α) Έστω $g(h) = h^{2009} + 9x - 10xh$ με $x > 1$. Έχουμε:

- $\lim_{h\to-\infty} g(h) = -\infty$ άρα υπάρχει $k < -1$ τέτοιο ώστε $g(k) < 0$
- $g(-1) = 19x - 1 > 0$ αφού $x > 1 > 1/19$
- $g(1) = 1 - x < 0$
- $\lim_{h\to+\infty} g(h) = +\infty$ άρα υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιο ώστε $g(\lambda) > 0$

Με βάση τα παραπάνω, διαπιστώνουμε με Bolzano ότι υπάρχουν

$$h_1 \equiv h_1(x) \in (k, -1),\ h_2 \equiv h_2(x) \in (-1, 1),\ h_3 \equiv h_3(x) \in (1, \lambda)$$

τέτοια ώστε

$$g\left(h_1(x)\right) = g\left(h_2(x)\right) = g\left(h_3(x)\right) = 0$$

για τα οποία μάλιστα ισχύει

$$h_1(x) < h_2(x) < 1 < h_3(x)$$

όπως θέλαμε. Ακόμα η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$g''(h) = 2009 \cdot 2008h^{2007}$$

Είναι $g''(h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$ μοναδικό. Αν τώρα υπήρχε και τέταρτη διακεκριμένη ρίζα $h_4(x)$ με

$$h_1(x) < h_2(x) < h_3(x) < h_4(x)$$

τότε από Rolle θα υπήρχαν

$$r_1(x) \in \left(h_1(x), h_2(x)\right),\ r_2(x) \in \left(h_2(x), h_3(x)\right),\ r_3(x) \in \left(h_3(x), h_4(x)\right)$$

με

$$g'\left(r_1(x)\right) = g'\left(r_2(x)\right) = g'\left(r_3(x)\right) = 0$$

Κατά συνέπεια και πάλι από Rolle θα υπήρχαν

$$q_1(x) \in \left(r_1(x), r_2(x)\right),\ q_2(x) \in \left(r_2(x), r_3(x)\right)$$

με

$$g''\left(q_1(x)\right) = g''\left(q_2(x)\right) = 0$$

άτοπο αφού όπως είδαμε η g'' έχει μοναδική ρίζα. Άρα οι τρεις ρίζες είναι και οι μοναδικές.

β) Για την $h_2(x)$ ισχύει ότι

$$h_2(x) \in (-1, 1) \implies |h_2(x)| < 1 \implies |h_2(x)|^{2009} < 1 \tag{1}$$

οπότε μιας και είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης, έχουμε:

$$h_2^{2009}(x) + 9x = 10xh_2(x) \overset{x>1}{\Longrightarrow} h_2(x) - \frac{9}{10} = \frac{h_2^{2009}(x)}{10x} \implies$$
$$\left|h_2(x) - \frac{9}{10}\right| = \left|\frac{h_2^{2009}(x)}{10x}\right| \overset{(1)}{<} \frac{1}{10x}$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h_2(x) = \frac{9}{10}}$$

Για την $h_1(x)$ ισχύει ότι

$$h_1(x) < -1 \tag{2}$$

οπότε

$$h_1^{2009}(x) + 9x = 10xh_1(x) \implies h_1^{2009}(x) = 10xh_1(x) - 9x \overset{(2)}{<} -10x - 9x = -19x \implies$$
$$-h_1^{2009}(x) > 19x \implies (-h_1(x))^{2009} > 19x \implies -h_1(x) > \sqrt[2009]{19x}$$

και αφού $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2009]{19x} = +\infty$ είναι και

$$\lim_{x\to+\infty} (-h_1(x)) = +\infty \implies \boxed{\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = -\infty}$$

Για την $h_3(x)$ ισχύει ότι

$$h_3(x) > 1 \tag{3}$$

οπότε

$$h_3^{2009}(x) + 9x = 10xh_3(x) \implies h_3^{2009}(x) = 10xh_3(x) - 9x \overset{(3)}{>} 10x - 9x = x \implies$$
$$h_3^{2009}(x) > x \implies h_3(x) > \sqrt[2009]{x}$$

και αφού $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2009]{x} = +\infty$ είναι και

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h_3(x) = +\infty}$$