Αποδείξεις θεωρίας

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

<u>Απόδειξη</u>

Αν $z_1 = α + βi$ και $z_2 = γ + δi$ τότε :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{α + βi + γ + δi} = \overline{(α + γ) + (β + δ)i} = (α + γ) - (β + δ)i$$

$$= (α - βi) + (γ - δi) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Δίνεται η εξίσωση $αz^2 + βz + γ = 0$, με $α , β , γ \in IR$ και $α \neq 0$.
Ν' αποδειχθεί ότι αν $Δ < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

<u>Απόδειξη</u>

$$αz^2 + βz + γ = 0 \Leftrightarrow αz^2 + βz = -γ \Leftrightarrow z^2 + \frac{β}{α}z = -\frac{γ}{α} \Leftrightarrow$$

$$z^2 + 2\frac{β}{2α}z + \left(\frac{β}{2α}\right)^2 = +\left(\frac{β}{2α}\right)^2 - \frac{γ}{α} \Leftrightarrow$$

$$\left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{β^2 - 4αγ}{4α^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{Δ}{4α^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{(-1)\cdot(-Δ)}{4α^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{i^2(\sqrt{-Δ})^2}{4α^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(z + \frac{β}{2α}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-Δ}}{2α}\right)^2 \Leftrightarrow z + \frac{β}{2α} = \pm\frac{i\sqrt{-Δ}}{2α} \Leftrightarrow$$

$$z = -\frac{β}{2α} \pm \frac{i\sqrt{-Δ}}{2α} \Leftrightarrow z = \frac{-β \pm i\sqrt{-Δ}}{2α}$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ν' αποδειχθεί ότι

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{και} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι έχουμε :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}$$

και επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> ***(όριο πολυωνυμικής συνάρτησης)***

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ πολυώνυμο και $x_0 \in \mathbb{R}$, ν' αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} P(x) &= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \dots + \lim_{x \to x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_0) \\
&= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \to x_0} x + \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5^o ***(Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)***
Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$ ισχύουν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, ν' αποδειχθεί ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \eta,\ x \in [\alpha , \beta]$.
Παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$
  αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιος, ώστε $g(x_0) = 0$ ή $f(x_0) = \eta$.
Ομοίως αν $f(\alpha) > f(\beta)$.

ΘΕΜΑ 6^o
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0, τότε ν' αποδειχθεί ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη
Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

ΘΕΜΑ 7ο

Ν' αποδειχθεί ότι η σταθερή συνάρτηση f, με $f(x) = c$ είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Απόδειξη

Αν x_0 ένα σημείο του IR, τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Επομένως $(c)' = 0$.

ΘΕΜΑ 8ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Απόδειξη

Αν x_0 ένα σημείο του IR, τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

Επομένως $(x)' = 1$.

ΘΕΜΑ 9ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = x^\nu$, $\nu \in IN - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$.

Απόδειξη

Αν x_0 ένα σημείο του IR, τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + ... + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1})}{x - x_0}$$

$$= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + ... + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}$$

οπότε $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + ... + xx_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1})$$

$$= x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + ... + x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} = \nu \cdot x_0^{\nu-1}$$

Επομένως $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$.

ΘΕΜΑ 10ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη

Αν x_0 ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Επομένως $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΜΑ 11ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με f (x) = ημx είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει f΄(x) = συνx, δηλαδή (ημx)΄ = συνx.

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x + h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu h \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}$$

και επειδή $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0$ και $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\eta\mu h}{h} = 1$

έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$

Επομένως (ημx)΄ = συνx.

ΘΕΜΑ 12ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με f (x) = συνx είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει f΄(x) = - ημx, δηλαδή (συνx)΄ = - ημx.

Απόδειξη

Για κάθε $x \in$IR και $h \neq 0$ ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{συν(x+h)-συνx}{h} = \frac{συνx \cdot συνh - ημh \cdot ημx - συνx}{h}$$

$$= συνx \cdot \frac{συνh-1}{h} - ημx \cdot \frac{ημh}{h}$$

και επειδή $\lim_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h} = 0$ και $\lim_{h\to 0}\frac{ημh}{h} = 1$

έχουμε $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = συνx \cdot 0 - ημx \cdot 1 = -ημx$

Επομένως (συνx)΄ = - ημx.

ΘΕΜΑ 13ο

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

και επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

Επομένως $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

<u>ΘΕΜΑ 14ο</u>

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in IN^*$ είναι παραγωγίσιμη στο IR^* και ισχύει $f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$.

