ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ
(Θετικής-Τεχνολογικής κατεύθυνσης)

1. Υλικό σημείο, μάζας m=10g εκτελεί απλή, αρμονική ταλάντωση, με ρυθμό 120 ταλ./min. Η μέγιστη (απόλυτη) τιμή του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι 16m/s^2 και για 1^η φορά το υλικό σημείο αποκτά τιμή ίση με το μισό αυτής τη χρονική στιγμή t=1/16s και ενώ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του. Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Αν τη στιγμή t=1/16s ασκήσουμε στιγμιαία δύναμη στο υλικό σημείο, κατά τη διεύθυνση της ταλάντωσής του, έτσι ώστε να ελαττωθεί το μέτρο της ορμής του κατά 50%, πόσο θα είναι το νέο πλάτος της ταλάντωσης;

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του υλικού σημείου τη στιγμή αμέσως μετά την άσκηση της στιγμιαίας δύναμης του ερωτήματος β).

Δίνεται: π^2=10.

Λύση:

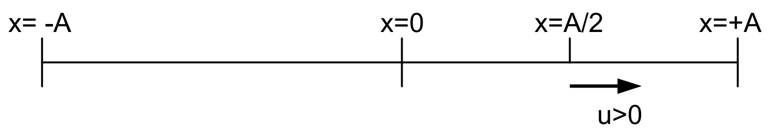
α) Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής x=Αημ(ωt+φ$_o$) (1)

Εύκολα βρίσκουμε ότι: $f = \frac{N}{t} = \frac{120\tau\alpha\lambda.}{60s} = 2Hz$ άρα ω=2πf=4π r/s (2)

Επίσης, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή η επιτάχυνση του υλικού σημείου, έχει μέγιστη τιμή $α_{max}=ω^2A$, από την οποία βρίσκουμε ότι $A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} = \frac{16m/s^2}{16\pi^2 r/s^2} = 0{,}1m$ (3)

Οταν το υλικό σημείο έχει επιτάχυνση, κατ' απόλυτη τιμή ίση με το μισό της μέγιστης διέρχεται από σημείο με απομάκρυνση x=$\pm$A/2, αφού $\alpha_{max} = \omega^2 A$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) x=A/2: Τότε έχουμε υ>0, αφού το υλικό σημείο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, όπως φαίνεται στην παρακάτω απεικόνιση της ευθείας της ταλάντωσης:



Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$(1) \xrightarrow{x=A/2,t=1/16s} \frac{A}{2} = A\eta\mu(4\pi t + \phi_o) \rightarrow \eta\mu(4\pi\frac{1}{16} + \phi_o) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \rightarrow$$

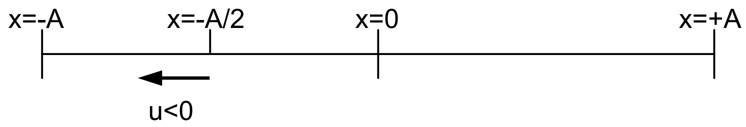
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + \phi_o = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (\alpha) \\ \frac{\pi}{4} + \phi_o = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} & (\beta) \end{cases}$$ Επειδή τη στιγμή αυτή έχουμε υ>0 θα πρέπει και

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \phi_o\right) > 0$,άρα δεκτή γίνεται η λύση (α), οπότε τελικά έχουμε:

$$\frac{\pi}{4}+\phi_o=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\rightarrow\phi_o=2\kappa\pi-\frac{\pi}{12}\xrightarrow{1\eta,\kappa=0}\phi_o=-\frac{\pi}{12}\quad(4)$$

Τελικά: $$(1)\xrightarrow{(2)(3)(4)}\boxed{x=0,1\eta\mu\left(4\pi t-\frac{\pi}{12}\right)(SI)}$$

ii) x=-A/2: Τότε έχουμε υ<0 , όπως φαίνεται και πάλι από την ευθεία της ταλάντωσης:



Η (1) γράφεται:

$$-\frac{A}{2}=A\eta\mu(4\pi t+\phi_o)\rightarrow\eta\mu(4\pi t+\phi_o)=-\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{7\pi}{6}\rightarrow\eta\mu\left(4\pi\frac{1}{16}+\phi_o\right)=\eta\mu\frac{7\pi}{6}\rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}+\phi_o=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} & (\gamma)\\ \frac{\pi}{4}+\phi_o=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} & (\delta)\end{cases}$$

Επειδή τη στιγμή αυτή έχουμε υ<0 δεκτή γίνεται η λύση (γ) (δίνει αρνητικό συνημιτόνο), οπότε:

$$\frac{\pi}{4}+\phi_o=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\xrightarrow{\kappa=0}\phi_o=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$$

Τελικά:

$$(1)\rightarrow\boxed{x=0,1\eta\mu\left(4\pi t+\frac{11\pi}{12}\right)(SI)}$$

β) Αν λόγω της στιγμιαίας εφαρμογής της δύναμης ελαττωθεί στο μισό η ορμή του υλικού σημείου (p=mυ), αυτό συνεπάγεται αντίστοιχη ελάττωση της ταχύτητας ταλάντωσης στη θέση αυτή. Ομως, στη θέση αυτή το υλικό σημείο διέρχεται με ταχύτητα

$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\frac{1}{16}-\frac{\pi}{12}\right)=4\pi\cdot0,1\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=0,4\pi\cdot\frac{1}{2}=0,2\pi\ m/s$$

ή

$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu\left(4\pi\frac{1}{16}+\frac{11\pi}{12}\right)=\omega A\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}=-\omega A\frac{1}{2}=-0,2\pi\ m/s$$

Αρα, η ταχύτητά του μετά την εφαρμογή της δύναμης θα είναι υ'=υ/2=$\pm$0,1π m/s. Το νέο πλάτος ταλάντωσης υπολογίζεται εύκολα, στη συνέχεια, με εφαρμογή της ΑΔΕΤ:

$$A\Delta ET: K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon'^2+\frac{1}{2}Dx^2=0+\frac{1}{2}DA'^2\rightarrow$$

$$m\omega^2x^2+m\upsilon'^2=m\omega^2A'^2\rightarrow A'=\sqrt{x^2+\frac{\upsilon'^2}{\omega^2}}\xrightarrow{x=\pm A/2}A'=\sqrt{(0,05)^2+\frac{0,01\pi^2}{16\pi^2}}=0,056m$$

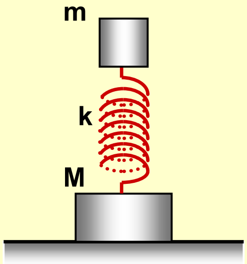
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης δίνεται απο την ακόλουθη γενική σχέση:

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}=-\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=-\frac{\sum F\cdot dx}{dt}=-\sum F\cdot u=-(-Dx)u=Dxu=m\omega^2 xu$$

Θέτοντας στην πιο πάνω σχέση x=$\pm\frac{A}{2}$ και u=u'=$\pm$ 0,1π m/s τελικά παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dt}=m\omega^2\left(\pm\frac{A}{2}\right)\upsilon'=10^{-2}kg\cdot 4\pi^2\frac{r^2}{s^2}\cdot(\pm 0,05m)\cdot\left(\pm 0,1\pi\frac{m}{s}\right)=\pm 2\pi\cdot 10^{-3}J/s$$

2. Κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς k=200N/m, έχει στο κάτω άκρο του στερεωμένο σώμα μάζας M=5kg και στο άνω άκρο του ισορροπεί επίσης στερεωμένο, άλλο σώμα μάζας m=3kg. Το σώμα μάζας M είναι τοποθετημένο σε οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Κάποια στιγμή, το σώμα μάζας m, εκρήγνυται και διασπάται σε δύο τμήματα A και B, με μάζες $m_A=2m_B$. Το τμήμα A, αμέσως μετά τη διάσπαση, παραμένει δεμένο στο ελατήριο, και κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω, συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά 10cm επιπλέον της αρχικής του συσπείρωσης. Να βρείτε:

α) Αν το σώμα μάζας M θα χάσει την επαφή του με το δάπεδο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του τμήματος A.

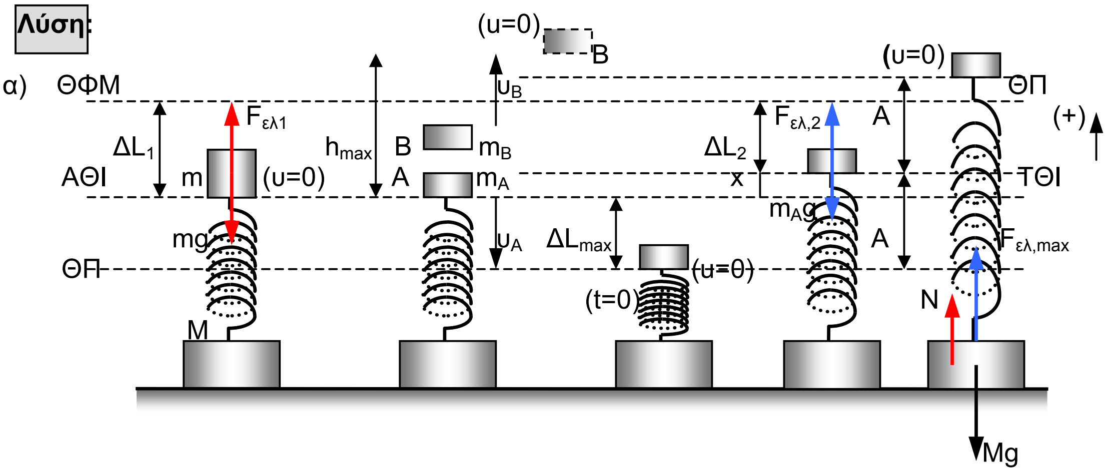
β) Το μέγιστο ύψος πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m, στο οποίο θα φτάσει το τμήμα B.

γ) Τη γραφική παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο, της δύναμης επαφής που δέχεται από το οριζόντιο δάπεδο, το σώμα μάζας M. Θεωρείστε ως χρονική στιγμή t=0 αυτή κατά την οποία το τμήμα A μηδενίζει για 1η φορά την ταχύτητά του.

Δίνεται: $g=10m/s^2$ και θετική φορά η προς τα επάνω.

Λύση:

α)



Οπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το σώμα βρίσκεται αρχικά σε μια αρχική θέση ισορροπίας (ΑΘΙ), όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά ΔL_1, το οποίο και υπολογίζουμε:

$$\sum\vec{F}=\vec{0}\rightarrow F_{\varepsilon\lambda,1}=mg\rightarrow k\Delta L_1=mg\rightarrow \Delta L_1=\frac{mg}{k}=\frac{3kg\cdot 10m/s^2}{200N/m}=0,15m$$

Μετά τη διάσπαση, το τμήμα μάζας Α θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, γύρω από μια τελική θέση ισορροπίας (ΤΘΙ), στην οποία η συσπείρωση ΔL_2 του ελατηρίου θα είναι:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,2} = m_A g \rightarrow k\Delta L_2 = m_A g \rightarrow \Delta L_2 = \frac{m_A g}{k} = \frac{2kg \cdot 10m/s^2}{200N/m} = 0{,}1m$$

Συνεπώς, έχουμε μια μετατόπιση της θέσης ισορροπίας κατά $x=\Delta L_1-\Delta L_2=0{,}05m$. Ομως, από το σχήμα είναι προφανές ότι το πλάτος ταλάντωσης Α θα είναι ίσο με $A=x+\Delta L_{max}=0{,}05m+0{,}1m=0{,}15m$.

