ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1^o

Α.1. Θεωρία

Α.2. $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, αν $\bar{x} > 0$, ενώ $CV = \frac{s}{-\bar{x}}$, αν $\bar{x} < 0$.

Β. α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΣΩΣΤΟ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΛΑΘΟΣ , **ε.** ΣΩΣΤΟ , **στ.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2^o

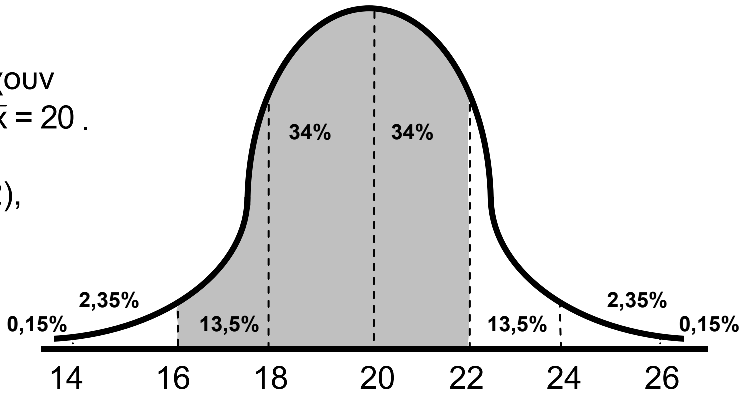
α. Πρέπει $x > 0$, άρα $\mathbf{A_f = (0\ ,\ +\infty)}$.

β. $f'(x) = (\alpha \ell n x - \beta x^2)' = \frac{\alpha}{x} - 2\beta x,\ x > 0.$

γ. $A\,(1\ ,\ 1) \in C_f \Leftrightarrow f\,(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ell n 1 - \beta \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow -\beta = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -1}$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $A\,(1\ ,\ 1)$ είναι η $y = 3x - 2$,
άρα $f'(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta = 3 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$.

δ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(f'(x)\cdot x^3\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\frac{\alpha}{x} - 2\beta x\right)\cdot x^3\right] = \left(\frac{\alpha}{2} - 4\beta\right)\cdot 8 = 4\alpha - 32\beta \overset{\alpha = 1}{\underset{\beta = -1}{=}} \mathbf{36}$

ΘΕΜΑ 3^o



α. Το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20, άρα $\bar{x} = 20$.
Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16 , 22), άρα $s = 2$.

β. Στο διάστημα $(\bar{x} - s\ ,\ \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων.
Στο διάστημα $(\bar{x} - 2s\ ,\ \bar{x} + 2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.
Στο διάστημα $(\bar{x} - 3s\ ,\ \bar{x} + 3s)$ βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων.
Άρα $\alpha = 2$.

γ. $R \approx 6s = 6 \cdot 2 = 12$

$f\,(x) = \frac{R}{2}x^2\ \ (\bar{x} + 4)x + 9s = 6x^2 - 24x + 18.$

$f'(x) = 12x - 24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f\,(x)$	↘		↗

$f_{min} = f\,(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = -6.$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α. ● $A = (A \cap B) \cup (A - B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

● $B = (A \cup B) - (A - B) = \{1, 2, 3, 5\}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

● $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$x \in \Omega$, άρα $x - 1 > 0$

$(x-1)\dfrac{x+1}{x-1} \geq 2(x-1) \Leftrightarrow$

$x + 1 \geq 2x - 2 \Leftrightarrow x - 2x \geq -1 - 2 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.

