ολίσθηση. Η αρχική ταχύτητα u_{cm0} είναι μεγαλύτερη από την $\omega_0 R$

Όπως έχουμε πει από την πρώτη φορά που συζητήσαμε την κύλιση, η ταχύτητα του σημείου που είναι σε επαφή με το έδαφος θα πρέπει να είναι μηδέν. Η τριβή θα έχει τέτοια φορά ώστε να μειώσει την μεταφορική ταχύτητα και να αυξήσει την περιστροφική. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τριβή που έχουμε σε αυτή την περίπτωση είναι τριβή ολίσθησης.



Σχήμα 54: Κύλιση με ολίσθηση. Η αρχική ταχύτητα u_{cm0} είναι μικρότερη από την $\omega_0 R$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε το ίδιο φαινόμενο αλλά η τριβή θα έχει τέτοια φορά ώστε να μειώσει την περιστροφική ταχύτητα και να αυξήσει την μεταφορική. Ο τρόπος σχεδιασμού της τριβής είναι ο ίδιος.



Σχήμα 55: Κύλιση με ολίσθηση. Η γωνιακή ταχύτητα και η u_{cm} στο κατώτερο σημείο έχουν την ίδια φορά!

Στο σχήμα 55 βλέπουμε μια ιδιαίτερη περίπτωση κύλισης με ολίσθηση την οποία συναντούμε και στο μπιλιάρδο. Είναι το χτύπημα της μπάλας με χαμηλά «φάλτσα» ώστε η μπάλα να κάνει την κίνηση που φαίνεται στο σχήμα.

Γενικότερα θα ασχοληθούμε κυρίως με κύλιση χωρίς ολίσθηση στα προβλήματά μας και απλά θα κοιτάξουμε λίγο την κύλιση με ολίσθηση.

Ανακεφαλαιώνοντας όταν ένα σώμα κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύουν:

Ας μην ξεχνάμε ότι στην χειρότερη περίπτωση, που ο αναγνώστης δεν θυμάται όλη την διαδικασία μπορεί να επιλέξει μια φορά για την τριβή, στην τύχη και να επιλύσει το πρόβλημα. Μεγάλη προσοχή χρειάζεται στην επιλογή της θετικής φοράς τόσο για την στροφική όσο και για την μεταφορική κίνηση όπως έχουμε πει άλλωστε.

$$u_{cm} = \omega R$$
$$a_{cm} = \alpha_{\gamma} R$$
$$u_{A} = 0$$
$$T = T_{\sigma\tau\alpha\tau\iota\kappa\eta}$$

Αφού λοιπόν είδαμε το πώς σχεδιάζουμε σωστά την τριβή σε κάθε περίπτωση ας δούμε τα πλαίσια στα οποία κινούμαστε για να λύσουμε ένα πρόβλημα κύλισης.

1. *Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις:* Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε και με όλα αυτά που έχουν αναφερθεί ο σχεδιασμός των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, ακόμα και της τριβής δεν είναι δύσκολος!
2. *Αναλύουμε* όποιες δυνάμεις χρειάζεται σε συνιστώσες και βρίσκουμε τις τιμές τους
3. *Επιλέγουμε θετική φορά* για την στροφική και για την μεταφορική κίνηση σύμφωνα με όλα αυτά που έχουμε πει προηγουμένως.
4. *Γράφουμε τους νόμους του Νεύτωνα* για την μεταφορική κίνηση σε κάθε άξονα χωριστά, δηλαδή $\sum F = ma_{cm}$ για την επιταχυνόμενη κίνηση και $\sum F = 0$ αν σε αυτό τον άξονα το σώμα ισορροπεί δηλαδή αν ακινητεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.
5. *Γράφουμε την θεμελιώδη σχέση* για την στροφική κίνηση δηλαδή $\sum \tau = I\alpha_{\gamma}$, προσέχοντας πολύ την ροπή αδράνειας που μας δίνεται από την εκφώνηση. Αν έχουμε σύστημα σωμάτων που κυλίεται ενδεχομένως να χρειάζεται να την προσδιορίσουμε από την αρχή, ή αν η ροπή αδράνειας που μας δίνεται δεν είναι αυτή του άξονα περιστροφής θα χρειαστεί θεώρημα Steiner.
6. *Αν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα σώμα κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση* τότε ο συνηθέστερος τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από τα δεδομένα και να αποδείξουμε ότι η τριβή είναι στατική, δηλαδή $T \leq \mu N$.

