Έχεις το ολοκλήρωμα $I = \int e^{x^2}(x^3 + x)dx$. Το πρώτο πράγμα που θα μπορούσες να κάνεις, είναι να κάνεις την επιμεριστική και να σπάσεις το ολοκλήρωμα για να δεις τι θα πάρεις. Έχουμε λοιπόν:

$$I = \int e^{x^2}\left(x^3 + x\right)dx = \int\left(e^{x^2}x^3 + e^{x^2}x\right)dx = \int e^{x^2}x^3dx + \int e^{x^2}xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (e^{x^2}2x)x^2dx + \frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx \quad (1)$$

Σπάσαμε λοιπόν το ολοκλήρωμα σε δυο, τα οποία ελπίζουμε να τα φέρουμε σε μια από τις γνωστές μορφές. Αν δεις το πρώτο ολοκλήρωμα, έχεις $\frac{1}{2}\int (e^{x^2}2x)x^2dx$. Εδώ θα δουλέψεις με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έχεις τη σύνθετη συνάρτηση e^{x^2} και τη παράγωγο της x^2, άρα υποψιάζεσαι λίγο πολύ τι πρέπει να κάνεις. Έχεις λοιπόν:

$$\frac{1}{2}\int (e^{x^2}2x)x^2dx = \frac{1}{2}\int (e^{x^2})'x^2dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 + \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 + \frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - \frac{1}{2}\int (e^{x^2})'dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} + c = \frac{1}{2}(e^{x^2}x^2 - e^{x^2}) + c \quad (2)$$

Σου έχει μείνει λοιπόν το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (1), το $\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx$. Ε, αυτό είναι πολύ εύκολο, καθώς έχεις το αόριστο ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης, δηλαδή το ολοκλήρωμα αυτό είναι:

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx = \frac{1}{2}\int (e^{x^2})'dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \quad (3)$$

Η (1) λοιπόν, με τη βοήθεια της (2) και της (3), σου δίνει τελικά:

$$I = \frac{1}{2}(e^{x^2}x^2 - e^{x^2}) + \frac{1}{2}e^{x^2} + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Μπορείς εύκολα να αποφανθείς την ορθότητα της λύσης σου παραγωγίζοντας το αποτέλεσμά σου. Αν σου βγει η ολοκληρωτέα συνάρτηση που έχεις στην αρχή, βρήκες το σωστό αποτέλεσμα.

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2}x^2 + c\right)' = \frac{1}{2}(e^{x^2}\cdot 2x\cdot x^2 + e^{x^2}\cdot 2x) = \frac{1}{2}(2e^{x^2}x^3 + 2e^{x^2}x) = e^{x^2}(x^3 + x)$$