άρα $\Gamma = \{2, 3\}$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

β. Είναι $B \cap \Gamma = \{3\}$ και $P(B \cap \Gamma) = \dfrac{N(B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

$P(B - \Gamma) = P(B) - P(B \cap \Gamma) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

γ. $P((B - \Gamma) \cup (\Gamma - B)) = P(B) + P(\Gamma) - 2 \cdot P(B \cap \Gamma) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}2 = 0{,}4$

δ. $\bar{x} = \dfrac{\lambda + 3\lambda + 5\lambda}{3} = \dfrac{9\lambda}{3} = 3\lambda$

$$s^2 = \frac{(\lambda - 3\lambda)^2 + (3\lambda - 3\lambda)^2 + (5\lambda - 3\lambda)^2}{3} = \frac{4\lambda^2 + 0 + 4\lambda^2}{3} = \frac{8\lambda^2}{3}$$

$$s^2 > 24 \Leftrightarrow \frac{8\lambda^2}{3} > 24 \Leftrightarrow 8\lambda^2 > 72 \Leftrightarrow \lambda^2 > 9 \underset{\lambda > 0}{\overset{\lambda \in \Omega}{\Leftrightarrow}} \lambda > 3$$

άρα $\Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β.1. Θεωρία, **2.** Θεωρία

Γ. α. ΛΑΘΟΣ , **β.** ΛΑΘΟΣ , **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΛΑΘΟΣ , **ε.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η εφαπτομένη της C_f στο Α $(2 , e^2)$ είναι $y = -e^2x + 3e^2$,

τότε $f(2) = e^2$ και $f'(2) = -e^2$.

$f(2) = e^2 \Leftrightarrow e^2(\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 9) = e^2 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + 9 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4$ **(1)**

$f'(x) = [e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9)]' = (e^x)' \cdot (\alpha x^2 + \beta x + 9) + e^x \cdot (\alpha x^2 + \beta x + 9)'$

$= e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9) + e^x(2\alpha x + \beta) = e^x(\alpha x^2 + \beta x + 2\alpha x + \beta + 9)$

$f'(2) = -e^2 \Leftrightarrow e^2(\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 2\alpha \cdot 2 + \beta + 9) = -e^2 \Leftrightarrow 8\alpha + 3\beta = -10$ **(2)**

Από τις (1) και (2) παίρνουμε **$\alpha = 1$** και **$\beta = -6$**.

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -6$ είναι : $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$ και $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
f (x)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		τ. μέγιστο		τ. ελάχιστο		

τ. μέγιστο $f(1) = e^1(1^2 - 6 \cdot 1 + 9) = 4e$

τ. ελάχιστο $f(3) = e^3(3^2 - 6 \cdot 3 + 9) = 0$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Ονομάζουμε :

Α : «Ο πελάτης έχει πάρει στεγαστικό δάνειο»

Β : «Ο πελάτης έχει πάρει καταναλωτικό δάνειο»

Είναι $P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7$ και $P((A \cup B)') = 0,1$

$P((A \cup B)') = 0,1 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,9$ **(1)**

$P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$0,9 - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$ **(2)**

Άρα $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β. Α - Β : «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο στεγαστικό δάνειο»

Β - Α : «Ο πελάτης έχει πάρει μόνο καταναλωτικό δάνειο»

Είναι $P(A - B) = 0,6$.

$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow 0,7 = 0,6 + P(B - A)) \Leftrightarrow$

$P(B - A) = 0,1$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,1 = P(B) - 0,2 \Leftrightarrow$ **$P(B) = 0,3$**

Άρα **i. $P(B) = 0,3$** και **ii. $P(B - A) = 0,1$**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η 3η κλάση είναι $[7 , 7 + c)$ και η 4η κλάση είναι $[7 + c , 7 + 2c)$.

Για την τέταρτη κλάση έχουμε :

$$x_4 = \frac{7 + c + 7 + 2c}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{14 + 3c}{2} \Leftrightarrow 14 + 3c = 20 \Leftrightarrow c = 2$$

β. Αν $f_2 = x$ τότε $f_4 = 2x$.

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + x + 0,3 + 2x = 1 \Leftrightarrow 3x = 0,6 \Leftrightarrow x = 0,2$

Άρα $f_2 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$.

