ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θέμα 1^o (ΜΑΪΟΣ 2004 , ΜΑΪΟΣ 2008)
Να δείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $(c)' = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$ είναι
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \cdot$$
Άρα $(c)' = 0$.

Θέμα 2^o (ΙΟΥΛΙΟΣ 2002 , ΜΑΪΟΣ 2003 , ΙΟΥΛΙΟΣ 2007)
Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $(x)' = 1$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$ και για $h \neq 0$ είναι
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$
Άρα $(x)' = 1$.

Θέμα 3^o
Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $(x^2)' = 2x$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h \cdot (2x+h)$
και για $h \neq 0$ είναι
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x \cdot$$
Άρα $(x^2)' = 2x$.

Θέμα 4^o (ΙΟΥΛΙΟΣ 2001 , ΜΑΪΟΣ 2006)
Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $c \cdot f(x)$ είναι $c \cdot f'(x)$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$.
Έχουμε $F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c \cdot [f(x+h) - f(x)]$
και για $h \neq 0$ είναι
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$
Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

Θέμα 5ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2000 , ΙΟΥΛΙΟΣ 2005)
Αν f , g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ είναι $f'(x) + g'(x)$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.
Έχουμε
$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]$$
$$= f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)$$
$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$
και για $h \neq 0$ είναι
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h) - f(x)\right] + \left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$
Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

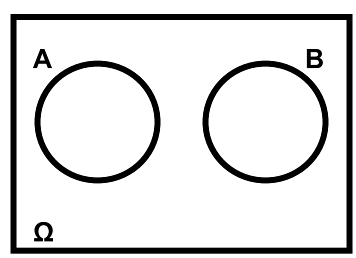
Θέμα 6ο (ΜΑΪΟΣ 2002)
Να δείξετε ότι για τη σχετική συχνότητα f_i ενός δείγματος μεγέθους ν ισχύουν οι ιδιότητες:
α) $0 \leq f_i \leq 1$, για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$,
β) $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.

Απόδειξη

α) $0 \leq \nu_i \leq \nu \Leftrightarrow \frac{0}{\nu} \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq \frac{\nu}{\nu} \Leftrightarrow 0 \leq f_i \leq 1$

β) $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$

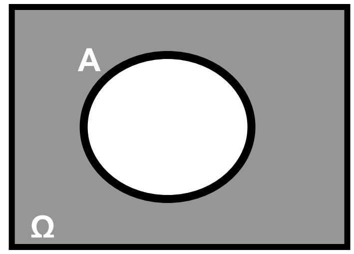
Θέμα 7ο (ΜΑΪΟΣ 2002)
Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



Απόδειξη

Αν $N(A) = \kappa$, $N(B) = \lambda$ και επειδή τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, δηλαδή $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.
Επομένως
$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

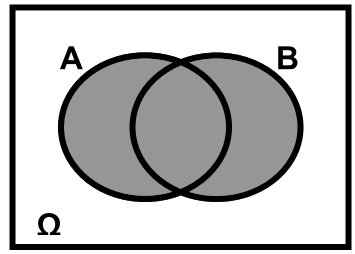
Θέμα 8ο (ΙΟΥΛΙΟΣ 2003, ΙΟΥΛΙΟΣ 2006)
Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$.



<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, τα A, A' είναι ασυμβίβαστα και ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος $P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow$
$1 = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$.

Θέμα 9ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000 , ΜΑΪΟΣ 2005)
Να δείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

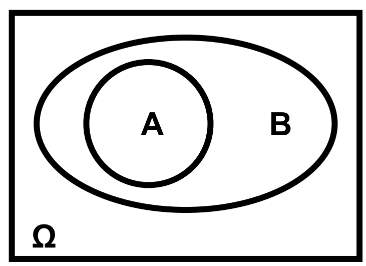


<u>Απόδειξη</u>

Για δύο ενδεχόμενα A και B έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δύο φορές. Επομένως

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

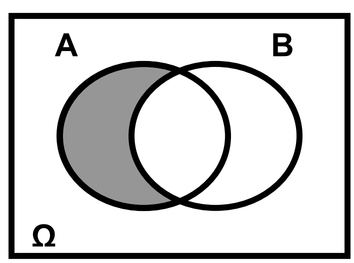
Θέμα 10ο (ΙΟΥΛΙΟΣ 2004)
Να δείξετε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.



<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά
$$N(A) \leq N(B) \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) \leq P(B).$$

Θέμα 11ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2001, ΜΑΪΟΣ 2007)
Να δείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω ισχύει
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.