Το σώμα μάζας Μ δέχεται από το ελατήριο τη μέγιστη δυνατή δύναμη ($F_{\varepsilon\lambda,max}$) με φορά προς τα επάνω (μόνο έτσι είναι δυνατόν να χάσει την επαφή του με το δάπεδο), όταν το σώμα μάζας m βρίσκεται στην άνω ακραία θέση (βλ. σχήμα). Τότε θα έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda,max} = k \cdot \Delta L'_{max} = k \cdot \left(A - \Delta L_2\right)^2 = 200\frac{N}{m} \cdot \left(0{,}15m - 0{,}1m\right) = 0{,}5N$$

Το σώμα θα έχανε την επαφή του με το δάπεδο αν N=0, δηλαδή αν $F_{\varepsilon\lambda,max}>Mg$, γεγονός που δεν ισχύει αφού Mg=50N, άρα δεν θα έχουμε απώλεια επαφής.

β) Υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα u_A, του τμήματος Α, αμέσως μετά τη διάσπαση, με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης (ΑΔΕΤ):

$$\text{ΑΔΕΤ}(\text{ΑΘΙ} \rightarrow \text{ΘΠ}): \frac{1}{2}m_A u_A^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \rightarrow m_A u_A^2 + kx^2 = kA^2 \rightarrow$$

$$u_A = \sqrt{\frac{k(A^2 - x^2)}{m_A}} = \sqrt{\frac{200\frac{N}{m}\left(0{,}0225m^2 - 2{,}5 \cdot 10^{-3}m^2\right)}{2kg}} = \sqrt{2}m/s$$

Στη συνέχεια, η αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ), κατά τη διάσπαση, μας δίνει την ταχύτητα u_B αμέσως μετά τη διάσπαση:

$$\text{ΑΔΟ}: \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 0 = m_A u_A - m_B u_B \rightarrow u_B = \frac{m_A u_A}{m_B} = 2u_A = 2\sqrt{2}m/s$$

Τέλος, η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) για την κίνηση του τμήματος Β μας δίνει:

$$\text{ΑΔΜΕ}: K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \frac{1}{2}m_B u_B^2 = m_B g h_{max} \rightarrow h_{max} = \frac{u_B^2}{2g} = \frac{8m^2/s^2}{20m/s^2} = 0{,}4m$$

γ) Η συνθήκη ισορροπίας για το σώμα μάζας Μ μας δίνει:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + N = Mg \rightarrow N = Mg - F_{\varepsilon\lambda} \quad (1)$$

Για το σώμα Α, όμως η συνθήκη εκτέλεσης α.α.τ μας δίνει:

$$\sum F = -Dx \rightarrow -F_{\varepsilon\lambda} - m_A g = -kx \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -m_A g + kx \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} N = Mg - \left(-m_A g + kx\right) = (M + m_A)g - kx \quad (3)$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ (4)
Η κυκλική συχνότητα ω υπολογίζεται εύκολα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A}} = \sqrt{\frac{200N/m}{2kg}} = 10r/s \quad (5)$$

Τέλος, υπολογίζουμε την αρχική φάση:

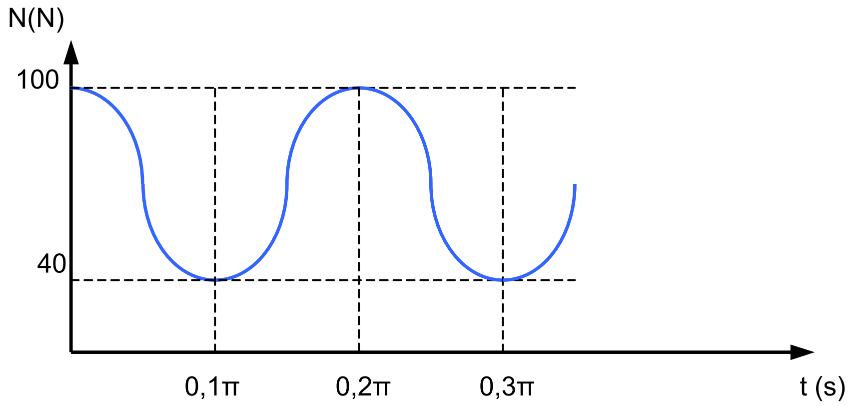
$$(4)\xrightarrow[x=-A]{t=0} -A = A\eta\mu\phi_o \rightarrow \eta\mu\phi_o = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \phi_o = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \\ \phi_o = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow[\kappa=0]{\iota\sigma o\delta} \phi_o = \frac{3\pi}{2} \quad (6)$$

$$(4)\xrightarrow{(5)(6)} x = 0,15\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)(SI)$$

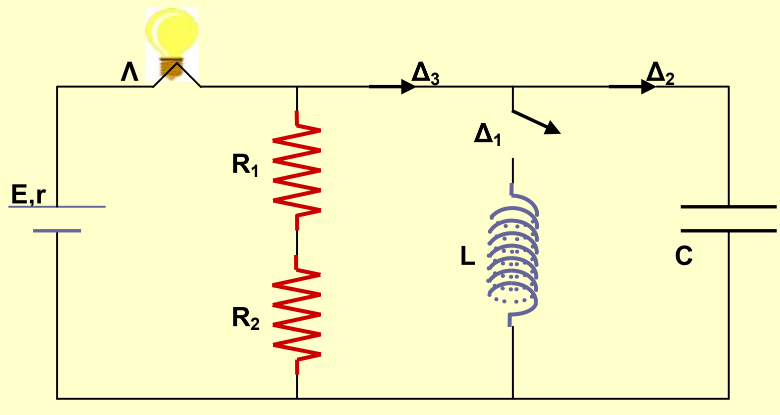
Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3) τελικά παίρνουμε:

$$N = 70 - 200 \cdot 0,15\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) = 70 - 30\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})(SI)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι η ακόλουθη:



3. Δίνεται το ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος:



Η πηγή έχει ΗΕΔ E=60V και άγνωστη εσωτερική αντίσταση r, οι αντιστάσεις έχουν τιμές R_1=8Ω και R_2=10Ω ενώ ο λαμπτήρας Λ έχει ενδείξεις κανονικής λειτουργίας ´´40V-40W´´. Το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,01H και αμελητέα εσωτερική αντίσταση και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=10mF. Αρχικά ο διακόπτης $Δ_1$ είναι ανοιχτός και οι διακόπτες $Δ_2$ και $Δ_3$ είναι κλειστοί και ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά. Τη στιγμή t=0 κλείνουμε το διακόπτη $Δ_1$ και ταυτόχρονα ανοίγουμε τον $Δ_3$. Να βρεθούν:

α) Το αρχικό φορτίο του πυκνωτή πριν το άνοιγμα του διακόπτη $Δ_3$ και η εσωτερική αντίσταση της πηγής.

β) Οι εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος που θα διαρρέει το πηνίο, σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη στιγμή t=0 και μετά.

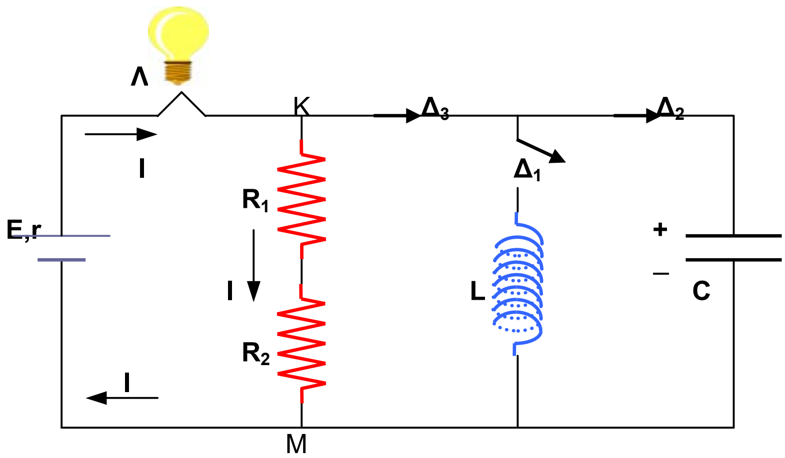
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t_1, αν στο χρονικό διάστημα από t=0 μέχρι $t=t_1$ στην αντίσταση R_1 έχει αναπτυχθεί θερμική ενέργεια ίση με 60π mJ.

δ) Η γραφική παράσταση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

ε) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, κάποια στιγμή που η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή έχει τιμή ίση με το μισό της μέγιστης δυνατής.

Λύση:

α) Με το διακόπτη $Δ_1$ ανοιχτό και τους $Δ_2$, $Δ_3$ κλειστούς , το κύκλωμα –πλην του πηνίου- διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I, όπως φαίνεται στο παρακάτω κύκλωμα (ο πυκνωτής έχει φορτιστεί με την πολικότητα που φαίνεται και λειτουργεί πλέον ως ανοιχτός διακόπτης οπότε στον κλάδο του δεν έχουμε διέλευση ρεύματος):



Υπολογίζουμε πρώτα την εσωτερική αντίσταση του λαμπτήρα Λ, από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας:

$$R_Λ = \frac{V_Λ^2}{P_Λ} = 40Ω$$

Αφού ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά, θα διαρρέεται από το ρεύμα κανονικής λειτουργίας δηλαδή θα ισχύει:

$$I = I_Λ = \frac{P_Λ}{V_Λ} = 1A$$

Οι οπλισμοί του πυκνωτή είναι συνδεδεμένοι με τα σημεία K και M του κυκλώματος, οπότε θα ισχύουν τα εξής:

$$V_c = V_{KM} = I\left(R_1 + R_2\right) = 1A \cdot 18Ω = 18V$$

Αρα, το ζητούμενο φορτίο του πυκνωτή θα είναι $Q=CV_c$=10mF 18V=180mC=0,18C

Εφαρμόζοντας, τέλος , το νόμο του Ohm στο κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{r + R_Λ + R_1 + R_2} \rightarrow r = \frac{E}{I} - R_Λ - R_1 - R_2 = 2Ω$$

β) Με το άνοιγμα του διακόπτη $Δ_3$ και το κλείσιμο του $Δ_1$ θα αρχίσει να εκτελείται αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση στο σχηματιζόμενο κύκλωμα L-C έχοντας τον πυκνωτή πλήρως φορτισμένο τη στιγμή t=0. Οι ζητούμενες εξισώσεις θα είναι της γνωστής μορφής:

$$q = Qσυνωt \ (1) \quad και \quad i = -Iημωt \ (2)$$

Υπολογίζουμε πρώτα την κυκλική συχνότητα ω:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}H \cdot 10 \cdot 10^{-3}mF}} = 100r/s \quad (3)$$

Αρα: I=ωQ=100r/s 180 10^{-3}C=18 A (4)
Τελικά έχουμε:

$$(1) \xrightarrow{(3)} q = 0{,}18\sigma\upsilon\nu 100t \ (SI)$$
$$(2) \xrightarrow{(4)} i = -18\eta\mu 100t \ \ (SI)$$