Απουσίες	x_i	f_i	x_if_i
[3 , 5)	4	0,1	0,4
[5 , 7)	6	0,2	1,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4
[9 , 11)	10	0,4	4
Σύνολα	-	1	**8**

γ. i. $\bar{x} = \sum x_i f_i = 8$

ii. α΄ τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	7,2
[7 , 9)	8	0,3	2,4	19,2
[9 , 11)	10	0,4	4	40
Σύνολα	-	1	**8**	**68**

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2\nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2\nu_i}{\nu} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2\frac{\nu_i}{\nu} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}^2 \Rightarrow s^2 = 68 - 8^2 = 68 - 64 = 4, \text{ άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

β΄ τρόπος

Απουσίες	x_i	f_i	x_if_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2f_i$
[3 , 5)	4	0,1	0,4	-4	16	1,6
[5 , 7)	6	0,2	1,2	-2	4	0,8
[7 , 9)	8	0,3	2,4	0	0	0
[9 , 11)	10	0,4	4	2	4	1,6
Σύνολα	-	1	**8**	-	-	**4**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2\frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i \Rightarrow s^2 = 4$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. α. Θεωρία **β. i)** 1, **ii)** 0.

Γ.1. α. ΣΩΣΤΟ **β.** ΣΩΣΤΟ **γ.** ΣΩΣΤΟ

Γ.2. $f_1'(x) = e^x$, $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f_3'(x) = συνx$, $f_4'(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x^2 - x + 1 \neq 0$, (ισχύει για κάθε $x \in IR$, διότι $Δ = -8 < 0$). Άρα $x \in IR$.

β. $$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} = -\frac{1}{3}$$

γ. $$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - x + 1}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2 - x + 1) - x \cdot (x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	**-∞**	**-1**		**1**	**+∞**
f´(x)	-	0	+	0	-
f (x)	↘		↗		↘
		τ. ελ.		τ. μ.	

Η f είναι γν. φθίνουσα στα $(-\infty , -1]$ και $[1 , +\infty)$,
ενώ είναι γν. αύξουσα στο $[-1 , 1]$.

τοπ. ελάχιστο $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} = -\dfrac{1}{3}$ και

τοπ. μέγιστο $f(1) = \dfrac{1}{1^2 - 1 + 1} = 1$

ΘΕΜΑ 3ο

α. ● $0 \leq \ell n(x - 1) < \ell n3 \Leftrightarrow \ell n1 \leq \ell n(x - 1) < \ell n3$
και επειδή η συνάρτηση g, με $g(x) = \ell nx$ είναι γνησίως αύξουσα
$1 \leq x - 1 < 3 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4$, άρα $Α = \{2 , 3\}$

● $(x^2 - 5x) \cdot (x - 1) = -6 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (x^2 - 5x) \cdot (x - 1) + 6 \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 1) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$, άρα $Β = \{1 , 2 , 3\}$

- Είναι $Α \subseteq Β$ άρα $Α - Β = \varnothing$ και $\mathbf{P(Α - Β) = 0}$
- Είναι $Α' = \{1 , 4 , 5\}$ άρα $Β \cup Α' = Ω$ και $\mathbf{P(Β \cup Α') = 1}$

β. Είναι $Α' = \{1 , 4 , 5\}$, $Β' = \{4 , 5\}$, άρα $Α' \cup Β' = Α'$ και

$$P(Α' \cup Β') = P(Α') = 1 - P(Α) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathbf{P(Α' \cup Β') = \frac{3}{4}}$$

γ. Είναι $Α \cup Χ = Β$, άρα
$Χ = \{1\} = Χ_1$ ή $Χ = \{1 , 2\} = Χ_2$ ή $Χ = \{1 , 3\} = Χ_3$ ή $Χ = \{1 , 2 , 3\} = Β$

- Είναι $Χ_1 \subseteq Χ_2$, $Χ_1 \subseteq Χ_3$ και $Χ_1 \subseteq Β$,

άρα $_{min}P(Χ) = P(Χ_1) = P(1) = P(Β - Α) = \mathbf{\dfrac{1}{8}}$

- Επίσης $X_1 \subseteq B$, $X_2 \subseteq B$ και $X_3 \subseteq B$,

  άρα $_{max}P(X) = P(B) = P(A) + P(B - A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{8}}$

ΘΕΜΑ 4^o

α. Αφού $\nu = 11$ και $\delta = 6$, τότε αν γράψουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά, 5 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 6.

