Τα κοινα σημεία τως γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων

Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ μία αντιστρέψιμη συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει

$$D(f) \cap D(f^{-1}) \neq \emptyset$$

Έστω επίσης $x_0 \in D(f) \cap D(f^{-1})$.

Θα προσδιορίσουμε ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις f, f^{-1} να είναι ίσες στο σύνολο Α=$\{x_0\}$. Η συνάρτηση f απεικονίζει το x_0 στο $f(x_0)$.Επειδή περιορίσαμε την f στο σύνολο $A = \{x_0\}$ τότε απο τον ορισμό της αντίστροφης,η συνάρτηση f^{-1} περιορίζεται υποχρεωτικά στο σύνολο $f\left(A\right) = \{f(x_0)\}$[1]. Επομένως οι ύο αντίστροφες συναρτήσεις είναι μεταξύ τους ίσες αν και μόνο αν $x_0 = f(x_0)$.

Αλλά η ισότητα των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο σύνολο $A = \{x_0\}$ είναι ταυτόσημη με το γεγονός ότι το σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ ή $M(x_0, x_0)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων.

Συμβολίζουμε με K την ένωση των μονοσυνόλων $B = \{x_0\}$με $x_0 \in D(f) \cap D(f^{-1})$ στα οποία οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις είναι ίσες.Προφανώς είναι

$$K = \{x \in D(f) : f(x) = x\}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Το σύνολο $K = \{x \in D(f) : f(x) = x\}$ έχει τις ιδιότητες:
   - $K \subseteq D(f) \cap D(f^{-1})$
   - $f(x) = f^{-1}(x) = x \;\; \forall x \in K$
   - Είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $D(f) \cap D(f^{-1})$ στο οποίο οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις είναι ίσες.

2. Το σύνολο των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι το
$$C_K = \{M(x, f(x)) : x \in K\} = \{M(x, x) : x \in K\}$$

3. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων βρίσκονται μόνο πάνω πάνω στη διχοτόμο $y = x$

4. $K = D(f) \Leftrightarrow f(x) = x \;\; \forall x \in K = D(f)$ που σημαίνει ότι η μόνη συνάρτηση που είναι ίση με την αντίστροφή της είναι η ταυτοτική.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

Το θέμα της αντιστροφής μιας συνάρτησης είναι ένα πρόβλημμα γραμμικού μετασχηματισμού του συνόλου $\mathbb{R}^2$ με πίνακα μετασχηματισμού τον

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] **Αυτό συμβαίνει διότι πρέπει και οι δύο περιορισμοί να είναι αντίστροφες μεταξύ τους συναρτήσεις.**

Συγκεκριμένα πρόκειται για τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (y,x) \in \mathbb{R}^2$$

Το σύνολο των αναλλοίωτων σημείων του μετασχηματισμού είναι το $K = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ [2].Προφανώς τα στοιχεία του συνόλου αυτού απεικονίζονται στα σημεία της ευθείας $y = x$.Αυτό σημαίνει ότι τα ανναλοίωτα σημεία των συνόλων $C_f, C_{f^{-1}}$[3] είναι αυτά για τα οποία ισχύει $(x, f(x)) \in K$,δηλαδή είναι $f(x) = x$ που σημαίνει ότι ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

[2] Αυτό φαίνεται αμέσως αν σκεφτούμε ποιά είναι τα σημεία του επιπέδου που δεν μεταβάλλονται από τον μετασχηματισμό.Είναι ακριβώς εκείναι που έχουν ίσες συντεταγμένες.

[3] Δηλαδή των γραφικών παραστάσεων των f, f^{-1}