γ) Βρίσκουμε πρώτα τη χρονική στιγμή t_1, εφαρμόζοντας το νόμο του Joule στον αντιστάτη R_1:

$$W_{R_1} = I^2 R_1 t_1 \to t_1 = \frac{W_{R_1}}{I^2 R_1} = \frac{0{,}06\pi \ J}{1A^2 \cdot 8\Omega} = 7{,}5\pi \ \ ms$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την ΗΕΔ αυτεπαγωγής:

$$A\Delta ET: U_E + U_B = E = \sigma\tau\alpha\theta. \to dU_E + dU_B = 0 \to \frac{dU_E}{dt} + \frac{dU_B}{dt} = 0 \to P_C + P_L = 0 \to$$

$$V_C i + V_L i = 0 \to V_L = -V_C = -\frac{q}{C} = -\frac{0{,}18\sigma\upsilon\nu 100t}{10^{-2}F} = -18 \cdot \sigma\upsilon\nu 100t \xrightarrow{t=7{,}5\pi \ ms}$$

$$V_L = -18\sigma\upsilon\nu(0{,}75\pi) = -18\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -18\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right) = 9\sqrt{2}V$$

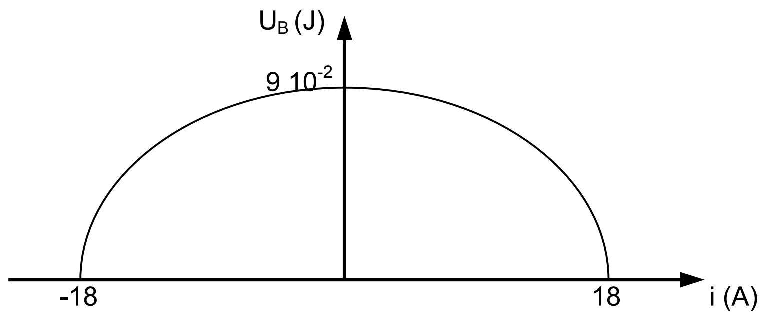
Τελικά, από το νόμο της αυτεπαγωγής του Faraday παίρνουμε:

$$V_L = -L\frac{di}{dt} \to \frac{di}{dt} = -\frac{V_L}{L} = -\frac{9\sqrt{2}V}{10^{-2}H} = -900\sqrt{2}A/s$$

δ) $U_E + U_B = E \to U_E = E - U_B = U_{B,max} - U_B = \frac{1}{2}LI^2 - \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}10^{-2}18 - \frac{1}{2}10^{-2}i^2 \to$

$$U_B = 9 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-3} \cdot i^2$$

Η τελευταία συνάρτηση παριστάνει την παραβολή που ακολουθεί:



ε) Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής γράφεται:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_c = V_c i \qquad (1)$$

Τη στιγμή που η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου είναι η μισή της μέγιστης, θα είναι αντίστοιχα ίση με τη μισή της μέγιστης και η τάση V_c, αφού ισχύει η σχέση $E = \frac{V}{l}$. Τη στιγμή εκείνη η ένταση i του ρεύματος στο πηνίο υπολογίζεται με ΑΔΕΤ:

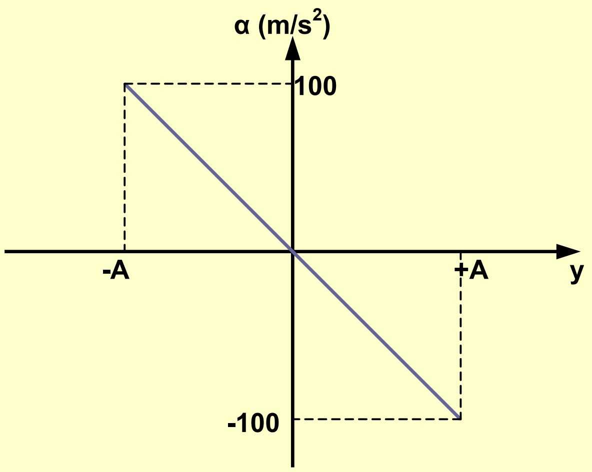
$$U_E + U_B = E \to \frac{1}{2}CV_c^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CV_{c,max}^2 \to C\left(\frac{V_{c,max}}{2}\right)^2 + Li^2 = CV_{c.max}^2 \to$$

$$i^2 = \frac{C\left(V_{c,max}^2 - \frac{V_{c,max}^2}{4}\right)}{L} = \frac{3CV_{c,max}^2}{4L} \to i = \pm\frac{V_{c,max}}{2}\sqrt{\frac{3C}{L}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{V_{c,max}}{2}\left(\pm\frac{V_{c.max}}{2}\sqrt{\frac{3C}{L}}\right) = \pm\frac{Q^2}{4C^2}\sqrt{\frac{3C}{L}} = \pm\frac{3,24\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-4}}\sqrt{\frac{3\cdot 10^{-2}}{10^{-2}}} = \pm 81\sqrt{3}W$$

4. Υλικό σημείο Ο, εκτελεί απλή, αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης y=Ασυν10πt (SI), κατά μήκος κατακόρυφου άξονα y'Oy. Η ταλάντωση έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία και διάδοση εγκάρσιου, αρμονικού κύματος, κατά μήκος του άξονα x'Ox, κάθετου στον y'Oy. Το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x'Ox με ταχύτητα υ=0,5m/s. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται γραφικά, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, η επιτάχυνση της ταλάντωσης του υλικού σημείου:



Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

β) Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το υλικό σημείο διέρχεται για 2η φορά από τη θέση ισορροπίας της.

γ) Ποια σημεία του άξονα x'Ox έχουν τη χρονική στιγμή του ερωτήματος β) κινητική ενέργεια ταλάντωσης ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της.

δ) Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο, ενός σημείου Σ, μάζας m=1g, του άξονα x'Ox το οποίο είναι το τρίτο σε συμφωνία φάσης με το σημείο Ο.

Λύση:

α) Η εξίσωση απομάκρυνσης της πηγής γράφεται: y=Ασυνωt=Αημ(ωt+π/2), άρα υπάρχει αρχική φάση $φ_o$=π/2. Επίσης, από την εξίσωση είναι προφανές ότι ω=10π r/s απ΄όπου βρίσκουμε T=2π/ω=0,2s και μέσω της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής προκύπτει και το μήκος κύματος λ:

$$\upsilon = \lambda f \to \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{0,5m/s}{1/0,2s} = 0,1m$$

Το πλάτος Α της ταλάντωσης των σημείων προκύπτει μέσω της γραφικής παράστασης α-y από την οποία φαίνεται ότι:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \to A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} = \frac{100 m/s^2}{100\pi^2\ r^2/s^2} = 0,1m$$

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_o\right] = 0,1\eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right](SI)$$

β) Βρίσκουμε πρώτα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το υλικό σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για 2η φορά:

$$y = A\sigma\upsilon\nu\omega t \xrightarrow{y=0} 0 = A\sigma\upsilon\nu\omega t \to \sigma\upsilon\nu\omega t = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \to \omega t = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} = (4\kappa \pm 1)\frac{\pi}{2} \to$$

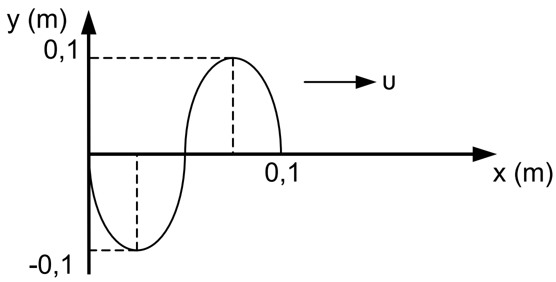
$$\omega t = (2\nu+1)\frac{\pi}{2} \xrightarrow[\nu=1]{2\eta} \omega t = \frac{3\pi}{2} \to \frac{2\pi}{T}t = \frac{3\pi}{2} \to t = \frac{3T}{4} = 0,15s$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μέγιστη απόσταση στην οποία έχει διαδοθεί το κύμα μέχρι την παραπάνω χρονική στιγμή, επιλύοντας την εξίσωση φ=0:

$$\phi = 2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2} \xrightarrow[t=0,15s]{\phi=0} 0 = 2\pi(5\cdot 0,15-10x_{max})+\frac{\pi}{2} \to 0 = 1,5\pi - 20\pi\cdot x_{max}+\frac{\pi}{2} \to$$

x_{max}=0,1m

Συγκρίνοντας την απόσταση αυτή με το μήκος κύματος είναι προφανές ότι $x_{max}=\lambda$, οπότε το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το παρακάτω:



γ) Βρίσκουμε πρώτα την απομάκρυνση y της ταλάντωσης των ζητούμενων σημείων:

$$K = \frac{K_{max}}{2} \to E - U = \frac{E}{2} \to U = \frac{E}{2} = \frac{U_{max}}{2} \to \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA^2 \to y = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση του κύματος και την επιλύουμε ως προς x, έχοντας υπ' όψην τον περιορισμό ότι στη δεδομένη χρονική στιγμή το κύμα δεν έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο με τετμημένη x_{max}=0,1m:

$$(+): \frac{A\sqrt{2}}{2} = A\eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right] \to \eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right] = \eta\mu\frac{\pi}{4} \to$$

$$\begin{cases} 2\pi(5t-10x)+\dfrac{\pi}{2} = 2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \to 10t-20x+0,5 = 2\kappa+0,25 \xrightarrow{t=0,15s} x = 0,0875-\dfrac{\kappa}{10}\ (\ \alpha\ ) \\ 2\pi(5t-10x)+\dfrac{\pi}{2} = 2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4} \to 10t-20x+0,5 = 2\kappa+0,75 \xrightarrow{t=0,15s} x = 0,0625-\dfrac{\kappa}{10}\ (\ \beta\ ) \end{cases}$$

Οι (α) και (β) για κ=0 δίνουν: x_1=0,0875m και x_2=0,0625m (δεκτές)

$$(-): -\frac{A\sqrt{2}}{2} = A\eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{5\pi}{4} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4} \rightarrow 10t-20x+0,5 = 2\kappa+1,25 \rightarrow x = 0,0375-\frac{\kappa}{10} \ (\gamma) \\ 2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \rightarrow 10t-20x+0,5 = 2\kappa-0,25 \rightarrow x = 0,1125-\frac{\kappa}{10} \ (\delta) \end{cases}$$

Η λύση (γ) μας δίνει αποδεκτή τιμή για κ=0, x=0,0375m ενώ η λύση (δ) δίνει αποδεκτή τιμή για κ=1, x=0,0125m.

Συνολικά, τα ζητούμενα σημεία είναι τέσσερα στις θέσεις:

x_1=0,0125m, x_2=0,0375m, x_3=0,0625m και x_4=0,0875m.

δ) Δύο σημεία σε συμφωνία φάσης έχουν Δφ=2κπ, άρα απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx=κλ (αποδεικνύεται πολύ εύκολα και παραλείπουμε την απόδειξη για να ....κάνετε κι εσείς κάτι...)