Έχουμε ότι οι παρατηρήσεις 2 , 3 , 5 , 5 , 5 είναι μικρότερες του 6, άρα οι παρατηρήσεις α , β , γ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6.

Επομένως $6 \le \alpha < \beta < \gamma$.

$R = 8$ άρα* $\gamma - 2 = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 10}$

*Η μεγαλύτερη τιμή είναι το γ και όχι το 8 διότι αν ήταν το 8, τότε $R = 6$.

$$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{\nu} \Rightarrow 6 = \frac{41 + \alpha + \beta + \gamma}{11} \overset{\gamma=10}{\Leftrightarrow} 41 + \alpha + \beta + 10 = 66 \Leftrightarrow$$

$\alpha = 15 - \beta$ **(1)**

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217 \underset{(1)}{\overset{\gamma=10}{\Leftrightarrow}} (15 - \beta)^2 + \beta^2 + 100 = 217 \Leftrightarrow$$

$$225 - 30\beta + \beta^2 + \beta^2 + 100 - 217 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\beta^2 - 30\beta + 108 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 15\beta + 54 = 0 \Leftrightarrow$$

$\beta = 9$ ή $\beta = 6$ (απορρίπτεται διότι $6 \le \alpha < \beta < \gamma = 10$)

Άρα $\boldsymbol{\beta = 9}$ και από την (1) $\overset{\beta=9}{\Rightarrow}$ $\boldsymbol{\alpha = 6}$

β. Για $\alpha = 6$, $\beta = 9$ και $\gamma = 10$ οι παρατηρήσεις είναι :

2 , 3 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10

$$s_x^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (5-6)^2 \cdot 3 + (6-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2 + (10-6)^2}{11}$$

$$= \frac{16 + 9 + 3 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16}{11} = \frac{58}{11}, \text{ άρα } \quad \mathbf{s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}}$$

$$CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} \Rightarrow CV_x^{\,2} = \frac{\frac{58}{11}}{36} = \frac{29}{198} > \frac{1}{100}$$

άρα $CV_x > \frac{1}{10}$.

Επομένως **το δείγμα δεν είναι ομοιογενές**.

γ. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε

- $\bar{y} = c_1 \cdot \bar{x} + c_2 \underset{\bar{y}=9}{\overset{\bar{x}=6}{\Leftrightarrow}} 9 = 6c_1 + c_2$ **(2)**
- $s_y = c_1 \cdot s_x \overset{s_y = 2s_x}{\Leftrightarrow} 2 \cdot s_x = c_1 \cdot s_x \overset{s_x \neq 0}{\Leftrightarrow} \mathbf{c_1 = 2}$

  (2) $\overset{c_1=2}{\Rightarrow} 9 = 12 + c_2 \Leftrightarrow \mathbf{c_2 = -3}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Β. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 93

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Γ. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. • $\alpha_4 = f_4 \cdot 360^0 \Leftrightarrow 108^0 = f_4 \cdot 360^0 \Leftrightarrow f_4 = 0,3$ ή $\mathbf{f_4 = \frac{3}{10}}$

Κλάσεις	x_i	f_i	$x_i f_i$
[20 , 40)	30	f_1	$30f_1$
[40 , 60)	50	f_1	$50f_1$
[60 , 80)	70	f_3	$70f_3$
[80 , 100)	90	0,3	27
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**	$\mathbf{27 + 80f_1 + 70f_3}$

• $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow 2\cdot f_1 + f_3 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,7 - 2f_1$ **(1)**

• $\bar{x} = \sum x_i f_i \Leftrightarrow 70 = 27 + 80f_1 + 70f_3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$70 = 27 + 80f_1 + 70(0,7 - 2f_1) \Leftrightarrow$