<u>Απόδειξη</u>

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και
$(A - B) \cup (A \cap B) = A$ εφαρμόζουμε απλό προσθετικό νόμο.
$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Μια συνάρτηση f είναι ***συνεχής σ' ένα σημείο x_0*** του πεδίου ορισμού της όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ*** του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ*** του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ*** του πεδίου ορισμού της όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.
- Μια συνάρτηση f παρουσιάζει ***τοπικό μέγιστο σ' ένα σημείο x_0*** του πεδίου ορισμού της A, όταν για κάθε x σε μια περιοχή του x_0, ισχύει $f(x) \le f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση f παρουσιάζει ***τοπικό ελάχιστο σ' ένα σημείο x_0*** του πεδίου ορισμού της A, όταν για κάθε x σε μια περιοχή του x_0, ισχύει $f(x) \ge f(x_0)$.
- ***Ακρότατο μιας συνάρτησης f***, λέγεται οποιοδήποτε μέγιστο ή ελάχιστο της f.
- ***Παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0***, λέγεται το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, εφόσον αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Συμβολίζεται με $f'(x_0)$.
- ***Ρυθμός μεταβολής*** του $y = f(x)$ ως προς το x όταν $x = x_0$, λέγεται η παράγωγος της f στο x_0.
- ***Συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης*** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, είναι η $f'(x_0)$, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = εφω$.
- Η ***ταχύτητα ενός κινητού*** που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, θα δίνεται τη χρονική στιγμή t_0 από τη συνάρτηση $υ(t_0) = f'(t_0)$.
- Η ***επιτάχυνση ενός κινητού*** που κινείται ευθύγραμμα και ταχύτητά του εκφράζεται από τη συνάρτηση $υ = g(t)$, θα δίνεται τη χρονική στιγμή t_0 από τη συνάρτηση $α(t_0) = g'(t_0)$.

- ***Παράγωγος συνάρτηση της f***, λέγεται η συνάρτηση f', με τύπο $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, εφόσον το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
- ***Δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f***, λέγεται η παράγωγος της πρώτης παραγώγου f' και συμβολίζεται με f''.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

- ***Πληθυσμός*** λέγεται ένα σύνολο, τα στοιχεία του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.
- ***Μεταβλητή*** ενός πληθυσμού ονομάζεται ένα χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζεται ο πληθυσμός.
- ***Τιμές της μεταβλητής*** λέγονται τα δυνατά αποτελέσματα της μεταβλητής.
- ***Ποιοτικές*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους είναι λέξεις ή φράσεις (δεν είναι αριθμοί).
- ***Ποσοτικές*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους είναι αριθμοί.
- ***Ποσοτικές διακριτές*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τις οποίες παίρνουν είναι «μεμονωμένες».
- ***Ποσοτικές συνεχείς*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους παίρνουν οποιαδήποτε τιμή σ’ ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.
- ***Απογραφή*** λέγεται η εξέταση όλων των ατόμων του πληθυσμού ως προς τα χαρακτηριστικά που μας ενδιαφέρουν.
- ***Δείγμα*** λέγεται μια μικρή ομάδα του πληθυσμού.
- ***Δειγματοληψία*** λέγεται η διαδικασία της επιλογής αντιπροσωπευτικού δείγματος για ένα πληθυσμό ώστε να περιορίσουμε όσο είναι δυνατόν τα σφάλματα στα συμπεράσματα μας.
- ***Συχνότητα ή απόλυτη συχνότητα v_i*** της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος v λέγεται ο φυσικός αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής X στο σύνολο v των παρατηρήσεων.
- ***Σχετική συχνότητα f_i*** της τιμής x_i που έχει συχνότητα v_i, λέγεται ο αριθμός $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, ..., \kappa$ με $\kappa \leq v$.
- ***Κατανομή συχνοτήτων*** λέγεται το σύνολο των ζευγαριών (x_i, v_i).

- ***Κατανομή σχετικών συχνοτήτων*** λέγεται το σύνολο των ζευγαριών (x_i , f_i).
- ***Αθροιστική συχνότητα N_i*** της τιμής x_i είναι ο αριθμός $N_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i$ για $i = 1 , 2 , \ldots , \kappa$, αρκεί οι τιμές $x_1 , x_2 , \ldots , x_\kappa$ $(\kappa \le v)$ της μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v να είναι σε αύξουσα διάταξη.
- ***Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i*** της τιμής x_i είναι ο αριθμός $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ για $i = 1 , 2 , \ldots , \kappa$, αρκεί οι τιμές $x_1 , x_2 , \ldots , x_\kappa$ $(\kappa \le v)$ της μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v να είναι σε αύξουσα διάταξη.
- ***Κλάση*** είναι ένα διάστημα κλειστό στο αριστερό άκρο και ανοικτό στο δεξί άκρο. Τα άκρα της κλάσης λέγονται ***όρια της κλάσης***.
- ***Κεντρική τιμή κλάσης ή κέντρο κλάσης*** λέγεται η τιμή $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ με α , β τα άκρα της κλάσης.
- ***Πλάτος της κλάσης*** $[\alpha , \beta)$ λέγεται η διάφορα $\beta - \alpha$.
- ***Καμπύλη συχνοτήτων***
  Όταν ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος τότε το πλάτος των κλάσεων γίνεται πολύ μικρό και το πολύγωνο συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας καμπύλης που ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων.
- $\bar{x} = \dfrac{\sum t_i}{v}$ ή $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v}$ ή $\bar{x} = \sum x_i f_i$.
- ***Σταθμικός μέσος*** $\bar{x}$
  Όταν οι τιμές xi μιας μεταβλητής έχουν διαφορετική βαρύτητα χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο
  $$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_\kappa \cdot w_\kappa}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\kappa} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$$
  όπου $w_1, w_2, \ldots , w_\kappa$ οι συντελεστές βαρύτητας.
- ***Διάμεσος δ*** σε *ποσοτικές διακριτές μεταβλητές,* που το μέγεθος v των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, λέγεται η "*μεσαία*" παρατήρηση, αν τοποθετήσουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά.
- ***Διάμεσος δ*** σε *ποσοτικές διακριτές μεταβλητές* που το μέγεθος v των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, είναι το ημιάθροισμα των δυο "μεσαίων" παρατηρήσεων, αν τοποθετήσουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά.