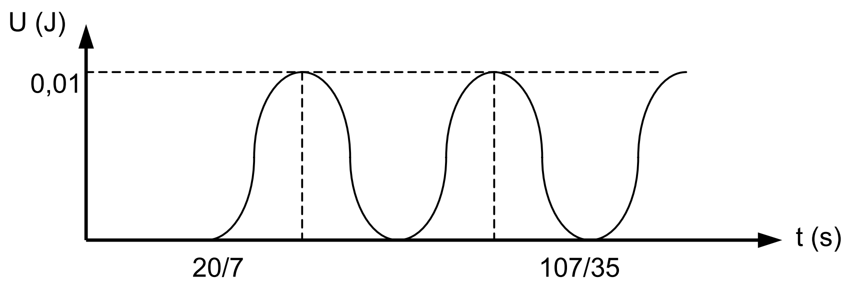
Το τρίτο σημείο σε συμφωνία φάσης με το Ο θα βρίσκεται, κατά συνέπεια στη θέση x=2λ (προκύπτει για κ=2 από τη σχέση Δx=κλ), άρα x=0,2m. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση του κύματος βρίσκουμε την εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου αυτού:

$$y = 0,1\eta\mu\left[2\pi(5t-10x)+\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{x=0,2m} y = 0,1\eta\mu\left[2\pi(5t-2)+\frac{\pi}{2}\right] = 0,1\eta\mu(10\pi t-3,5\pi)(SI)$$

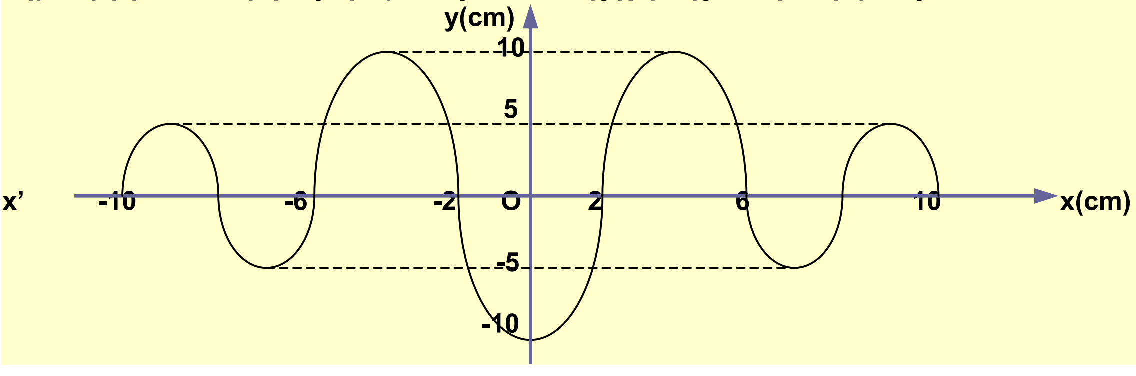
Η ζητούμενη δυναμική ενέργεια θα δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 = \frac{1}{2}10^{-3}kg\cdot 100\pi^2\frac{r^2}{s^2}\cdot 0,01\eta\mu^2(10\pi t-3,5\pi) \rightarrow$$
$$U = 5\cdot 10^{-3}\eta\mu^2(10\pi t-3,5\pi)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι η ακόλουθη:



5. Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί κατά μήκος ομογενούς, ελαστικής χορδής απείρου μήκους, x'Ox:



Γνωρίζουμε ότι το στάσιμο κύμα δημιουργήθηκε από τη συμβολή δύο γραμμικών, αρμονικών κυμάτων, ίδιου πλάτους και συχνότητας, που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις πάνω στον άξονα x'Ox. Αν η συμβολή των δύο κυμάτων ξεκίνησε τη στιγμή t=0, κατά την οποία τα δύο κύματα ΄΄έφτασαν΄΄ ταυτόχρονα στην αρχή x=O του άξονα x'Ox, και το παραπάνω στιγμιότυπο αναφέρεται στη χρονική στιγμή t_1=3s, να βρεθούν:

α) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος καθώς και των κυμάτων που το δημιούργησαν, αν είναι γνωστό ότι αυτά δεν είχαν αρχική φάση.

β) Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου, μάζας m=2g, στη θέση x=8cm, τις χρονικές στιγμές t_1=3s και t_2=6s.

γ) Η διαφορά φάσης δύο σημείων Α και Β στις θέσεις x_A=-11cm και x_B=-8cm τις χρονικές στιγμές του ερωτήματος β).

<u>Λύση:</u>

α) Η ζητούμενη εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι της μορφής $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

Από το στιγμιότυπο προκύπτει εύκολα ότι: 2A=10cm άρα A=5cm
λ/2=4cm άρα λ=8cm

Επίσης από το στιγμιότυπο φαίνεται ότι τα δύο κύματα έχουν συμβάλλει μέχρι απόσταση x=6cm σε χρόνο t_1=3s, οπότε η ταχύτητα διάδοσής τους είναι υ=x/ t=2cm/s, άρα η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής μας δίνει την περίοδο Τ: Τ=λ/υ=8cm/2cm/s=4s.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση του στάσιμου κύματος παίρνουμε:

$$y = 10\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{8}\eta\mu\frac{2\pi t}{4} \to y = 10\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{4}\eta\mu\frac{\pi t}{2} \ \text{(x,y σε cm)}$$

Επίσης, οι εξισώσεις των κυμάτων που το δημιούργησαν είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 5\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4}-\frac{x}{8}\right)(\text{x, y σε cm})$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) = 5\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2}+\frac{x}{8}\right)(\text{x, y σε cm})$$

β) Στο σημείο αυτό τη στιγμή t_1=3s δεν έχουν ακόμη συμβάλλει τα δύο κύματα άρα δεν έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Συνεπώς, το σημείο αυτό θα εκτελεί ταλάντωση πλάτους Α=5cm, οπότε η ολική ενέργεια της ταλάντωσής του θα είναι:

$$E=\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot 25\cdot 10^{-4} = 6,25\cdot 10^{-6}J$$

Τη στιγμή t_2=8s η συμβολή των δύο κυμάτων έχει ΄΄καλύψει΄΄ την περιοχή $-\upsilon t_2 \le x \le \upsilon t_2 \to -12cm \le x \le 12cm$, άρα το σημείο αυτό (x=8cm) βρίσκεται στην ΄΄περιοχή΄΄ όπου η συμβολή έχει δημιουργήσει στάσιμο κύμα. Το πλάτος ταλάντωσής του τότε θα είναι:

$$A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 10\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\cdot 8cm}{8cm}\right| = 10cm \ \text{(κοιλία)}$$

Η ολική ενέργεια ταλάντωσής του θα είναι:

$$E' = \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A'^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\frac{\pi^2}{4}10^{-2} = 2,5\cdot 10^{-5}J$$

γ) Σκεπτόμενοι όπως στο ερώτημα β), παρατηρούμε ότι τα σημεία Α και Β τη στιγμή t_1=3s βρίσκονται εκτός της ΄΄περιοχής΄΄ συμβολής (-6cm έως +6cm) ενώ τη στιγμή t_2=8s βρίσκονται εντός της ΄΄περιοχής΄΄ συμβολής (-12cm έως 12cm). Αυτό σημαίνει ότι, τη στιγμή t_1 η διαφορά φάσης θα δίνεται από τη σχέση:

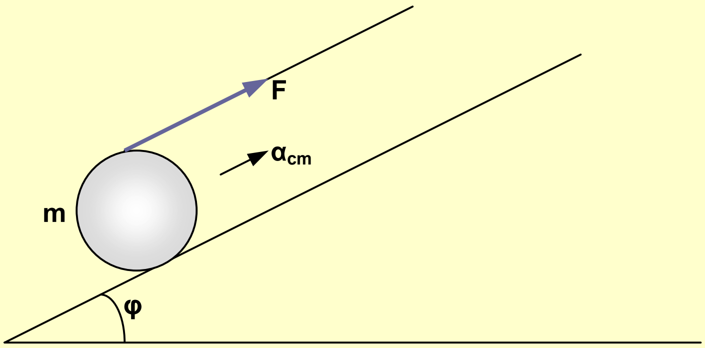
$$\Delta\phi = \left|\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)+\phi_o\right]-\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)+\phi_o\right]\right| = \frac{2\pi}{\lambda}\left|x_2-x_1\right| = \frac{2\pi}{8cm}3cm = \frac{3\pi}{4}rad$$

Τη στιγμή t_2 η διαφορά φάσης θα είναι μηδέν ή π ανάλογα με τη θέση των σημείων. Βρίσκουμε ότι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος αντιστοιχούν στις θέσεις:

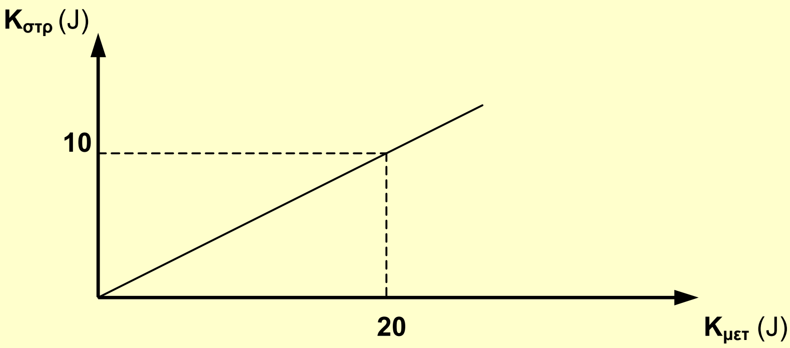
$$x_\delta = (2\nu+1)\frac{\lambda}{4} = (2\nu+1)\frac{8}{4} = 4\nu + 2 \rightarrow \begin{cases} \nu = 0 : x_{\delta 1} = 2\text{cm} \\ \nu = -1 : x_{\delta 2} = -2\text{cm} \\ \nu = -2 : x_{\delta 3} = -6\text{cm} \\ \nu = -3 : x_{\delta 4} = -10\text{cm}, \kappa\tau\lambda.... \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι τα σημεία Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού στη θέση $x_{\delta 4}$=-10cm, οπότε η μεταξύ τους διαφορά φάσης θα είναι Δφ=π rad.

6. Συμπαγής, ομογενής τροχός, μάζας m και ακτίνας R=10cm, κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας φ=30^o, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η κίνηση του τροχού πραγματοποιείται μέσω της ασκούμενης σ΄αυτόν δύναμης $\vec{F}$, μέτρου F=12N, η οποία εφαρμόζεται εφαπτομενικά στον τροχό, μέσω αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, τυλιγμένου στην περιφέρειά του. Δίνεται επίσης ότι η κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την αντίστοιχη ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Η προσφερόμενη μέσω της ροπής της δύναμης F ισχύς στον τροχό μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με το νόμο P=8t (SI). Αν γνωρίζουμε ότι η μεταφορική κίνηση του τροχού είναι ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα και ότι αυτή ξεκίνησε τη χρονική στιγμή t=0, να βρεθούν:

α) Η μάζα του τροχού.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση και η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού, τη χρονική στιγμή t=0,668s, αν δίνεται ότι το σημείο αυτό τη χρονική στιγμή t=0 βρισκόταν σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται: g=10m/s^2.