Από πλευράς τεχνικής θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν πρέπει να λύνουμε τις εξισώσεις της ΜΤΦΡ κίνησης μέχρι τα ζητούμενα γιατί υπάρχουν και οι εξισώσεις της στροφικής κίνησης και η διαδικασία επίλυσης γίνεται δύσκολη. Καλύτερα να προχωράμε τις σχέσεις μέχρι ενός σημείου και στο τέλος να κάνουμε τους απαραίτητους συνδυασμούς!

Σχόλιο:

Οι περιπτώσεις που εξετάζουμε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αφορούν την κύλιση χωρίς ολίσθηση και θεωρούμε ότι τα σώματα συμμετέχουν σε αυτή την κίνηση. Είναι προφανές ότι στον πραγματικό κόσμο είναι σχεδόν απίθανο να πετύχουμε τέτοιου είδους κινήσεις, μόνο να τις προσεγγίζουμε. Στα πλαίσια όμως της Γ Λυκείου όταν η εκφώνηση λέει ότι το σώμα κάνει κύλιση (χωρίς ολίσθηση) είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι το σώμα κάνει την κίνηση αυτή και μάλιστα **συντρέχουν όλες οι**

προϋποθέσεις που χρειάζονται για να γίνει αυτή η κίνηση κι ας μας οδηγεί σε αποτελέσματα που μπορεί εκ πρώτης όψεως να μας φαίνονται «περίεργα»!

Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα για να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία πιο συγκεκριμένα.

Παράδειγμα 16

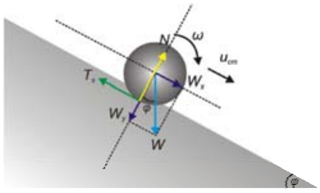
Μία συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει από την κορυφή ενός κεκλιμένου επίπεδου, μήκους S και γωνίας θ. Το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο , ενώ καμία στιγμή δεν υπάρχει κίνδυνος να ολισθήσει η σφαίρα. Αν η ροπή αδράνειας συμπαγούς και ομογενούς σφαίρας ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g, να βρεθούν:

Α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας
Β. Ποιος είναι ο συντελεστής οριακής τριβής ώστε το σώμα να κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση;
Γ. Πόσο χρόνο κάνει η σφαίρα να κατέβει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου;
Δ. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας την στιγμή που φτάνει στην βάση;

<u>Απάντηση</u>

Α.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό είναι το βάρος του, η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο και η τριβή. Οι δυνάμεις αυτές φαίνονται στο δίπλα σχήμα.



Σχήμα 56

Θεωρούμε ως θετική φορά την φορά της κίνησης τόσο της μεταφορικής όσο και της περιστροφικής. Με αυτά τα δεδομένα θα έχουμε:

$$W_x = mg\eta\mu\theta \text{ και } W_y = mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

Για την μεταφορική κίνηση:

$$\sum F = m\alpha_{cm} \Rightarrow W_x - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{mg\eta\mu\theta - T = m\alpha_{cm}} \quad (1)$$

Για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow T\cancel{R} = \frac{2}{5}mR^{\cancel{2}}\alpha_\gamma \Rightarrow \boxed{T = \frac{2}{5}mR\alpha_\gamma} \quad (2)$$

αφού όμως η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι

$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ άρα η (2) γίνεται $T = \frac{2}{5}mR\alpha_\gamma \Rightarrow T = \frac{2}{5}m\alpha_{cm}$ (3)

και αν αντικαταστήσουμε στην (1) την (3) θα έχουμε:

$$mg\eta\mu\theta - \frac{2}{5}m\alpha_{cm} = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\theta = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} + m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\cancel{m}g\eta\mu\theta = \frac{7}{5}\cancel{m}\alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = \frac{5}{7}g\eta\mu\theta}$$