- Τα ***μέτρα διασποράς*** είναι κάποια μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.
- Τα κυριότερα μέτρα διασποράς είναι :
  - το εύρος ή κύμανση R,
  - η διακύμανση ή διασπορά s^2,
  - η τυπική απόκλιση s,
  - ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας CV.
- ***Εύρος ή κύμανση R*** ενός συνόλου παρατηρήσεων ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση.
- ***Διακύμανση ή διασπορά s^2***

$$s^2 = \frac{\sum (t_i - \bar{x})^2}{\nu} \quad ή \quad s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu}$$

- ***Τυπική απόκλιση*** $s = \sqrt{s^2}$
- ***Συντελεστής μεταβλητότητας*** ή ***συντελεστής μεταβολής***

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$$

- Ένα δείγμα Α θα λέμε ότι *είναι **πιο ομοιογενές** από το* δείγμα *Β,* όταν $CV_A < CV_B$.
- Ένα δείγμα θα λέγεται ***ομοιογενές,*** όταν $CV \leq 10\%$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- ***Πείραμα τύχης*** ονομάζουμε κάθε πείραμα που είναι δυνατό να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.
- ***Δειγματικός χώρος*** ενός πειράματος τύχης λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος και συμβολίζεται με Ω.
- ***Ενδεχόμενο*** ή ***γεγονός*** πειράματος τύχης λέγεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
- ***Απλό ενδεχόμενο*** λέγεται το ενδεχόμενο όταν έχει ένα μόνο στοιχείο.
- ***Σύνθετο ενδεχόμενο*** λέγεται το ενδεχόμενο που έχει περισσότερα από ένα στοιχεία.
- ***Βέβαιο ενδεχόμενο*** ονομάζεται ο δειγματικός χώρος Ω***.***
- ***Αδύνατο ενδεχόμενο*** ονομάζεται το κενό σύνολο $\varnothing$***.***

- ***Πληθάριθμος του συνόλου Α*** λέγεται το πλήθος των στοιχείων του Α και συμβολίζεται με Ν(Α).
- ***Ασυμβίβαστα*** ή ***ξένα μεταξύ τους*** ή ***αμοιβαίως αποκλειόμενα*** λέγονται τα ενδεχόμενα που δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \varnothing$.
- ***Νόμος των μεγάλων αριθμών*** ή ***στατιστική ομαλότητα*** λέγεται το εξής συμπέρασμα :
  Όταν ένα πείραμα τύχης επαναληφθεί απεριόριστες φορές τότε η σχετική συχνότητα εμφάνισης κάθε ενδεχομένου τείνει να σταθεροποιηθεί γύρω από κάποιες σταθερές τιμές (όχι απαραίτητα τις ίδιες για κάθε ενδεχόμενο).
- ***Ισοπίθανα*** λέγονται τα ενδεχόμενα που εμφανίζονται με την ίδια σχετική συχνότητα.
- ***Κλασικός ορισμός της πιθανότητας (Laplace 1812)***
  Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α και συμβολίζουμε με P(A) τον αριθμό $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$
- ***Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας***
  Έστω $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_\nu \}$ ένας δειγματικός χώρος με ν στοιχεία. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο ω_i αντιστοιχίζουμε τον πραγματικό αριθμό $P(\omega_i)$ τον οποίο ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου ω_i και για τον οποίο ισχύουν :
  - $0 \le P(\omega_i) \le 1$,
  - $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_\nu) = 1$,
  - αν $A = \{ \alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_\kappa \} \neq \varnothing$ ένα ενδεχόμενο του Ω σαν πιθανότητα του Α ορίζουμε το άθροισμα
  - $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_\kappa)$.
- ***Απλός προσθετικός νόμος***
  Για τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ***Προσθετικός νόμος***
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$