Λύση:

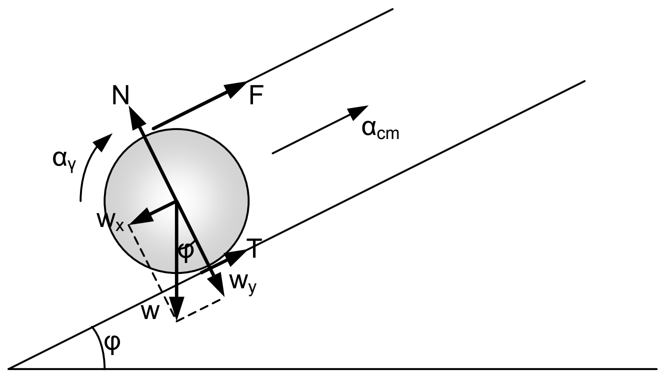
α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $K_{μετ}=2K_{στρ}$. Ομως, γενικότερα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\frac{K_{μετ}}{K_{στρ}}=\frac{\frac{1}{2}mu_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2}=\frac{mu_{cm}^2}{\lambda mR^2\omega^2}=\frac{u_{cm}^2}{\lambda u_{cm}^2}=\frac{1}{\lambda}$$

(Θέσαμε τη ροπή αδράνειας του τροχού ίση με $I=\lambda mR^2$, όπου λ καθαρός αριθμός, αφού δεν γνωρίζουμε αν πρόκειται για κύλινδρο, σφαίρα κτλ.).

Προφανώς ισχύει ότι λ=1/2, οπότε η ροπή αδράνειας του τροχού δίνεται από τη σχέση $I=\frac{1}{2}mR^2$.

Σχεδιάζουμε τις ασκούμενες στον τροχό δυνάμεις, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Για τη στατική τριβή T υποθέτουμε αυθαίρετα ότι έχει τη φορά του σχήματος. Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους στροφικής και μεταφορικής κίνησης:

$$\sum\vec{F}=m\vec{\alpha}_{cm}\rightarrow F+T-w_x=m\alpha_{cm}\rightarrow F+T-mg\eta\mu\phi=m\alpha_{cm}\quad (1)$$

$$\sum\vec{\tau}=I\vec{\alpha}_\gamma\rightarrow FR-TR=\frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma\rightarrow F-T=\frac{1}{2}m\alpha_{cm}\quad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν με πρόσθεση κατά μέλη:

$$(1)+(2)\rightarrow 2F-mg\eta\mu\phi=\frac{3}{2}m\alpha_{cm}\rightarrow \alpha_{cm}=\frac{2}{3m}\left(2F-mg\eta\mu\phi\right)\quad (3)$$

Η ισχύς της ροπής της F γράφεται:

$$P=\tau\omega=FR\alpha_\gamma t=F\alpha_{cm}t\xrightarrow{(3)}P=\frac{2F}{3m}\left(2F-mg\eta\mu\phi\right)t\quad (4)$$

Η σύγκριση της (4) με τη σχέση P=8t μας δίνει:

$$8=\frac{2F}{3m}\left(2F-mg\eta\mu\phi\right)\rightarrow 8=\frac{4F^2}{3m}-\frac{2F}{3}g\eta\mu\phi\rightarrow\frac{4F^2}{3m}=8+\frac{2F}{3}g\eta\mu\phi\rightarrow m=\frac{4F^2}{24+2Fg\eta\mu\phi}\rightarrow$$

m=4kg

β) Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής δίνεται από τη σχέση:

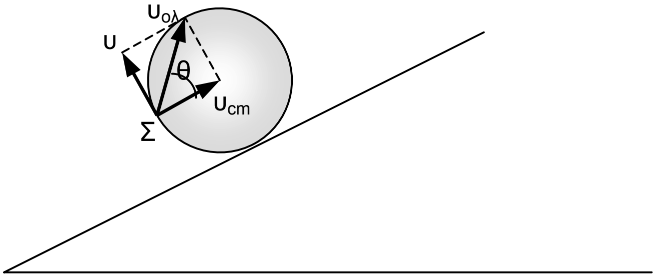
$$\frac{dL}{dt}=\sum\tau=I\alpha_\gamma=\frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma\quad (5)$$

Η (3) μας δίνει $α_{cm}=19/3\ m/s^2$ οπότε $α_γ=α_{cm}/R=190/3\ r/s^2$ (6)

(5)(6)→dL/dt=0,316 Nm

γ) Βρίσκουμε πρώτα τη θέση του σημείου αυτού, έστω Σ, τη δεδομένη χρονική στιγμή. Ο τροχός θα έχει περιστραφεί μέχρι τότε κατά γωνία $\phi = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 = \frac{1}{2}\frac{190}{3}0,668^2 = 14,1\ r$. Συνεπώς, το πλήθος των περιστοφών που θα έχει εκτελέσει μέχρι τη στιγμή αυτή ο τροχός θα είναι N=φ/2π=2,25.

Αφού το σημείο Σ τη στιγμή t=0 βρισκόταν σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο, μετά από 2,25 περιστροφές θα βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα:



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το σημείο Σ θα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{o\lambda}$, η οποία θα προκύψει ως η συνισταμένη της μεταφορικής ταχύτητας $\vec{u}_{cm}$ και της εφαπτομενικής ταχύτητας $\vec{u}$, λόγω της στροφικής κίνησης. Αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, τα μέτρα των ταχυτήτων u και u_{cm} είναι ίσα, οπότε έχουμε:

$$u_{o\lambda} = \sqrt{u^2 + u_{cm}^2} = \sqrt{2u_{cm}^2} = u_{cm}\sqrt{2} = \alpha_{cm}t\sqrt{2} = \frac{19}{3}0,668\sqrt{2} = 5,98 m/s$$

Η διεύθυνση της ταχύτητας $u_{o\lambda}$ σχηματίζει γωνία θ=45° με αυτή της u_{cm}, αφού εφθ=u/u_{cm}=1.

7. Το σύστημα των ΄΄ταχυτήτων΄΄ σ΄ένα ποδήλατο αποτελείται από οδοντωτούς τροχούς (΄΄γρανάζια΄΄) και μια αλυσίδα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Ας υποθέσουμε ότι το πεντάλ του ποδηλάτου αποτελείται από δύο αβαρείς ΄΄πεταλιέρες΄΄, θεωρούμενες σημειακές, κάθε μια από τις οποίες απέχει απόσταση R=25cm από τον άξονα περιστροφής του συστήματος, με τον οποίο συνδέονται με επίσης αβαρή μεταλλικά στελέχη. Ο μπροστινός δίσκος έχει ακτίνα R_1=10cm και μάζα M=500g και τα πίσω γρανάζια, που μπορεί να επιλέγει ο ποδηλάτης, έχουν ακτίνες που κυμαίνονται από r_{min}=2cm μέχρι r_{max}=5cm . Η αλυσίδα θεωρείται αβαρής και μη ελαστική. Κάποια στιγμή (t=0), το ποδήλατο ξεκινά από την ηρεμία με τον ποδηλάτη να επιλέγει το πίσω γρανάζι με τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα r_{max}, επιταχύνοντας το ποδήλατο με σταθερή επιτάχυνση α_1=1m/s^2, μέχρι τη στιγμή t_1=10s, οπότε επιλέγει το πίσω γρανάζι με τη μικρότερη δυνατή ακτίνα r_{min}, συνεχίζοντας την επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση α_2=0,5m/s^2, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=15s. Θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση ο ποδηλάτης ασκεί με το κάθε πόδι του σε κάθε ΄΄πεταλιέρα΄΄ σταθερή δύναμη, μέτρου F=2N, εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά που αυτή εκτελεί. Αν θεωρήσουμε ότι ο μπροστινός δίσκος έχει όλη του τη μάζα συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, ενώ η ροπή αδράνειας κάθε γραναζιού θεωρείται αμελητέα, να βρεθούν:

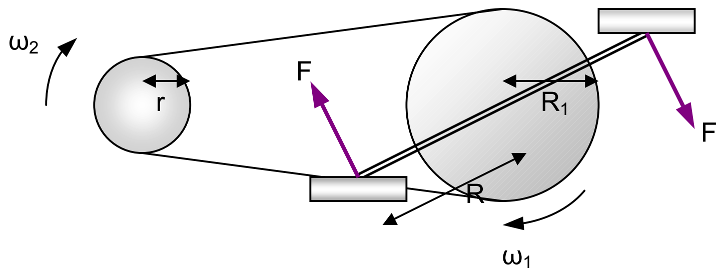
α) Η συχνότητα περιστροφής του πεντάλ του ποδηλάτου, τη χρονική στιγμή t'=5s.

β) Η μάζα του μπροστινού δίσκου.

γ) Η γραφική παράσταση του μέτρου της στροφορμής του μπροστινού δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση:

α) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εικόνα του συστήματος ΄΄δίσκος-αλυσίδα-γρανάζι΄΄:



Η αλυσίδα είναι μη ελαστική, άρα τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου και κάθε γραναζιού έχουν ίσες τιμές γραμμικής ταχύτητας (όσοι κρίκοι της αλυσίδας ΄΄βγαίνουν΄΄ από το δίσκο ΄΄μπαίνουν΄΄ στο γρανάζι). Συνεπώς, οι γωνιακές ταχύτητες δίσκου και γραναζιού θα συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 r \rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_2 r}{R_1} \quad (1)$$

Οταν ο ποδηλάτης έχει επιλέξει το μεγάλο γρανάζι, η γωνιακή επιτάχυνση αυτού θα είναι:

$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_1}{r_{max}} = \frac{1m/s^2}{0,05m} = 20r/s^2$$

Η γωνιακή ταχύτητα του γραναζιού αυτού τη χρονική στιγμή t'=5s θα δίνεται από το νόμο $\omega_2 = \alpha_\gamma t' = 20\frac{r}{s^2}5s = 100r/s$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στη σχέση (1) και θέτοντας $r=r_{max}$ παίρνουμε:

$$\omega_1 = 100\frac{r}{s}\cdot\frac{5cm}{10cm} = 50r/s$$

Τελικά: $f=\omega_1/2\pi=25/\pi$ Hz.

β) Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος δίσκος-πεντάλ θα είναι:

$$\omega_1 = \omega_2\frac{r}{R_1} \rightarrow \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{r}{R_1}\frac{d\omega_2}{dt} \rightarrow \alpha_\gamma' = \frac{r}{R_1}\alpha_\gamma \xrightarrow{r=5cm} \alpha_\gamma' = \frac{1}{2}\alpha_\gamma = \frac{1}{2}20\frac{r}{s^2} = 10\frac{r}{s^2}$$

Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για το σύστημα αυτό μας δίνει:

$$\sum\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma' \rightarrow FR = MR^2\alpha_\gamma' \rightarrow M = \frac{F}{R\alpha_\gamma'} = \frac{2N}{0,25m\cdot 10\frac{r}{s^2}} = 0,8kg$$

γ) Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=10s ο δίσκος θα έχει στροφορμή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$L = I\omega = MR^2\alpha_\gamma' t = 0,8kg\cdot(0,25m)^2\cdot 10\frac{r}{s^2}\cdot t = 0,5\cdot t \ (SI)$$

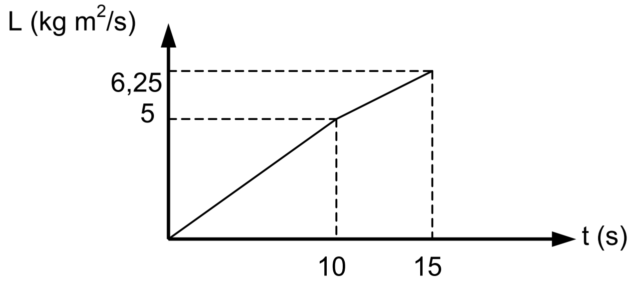
Από τη στιγμή t_1=10s μέχρι τη στιγμή t_2=15s η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου θα είναι:

$$\alpha_\gamma'' = \frac{r_{min}}{R_1}\alpha_\gamma = \frac{r_{min}}{R_1}\frac{\alpha_2}{r_{min}} = \frac{\alpha_2}{R_1} = \frac{0,5m/s^2}{0,1m} = 5r/s^2$$

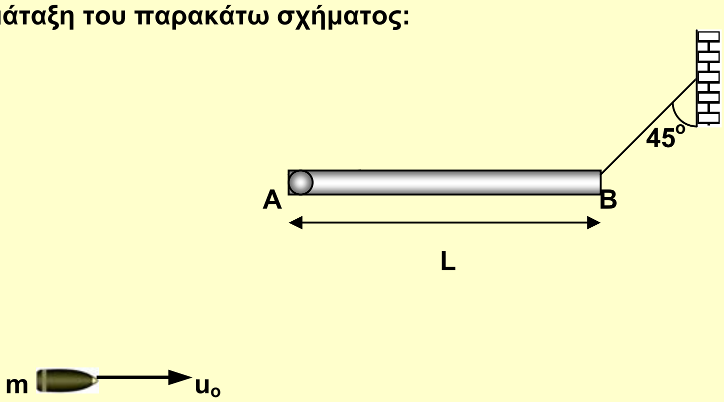
Συνεπώς, η αντίστοιχη τιμή στροφορμής θα είναι:

$L' = I\omega = I(\omega_1 + \alpha_\gamma'' t) = MR^2(\alpha_\gamma t_1 + \alpha_\gamma'' t) = 0,05(100+5t) = 5 + 0,25t \ (SI)$ (όπου ο χρόνος t ΄΄υπολογίζεται΄΄ με αφετηρία τη στιγμή t_1=10s)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ζητούμενη γραφική παράσταση θα έχει την ακόλουθη μορφή:



8. Δίνεται η διάταξη του παρακάτω σχήματος:



Η ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μάζα M=0,5kg και μήκος L=20cm και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο σ΄αυτήν, διερχόμενο από το ένα άκρο της Α. Στο άλλο άκρο της Β είναι δεμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το οποίο είναι στερεωμένο στον κατακόρυφο τοίχο με τον οποίο σχηματίζει γωνία 45^o, όταν η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Να βρεθούν:

α) Η τάση του νήματος και η δύναμη στο σημείο Α όταν η ράβδος ισορροπεί.

β) Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται γύρω από το Α. Τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου παίρνει τιμή ίση με το 1/$\sqrt{2}$ της μέγιστης δυνατής τιμής της, ένα βλήμα αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=M, το οποίο κινείται με οριζόντια ταχύτητα, μέτρου u_o=6m/s, στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με τη ράβδο, σφηνώνεται στο άκρο της Β.

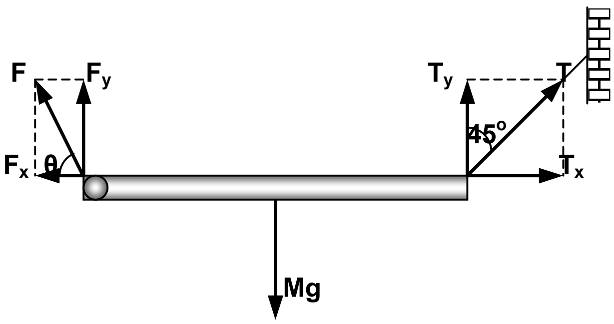
ι) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση;

ιι) Μέχρι ποιό ύψος πάνω από την αρχική διεύθυνση κίνησης του βλήματος θα φτάσει το άκρο Β της ράβδου μετά την κρούση;

ιιι) Ποια δύναμη θα δέχεται η ράβδος στον άξονα περιστροφής της (σημείο Α) τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη για 1^η φορά μετά την κρούση;

Δίνεται για τη ράβδο η ροπή αδράνειάς της ως προς άξονα κάθετο σ΄αυτήν διερχόμενο από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και g=10m/s^2.

Λύση:



Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για τη μεταφορική και στροφική κίνηση:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \rightarrow F_x = T_x \rightarrow F_x = T\eta\mu 45^o \rightarrow F_x = T\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \rightarrow T_y + F_y = Mg \rightarrow F_y = Mg - T\sigma\upsilon\nu 45 = Mg - T\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sum \vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \rightarrow -w\frac{L}{2} + T_y L = 0 \rightarrow T\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Mg}{2} \rightarrow T = \frac{Mg}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}N$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (1) και (2) την τιμή της τάσης Τ παίρνουμε:

$$(1) \rightarrow F_x = T\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}5N$$

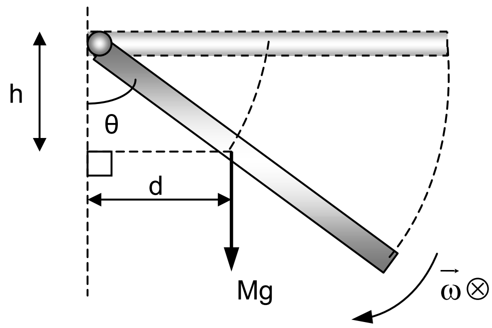
$$(2) \rightarrow F_y = 5N - 2{,}5N = 2{,}5N$$

Επειδή $\vec{F}_x \perp \vec{F}_y$ θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{2F_x^2} = F_x\sqrt{2} = 2{,}5\sqrt{2}N$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = 1 \rightarrow \theta = 45^o$$

β) ι) Κατ΄αρχήν βρίσκουμε από ποια θέση διέρχεται η ράβδος τη στιγμή της κρούσης. Σε μια τυχαία θέση όπου η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, θα ισχύουν τα παρακάτω:



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι ίσος με τη συνισταμένη ροπή που ασκείται σ΄αυτήν ($\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum\vec{\tau}$). Ομως, η μόνη ασκούμενη ροπή είναι του βάρους, άρα:

$$\frac{dL}{dt} = \sum\tau = wd = MgL\eta\mu\theta$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ροπής προκύπτει για θ=0, άρα η τιμή της ροπής που είναι ίση με το $1/\sqrt{2}$ της τιμής αυτής θα αντιστοιχεί σε γωνία θ=45^o, αφού τότε θα ισχύει: $\frac{dL}{dt} = MgL\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} \rightarrow MgL\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}MgL \rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu 45^o$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή αυτή:

$$A\Delta ME : K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

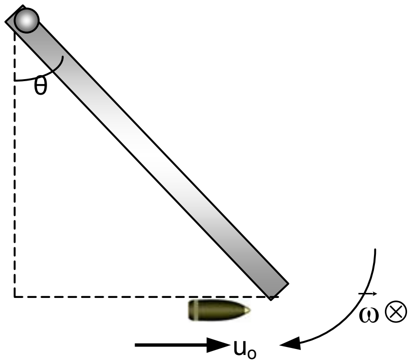
Η ροπή αδράνειας Ι υπολογίζεται μέσω θεωρήματος Steiner:

$$I = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{3} \quad (2)$$

Επίσης, από το σχήμα είναι προφανές ότι $h = \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu45^o = \frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{4}$ (3)

$$(1) \xrightarrow{(2)(3)} Mg\frac{L\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sqrt{2}}{2L}} = 14,5r/s$$

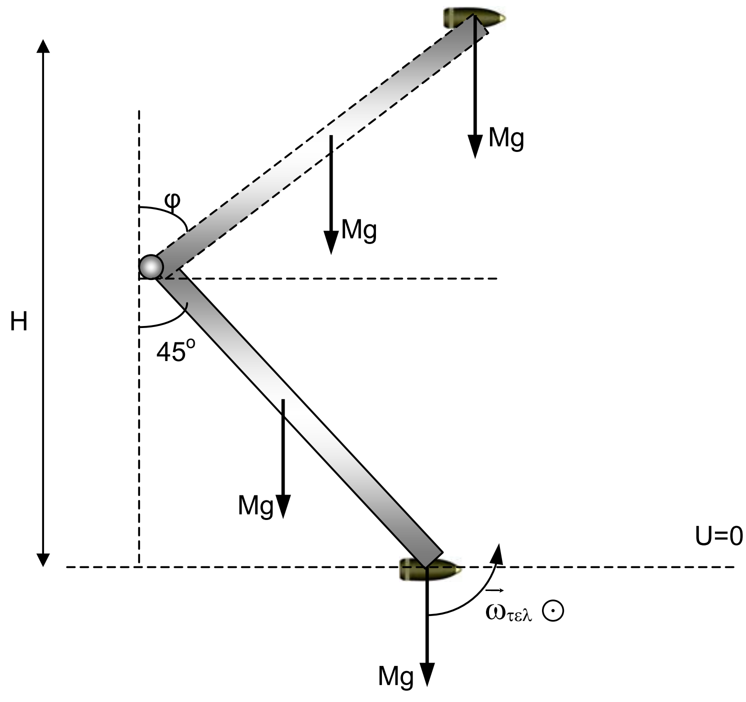
Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης στροφορμής για την κρούση:



$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow mu_or - I\omega = I'\omega_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{Mu_oL\sigma\upsilon\nu45^o - I\omega}{I + ML^2} = \frac{Mu_oL\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{ML^2}{3}\omega}{\frac{ML^2}{3} + ML^2} \rightarrow$$

$\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ =12,28r/s

ιι) Εστω Η το ζητούμενο ύψος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και φ η γωνία που σχηματίζει στη θέση αυτή η ράβδος με την κατακόρυφη:



Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική διεύθυνση της ταχύτητας του βλήματος:

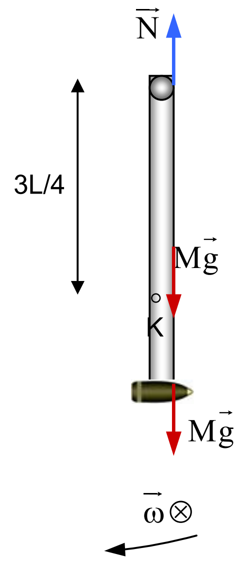
$$ΑΔΜΕ: K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}I'\omega_{τελ}^2 + Mg\frac{L}{2}συν45^o = MgH + Mg(L + \frac{L}{2}συνφ) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3} + ML^2\right)\omega_{τελ}^2 + Mg\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = MgLσυνφ + MgL + Mg\frac{L}{2}συνφ \rightarrow$$

$$\frac{2L}{3}\omega_{τελ}^2 + g\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2}gσυνφ + g \rightarrow συνφ = 0,91 \rightarrow φ = 24,5^o$$

Το ύψος Η τελικά θα είναι: Η=Lσυνφ=0,2 0,91=0,182m=18,2cm

ιιι) Η ράβδος θα περάσει για 1η φορά από την κατακόρυφη θέση όταν επανέλθει σ΄αυτήν μετά την εκτροπή της σε ύψος Η (όπως φαίνεται από το προηγούμενο ερώτημα η ράβδος δεν θα εκτελέσει ανακύκλωση). Επειδή η επαναφορά της ράβδου στην κατακόρυφη θέση γίνεται μόνο υπό την επίδραση των βαρών ράβδου και βλήματος (διατηρητικές δυνάμεις), τη στιγμή που διέρχεται απ΄αυτήν θα έχει γωνιακή ταχύτητα ίσου μέτρου μ΄αυτήν που είχε αμέσως μετά την κρούση, αλλά αντίθετης φοράς, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