<u>Απόδειξη</u>

Για κάθε $x \in IR^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{\nu} - 1 \cdot (x^{\nu})'}{\left(x^{\nu}\right)^2} = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

Επομένως $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$.

<u>ΘΕΜΑ 15ο</u>

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = εφx$ είναι παραγωγίσιμη στο $IR_1 = IR - \{x \,/\, συνx = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2x}$, δηλαδή

$$(εφx)' = \frac{1}{συν^2x}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Για κάθε $x \in IR_1$ έχουμε :

$$(εφx)' = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)' \cdot συνx - ημx \cdot (συνx)'}{συν^2x}$$

$$= \frac{συνx \cdot συνx + ημx \cdot ημx}{συν^2x} = \frac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x} = \frac{1}{συν^2x}$$

Επομένως $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2x}$.

ΘΕΜΑ 16^{o}

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in IR - Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

Απόδειξη

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ell n x}$.

Αν θέσουμε $u = \alpha \cdot \ell n x$ τότε $y = e^{u}$ και

$$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ell n x} \cdot (\alpha \ell n x)' =$$

$$= x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Επομένως $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

ΘΕΜΑ 17^{o}

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x} \cdot \ell n\alpha$, δηλαδή $(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \cdot \ell n\alpha$.

Απόδειξη

Για κάθε $\alpha > 0$ έχουμε $y = \alpha^{x} = e^{x \ell n\alpha}$.

Αν θέσουμε $u = x \cdot \ell n\alpha$ τότε $y = e^{u}$ και

$$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{x \ell n \alpha} \cdot (x \ell n \alpha)' = \alpha^{x} \cdot \ell n \alpha$$

Επομένως $(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \cdot \ell n\alpha$.

ΘΕΜΑ 18ο

Ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x) = \ell n|x|$, $x \in IR^*$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή $\left(\ell n|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

Απόδειξη

- Αν $x > 0$ έχουμε $\left(\ell n|x|\right)' = \left(\ell n x\right)' = \frac{1}{x}$.
- Αν $x < 0$ έχουμε $y = \ell n|x| = \ell n(-x)$,
  οπότε αν θέσουμε όπου $u = -x$ έχουμε
  $y' = \left(\ell n u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Επομένως $\left(\ell n|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

ΘΕΜΑ 19ο

Αν μια συνάρτηση f

- είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε ν' αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in Δ$.

- Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, θα είναι $f'(\xi) = 0$ άρα
  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$
- Αν $x_1 > x_2$ τότε όμοια εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x_2, x_1]$ αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) = f(x_2)$.

ΘΕΜΑ 20ο

Αν οι συναρτήσεις f και g

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε
$f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, που είναι συνεχής στο Δ και για οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει
$h'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0$.
Τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα Δ.
Δηλαδή υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε $h(x) = c$, για κάθε $x \in \Delta$.
Οπότε $f(x) - g(x) = c$ ή $f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΜΑ 21ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε ν' αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$,
άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, θα είναι $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

<u>ΘΕΜΑ 22ο</u>

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε ν' αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$.
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$,
άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, θα είναι $f(x_2) - f(x_1) < 0$,
οπότε $f(x_1) > f(x_2)$.

<u>ΘΕΜΑ 23ο</u> ***(Θ. Fermat)***

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 (εσωτερικό σημείο του Δ) και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ν' αποδειχθεί ότι $f'(x_0) = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο*.
Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:
$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ **(1)**.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε από την (1) έχουμε
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \text{ άρα και } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad (2)$$
- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε από την (1) έχουμε
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \text{ άρα και } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι $f'(x_0) = 0$.

**Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.*

<u>ΘΕΜΑ 24ο</u>

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε ν' αποδειχθεί ότι

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$.

<u>Απόδειξη</u>

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, διότι
  $G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + (c)' = f(x) + 0 = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ.
  Τότε $G'(x) = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
  Άρα σύμφωνα με γνωστό πόρισμα υπάρχει μια σταθερά $c \in IR$, τέτοια ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

<u>ΘΕΜΑ 25ο</u>

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α , β] και G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β], ν' αποδειχθεί ότι

$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

<u>Απόδειξη</u>

Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α , β]

Επειδή η G είναι μια παράγουσα της f στο [α , β],
θα υπάρχει $c \in IR$ τέτοιο ώστε $G(x) = F(x) + c$ (1)

Από την (1) για $x = \alpha$, έχουμε:

$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)\,dt + c = c$, άρα $G(\alpha) = c$.

Επομένως $G(x) = F(x) + G(\alpha)$ (2)

Από την (2) για $x = \beta$, έχουμε:

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + G(\alpha)$

Άρα τελικά $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.