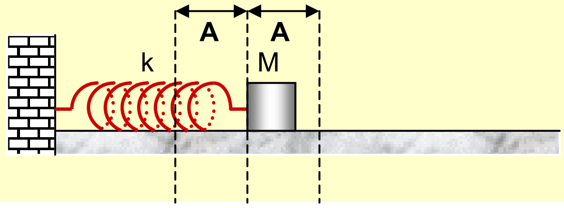


Επειδή οι μάζες ράβδου και βλήματος είναι ίσες το κέντρο μάζας Κ του συστήματος βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των σημείων εφαρμογής των δύο αυτών βαρών, δηλαδή σε απόσταση r=3L/4 από τον άξονα περιστροφής. Για το κέντρο μάζας θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_κ \rightarrow N - 2Mg = 2M\omega^2 r \rightarrow N = 2Mg + 2M\omega^2\frac{3L}{4} = 2M\left(g + \omega^2\frac{3L}{4}\right) \rightarrow$$

N=32,62N

9. Σώμα μάζας Μ=0,3kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους Α=10cm, πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Κάποια στιγμή (t=0) κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο, και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο, ένα μικρό βλήμα, μάζας m=200g, κινούμενο με ταχύτητα u_o=20m/s, υπό γωνία φ=60^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση, και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το ελατήριο, σφηνώνεται στο σώμα μάζας M. Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

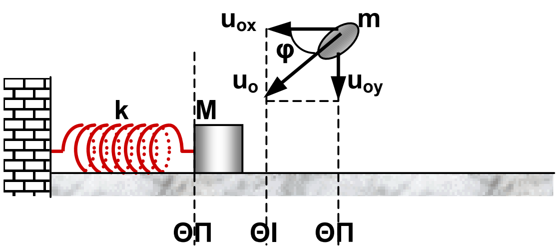
β) Η αύξηση της δύναμης επαφής που δέχεται το σώμα από το δάπεδο, κατά τη διάρκεια της κρούσης, αν αυτή ήταν Δt=0,01s.

γ) Η % απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

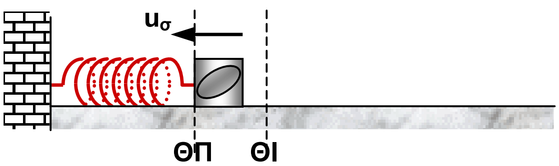
δ) Σε ποια χρονική στιγμή το συσσωμάτωμα θα περάσει για 1^η φορά, μετά την κρούση, από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του. Δίνεται ότι 1/3 ≃ ημ(π/18).

Δίνεται: g=10m/s^2.

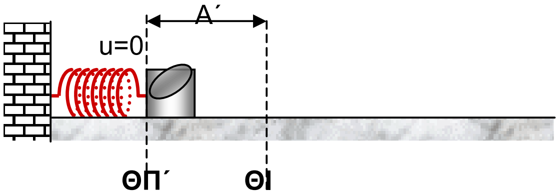
Λύση:



Λίγο πριν την κρούση



Αμέσως μετά την κρούση



Νέα θέση πλάτους

α) Αφού η κρούση γίνεται στη θέση όπου το σώμα μάζας M έχει στιγμιαία ακινητοποιηθεί και στην οποία το ελατήριο είναι συσπειρωμένο, προφανώς αυτή θα είναι η προς τ΄αριστερά θέση πλάτους της ταλάντωσης (βλ. σχήμα). Λόγω του ακλόνητου δαπέδου, η αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση ισχύει μόνο στον άξονα x:

$$\text{ΑΔΟ}(x): \vec{p}_{αρχ,x} = \vec{p}_{τελ,x} \rightarrow m u_{ox} = (m+M)u_σ \rightarrow u_σ = \frac{m u_o συνφ}{m+M} \rightarrow$$

$$u_σ = \frac{0,2kg \cdot 20\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{2}}{0,5kg} = 4m/s$$

Στη συνέχεια, το νέο πλάτος ταλάντωσης προκύπτει με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης:

$$\text{ΑΔΕΤ}: K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}(m+M)u_σ^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA'^2 \xrightarrow[x=A]{D=k}$$

$$(m+M)u_σ^2 + kA^2 = kA'^2 \rightarrow A' = \sqrt{A^2 + \frac{(m+M)u_σ^2}{k}} \rightarrow A' = \sqrt{0,01 + \frac{0,5\cdot 16}{100}} = 0,3m$$

β) Εφαρμόζουμε τη γενικευμένη μορφή του 2^{ου} νόμου Νεύτωνα κατά τη διάρκεια της κρούσης συμβολίζοντας με N΄την αντίδραση που τότε δέχεται το σώμα από το δάπεδο:

$$\sum \vec{F}_y = \frac{d\vec{p}_y}{dt} \rightarrow N' - (m+M)g = \frac{p_{y,\tau\varepsilon\lambda} - p_{y,\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \rightarrow N' = (m+M)g + \frac{0-(-mu_o \eta\mu\phi)}{\Delta t} \rightarrow$$

$$N' = (m+M)g + \frac{mu_o \eta\mu\phi}{\Delta t} = 0,5kg \cdot 10\frac{m}{s^2} + \frac{0,2kg \cdot 20\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,01s} = 351,4N$$

Ομως, πριν την κρούση το σώμα δεχόταν από το δάπεδο αντίδραση N=Mg=30N (λόγω της αρχικής τους κατάσταση ισορροπίας κατά τον άξονα y), οπότε η ζητούμενη αύξηση προφανώς θα είναι ίση με:

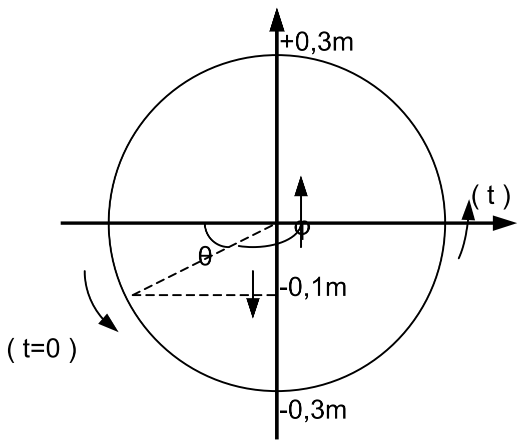
$$\Delta N = N' - N = 351,4N\text{-}30N\text{=}321,4N$$

γ) Η ζητούμενη % απώλεια κινητικής ενέργειας γράφεται:

$$x\% = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}}100 = \frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}100 = \left(1 - \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}\right)100 = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(m+M)u_\sigma^2}{\frac{1}{2}mu_o^2}\right)100 \rightarrow$$

$$x\% = \left(1 - \frac{0,5kg \cdot 16m^2/s^2}{0,2kg \cdot 400m^2/s^2}\right)100 = 90\%$$

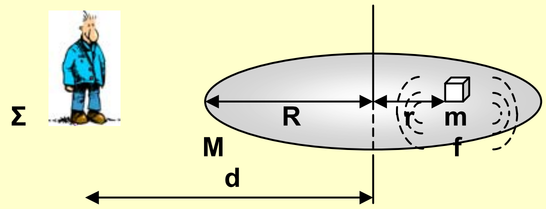
δ) Παριστάνουμε τις θέσεις της ταλάντωσης του συσσωματώματος στον κύκλο αναφοράς (έχοντας θεωρήσει θετική τη φορά προς τα δεξιά):



$$\eta\mu\theta = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}r \quad \text{άρα } \phi = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{18} = \frac{17\pi}{18}r$$

Αρα: $$\phi = \omega t \rightarrow t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\frac{17\pi}{18}}{\sqrt{\frac{k}{m+M}}} = \frac{\frac{17\pi}{18}}{10\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}\pi}{360}s$$

10. Ομογενής δίσκος μάζας M=2kg και ακτίνας R=20cm μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, κάθετο στο επίπεδό του και διερχόμενο από το κέντρο του Κ. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος και ένα σώμα μάζας m=1kg βρίσκεται τοποθετημένο επάνω του, σε απόσταση r=R/2 από το κέντρο Κ. Το σώμα εκπέμπει αρμονικό ήχο συχνότητας f=100Hz. Ενας άνθρωπος στέκεται ακίνητος σε σχέση με το δίσκο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Κάποια στιγμή (t=0), ο δίσκος αρχίζει να στρέφεται, ομαλά επιατχυνόμενος, με σταθερό ρυθμό π/2 r/s^2. Να βρεθούν:

α) Οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες ο άνθρωπος ακούει για 1^η φορά την ελάχιστη και την μέγιστη συχνότητα ήχου αντίστοιχα. Δίνεται ότι τη στιγμή t=0 ο άνθρωπος στέκεται σε μια θέση Σ, η οποία βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα μάζας m (βλ.σχήμα) και σε απόσταση d=40cm από το κέντρο το δίσκου.

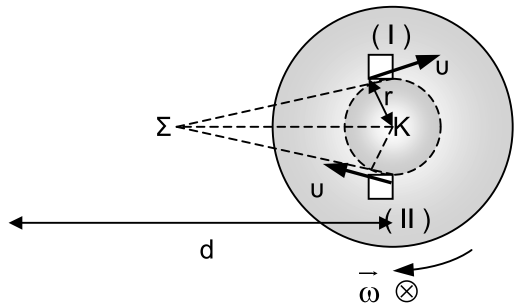
β) Αν το σώμα εμφανίζει με το δίσκο συντελεστή οριακής τριβής μ=0,25, ποια είναι η χρονική στιγμή που το σώμα θα χάσει την επαφή του με το δίσκο; Ποια είναι τότε η στροφορμή του δίσκου;

γ) Αν η επιταχυνόμενη κίνηση του δίσκου επιτεύχθηκε μέσω της εφαρμογής μιας οριζόντιας δύναμης, μέτρου F, συνεχώς εφαπτόμενης στην περιφέρεια του δίσκου, πόση είναι η ισχύς της δύναμης αυτής τη στιγμή του ερωτήματος β) και πόση ενέργεια έχει προσφέρει στο δίσκο η δύναμη από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή εκείνη;

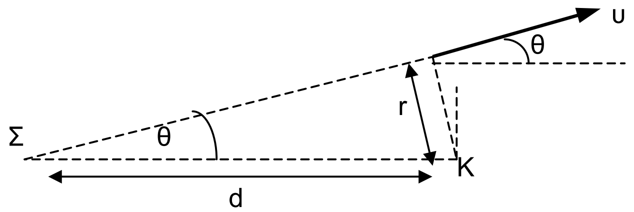
Δίνονται: 1/8=ημ(π/25) και η ροπή αδράνειας του δίσκου I=MR^2/2.

Λύση:

α)



Οπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχουν δύο θέσεις (I) και (II) του δίσκου στις οποίες το σώμα μάζας m κινείται ΄΄απομακρυνόμενο΄΄ ή ΄΄πλησιάζοντας΄΄ το σημείο Σ αντίστοιχα. Στις θέσεις αυτές θα αντιστοιχούν η ελάχιστη και η μέγιστη συχνότητα του ήχου που θα ακούει ο άνθρωπος. Στη συνέχεια, αναλύουμε (και μεγενθύνουμε) το σχήμα που αντιστοιχεί στη θέση (I):



Στη θέση αυτή η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει τη διεύθυνση που ορίζουν το σώμα και το σημείο Σ, άρα σχηματίζει γωνία θ τέτοια ώστε $\etaμθ = \frac{r}{d} = \frac{5cm}{40cm} = \frac{1}{8} \to θ = \frac{π}{25}r$.

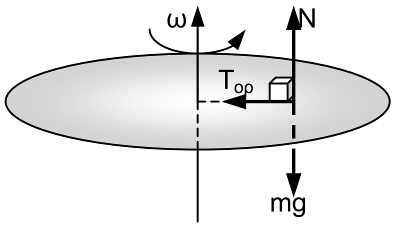
Για 1η φορά στη θέση αυτή θα έχει φτάσει ο δίσκος αφού διαγράψει γωνία $\phi = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{25} = \frac{73\pi}{50} r$. Αυτό απαιτεί χρόνο :

$$\phi = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\phi}{\alpha_\gamma}} = \sqrt{\frac{2\frac{73\pi}{50}}{\frac{\pi}{2}}} = 2,41s$$

Σκεπτόμενοι με όμοιο τρόπο για τη θέση (II), είναι προφανές ότι θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$\phi' = \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{25} = \frac{27\pi}{50} r \rightarrow \frac{1}{2}\alpha_\gamma t'^2 = \frac{27\pi}{50} \rightarrow t' = \sqrt{\frac{2\frac{27\pi}{50}}{\frac{\pi}{2}}} = 1,47s$$

β) Το σώμα ΄΄συμμετέχει΄΄ στη στροφική κίνηση του δίσκου υπό την επίδραση της στατικής τριβής η οποία ΄΄παίζει΄΄ το ρόλο της αναγκαίας κεντρομόλου δύναμης. Η κίνηση αυτή θα είναι εφικτή για όσο χρόνο ικανοποιείται η συνθήκη $T_{o\rho} \geq F_\kappa$ η οποία γράφεται:



$$T_{o\rho} \geq F_\kappa \rightarrow \mu N \geq m\omega^2 r \rightarrow \mu mg \geq m\omega^2 r \rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{r}} \rightarrow \omega \leq 5r/s$$

Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα των 5r/s επιτυγχάνεται τη ζητούμενη χρονική στιγμή t η οποία εύκολα υπολογίζεται ως εξής:

$$\omega = \alpha_\gamma t \rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha_\gamma} = \frac{5r/s}{\frac{\pi}{2}r/s^2} = \frac{10}{\pi}s$$

Η στροφορμή του δίσκου τη στιγμή εκείνη θα είναι:

$$L = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}2kg \cdot 0,04m^2 \cdot 5\frac{r}{s} = 0,2kg\frac{m^2}{s}$$

γ) Η ζητούμενη ισχύς είναι:

$$P = \tau\omega = I_{o\lambda}\alpha_\gamma\omega = (\frac{1}{2}MR^2 + mr^2)\alpha_\gamma\omega = (\frac{1}{2}2kg \cdot 0,04m^2 + 1kg \cdot 0,01m^2)\frac{\pi}{2}\frac{r}{s^2} \cdot 5\frac{r}{s} = \frac{\pi}{8}W$$

Η προσφερόμενη ενέργεια υπολογίζεται μέσω του θεωρήματος έργου-ενέργειας για το σύστημα δίσκου-σώματος:

$$\Delta K = W \rightarrow \frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2 - 0 = W_F \rightarrow W_F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega^2 = 0,625J$$

11. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μια διάταξη αντίστοιχη του ΄΄καταπέλτη΄΄ των αρχαίων. Η διάταξη αποτελείται από μια λεπτή, ομογενή ράβδο, μήκους L=2m και μάζας M=4kg, στα άκρα της οποίας είναι προσαρμοσμένα ένας ομογενής, συμπαγής δίσκος ακτίνας R=0,5m και μάζας m=0,5kg και ένα ημισφαιρικό στέλεχος, μάζας m' =0,4kg και

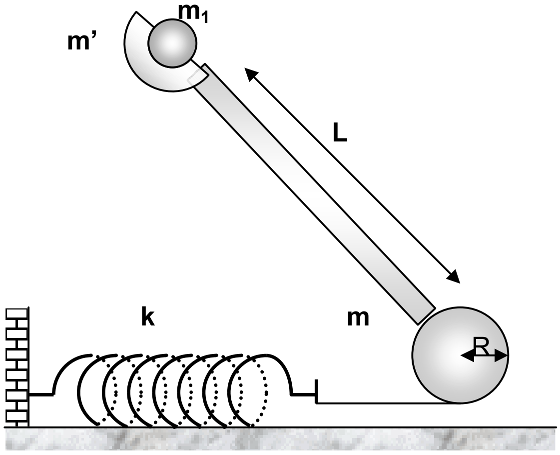
αμελητέων διαστάσεων. Στο κέντρο του δίσκου διέρχεται οριζόντιος άξονας, κάθετος στο επίπεδό του, γύρω από τον οποίο το σύστημα μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Στην περιφέρεια του δίσκου είναι τυλιγμένο, αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητο. Αρχικά, το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο να σχηματίζει γωνία θ=30^o με την κατακόρυφη διεύθυνση. Εκτρέπουμε τη ράβδο, στρέφοντάς τη αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, μέχρι αυτή να γίνει οριζόντια και την αφήνουμε ελεύθερη, ενώ μέσα στο ημισφαιρικό στέλεχος, έχουμε τοποθετήσει μικρή σφαιρική οβίδα, μάζας m_1=100g. Οταν η ράβδος βρεθεί σε κατακόρυφη διεύθυνση, το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Να βρεθούν:

α) Η τάση του νήματος στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος και η αποθηκευμένη στο ελατήριο ενέργεια παραμόρφωσης.

β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος.

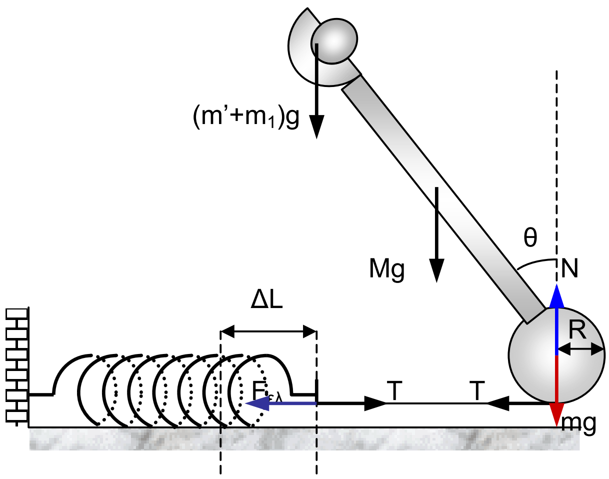
γ) Η ταχύτητα εκτόξευσης της οβίδας, όταν η ράβδος βρεθεί σε κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: g=10m/s^2, η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της I_{cm}=ML^2/12 και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας του δίσκου I_{cm}'=mR^2/2.



Λύση:

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος:



Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το κέντρο του δίσκου:

$$\sum\vec{\tau}=\vec{0}\rightarrow T\cdot R-Mg\frac{L}{2}\eta\mu\theta-(m'+m_1)gL\eta\mu\theta=0\longrightarrow TR=gL\eta\mu\theta\left(\frac{M}{2}+m'+m_1\right)\rightarrow$$

$$T=\frac{gL\eta\mu\theta\left(\frac{M}{2}+m'+m_1\right)}{R}=\frac{10\frac{m}{s^2}\cdot 2m\cdot\frac{1}{2}\cdot 2,5kg}{0.5m}=50N$$

Επειδή $T=F_{\varepsilon\lambda}$ εύκολα βρίσκουμε:

$$T=k\cdot\Delta L\rightarrow\Delta L=\frac{T}{k}=\frac{50N}{100N/m}=0,5m$$

Τελικά, η αποθηκευμένη στο ελατήριο ενέργεια παραμόρφωσης θα είναι:

$$U=\frac{1}{2}k\cdot\Delta L^2=\frac{1}{2}100\frac{N}{m}\cdot 0,25m^2=12,5J$$

β) Εφαρμόζουμε κατ' αρχήν το θεώρημα Steiner για τη ράβδο:

Ράβδος:

$$I_\rho=I_{cm}+Md^2=\frac{1}{12}ML^2+M\frac{(L+R)^2}{4}=\frac{M}{2}\left(L^2+\frac{(L+R)^2}{2}\right)\rightarrow$$

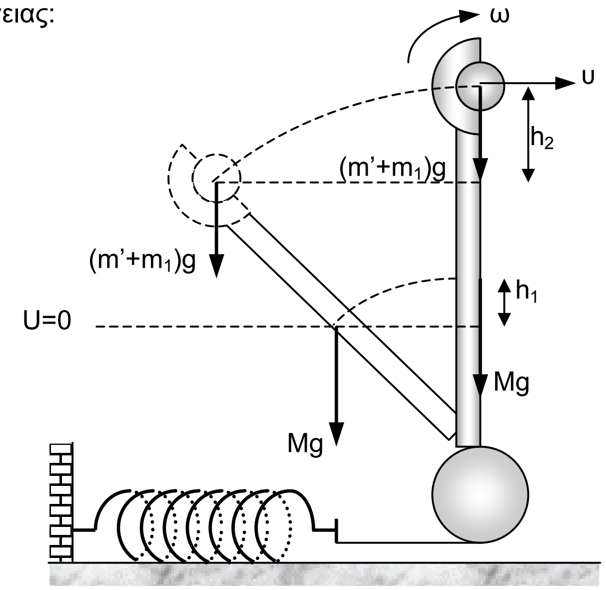
$$I_\rho=2kg\left(4m^2+3,125m^2\right)=14,25kg\cdot m^2$$

Τελικά:

$$I_{o\lambda}=I_\rho+I_\delta+(m'+m_1)(L+R)^2=I_\rho+\frac{1}{2}MR^2+(m'+m_1)(L+R)^2\rightarrow$$

$$I_{o\lambda}=14,25kg\cdot m^2+0,5kg\cdot m^2+3,125kg\cdot m^2=17,875kg\cdot m^2$$

γ) Σχεδιάζουμε την κατακόρυφη θέση του συστήματος και εφαρμόζουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:



ΑΔΜΕ:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$0+U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}+(m'+m_1)g\frac{L}{2}\eta\mu\theta=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2+Mgh_1+(m'+m_1)g\left(\frac{L}{2}\eta\mu\theta+h_2\right)\rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2+g\left(Mh_1+(m'+m_1)h_2\right)\quad(1)$$

Ομως από το σχήμα είναι προφανές ότι: $h_1 = \frac{L}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu 30^o) = \frac{L}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0{,}134m$ και $h_2 = L(1 - \sigma\upsilon\nu 30^o) = 0{,}268m$ οπότε με αντικατάστασή τους στην (1) τελικά παίρνουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{I_{o\lambda}}\left\{U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} - g\left[Mh_1 + (m' + m_1)h_2\right]\ \right\}} = 0{,}8r/s$$

Προφανώς, η ζητούμενη ταχύτητα της οβίδας θα είναι: u=ω(L+R)=0,8r/s 2,5m=2m/s

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: Κοϊνάκης Γιώργος
Φυσικός