$70 = 27 + 80f_1 + 49 - 140f_1 \Leftrightarrow$

$60f_1 = 6 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$ ή $\mathbf{f_1 = f_2 = \frac{1}{10}}$

(1) $\overset{f_1 = 0,1}{\Rightarrow} f_3 = 0,7 - 2\cdot 0,1 \Leftrightarrow f_3 = 0,5$ ή $\mathbf{f_3 = \frac{5}{10}}$

β. i.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
[20 , 40)	30	5	0,1
[40 , 60)	50	5	0,1
[60 , 80)	70	25	0,5
[80 , 100)	90	15	0,3
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**50**	**1**

ii. Το πλήθος των μαθητών με βαθμολογία τουλάχιστον 60, είναι $v_3 + v_4 = 25 + 15 =$ **40 μαθητές**.

iii. Το ποσοστό των μαθητών με βαθμολογία από 50 ως 70, είναι

$\frac{f_2\%}{2} + \frac{f_3\%}{2} = \frac{10\%}{2} + \frac{50\%}{2} = \frac{60\%}{2} = \mathbf{30\%}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. • Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$
και επειδή οι πιθανότητες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, τότε
$P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$ **(1)**.

• Επίσης $0 < p < 1$, άρα $p - 1 < 0$ και $p + 1 > 1$.
Επομένως τα $p - 1$ και $p + 1$ δεν είναι πιθανότητες **(2)**

• $0 < p < 1 \overset{\cdot p>0}{\Leftrightarrow} 0 < p^2 < p \overset{\cdot p>0}{\Leftrightarrow} 0 < p^3 < p^2$

Επομένως $p^3 < p^2 < p$ **(3)**.

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι :

$\mathbf{P(A \cap B) = p^3}$, $\mathbf{P(A) = p^2}$ και $\mathbf{P(A \cup B) = p}$.

β. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(B) = P(A \cap B) - P(A) + P(A \cup B) \Leftrightarrow$

$\mathbf{P(B) = p^3 - p^2 + p}$

γ. $P(B - A) > P(A - B) \Leftrightarrow$

$P(B) - P(A \cap B) > P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(B) > P(A) \Leftrightarrow$

$p^3 - p^2 + p > p^2 \Leftrightarrow$

$p^3 - 2p^2 + p > 0 \Leftrightarrow$

$p \cdot (p^2 - 2p + 1) > 0 \Leftrightarrow$

$p \cdot (p - 1)^2 > 0$ που ισχύει διότι $p > 0$ και $p \neq 1$.

Επομένως $\mathbf{P(B - A) > P(A - B)}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $x + 2y = 200 \Leftrightarrow 2y = 200 - x \Leftrightarrow y = 100 - \frac{1}{2}x$.

Εμβαδόν περιφραγμένης περιοχής $= x \cdot y \Leftrightarrow$

$f(x) = x \cdot (100 - \frac{1}{2}x) \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2,\ 0 < x < 200.}$

- $\mathbf{x > 0}$
- $y > 0 \Leftrightarrow 100 - \frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow$
  $200 - x > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x < 200}$

β. $f'(x) = 100 - x$

x	0		100		200
$f'(x) = 100 - x$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 100$ την τιμή

$f(100) = 100 \cdot 100 - \frac{1}{2}100^2 = 10000 - 5000 =$ **$5000\ m^2$.**

γ. $f'(100) = 100 - 100 = 0$

$f'(101) = 100 - 101 = -1$

$f'(102) = 100 - 102 = -2$

$f'(103) = 100 - 103 = -3$

$f'(104) = 100 - 104 = -4$

$$\bar{x} = \frac{0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4)}{5} = \frac{-10}{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{\bar{x} = -2}$$

δ. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε :

$\bar{x}' = \bar{x} + c = -2 + c = c - 2$ και

$s' = s$.

$$CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\bar{x}'|} = 2\frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|c-2|} = 2\frac{s}{|-2|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|c-2|} = 1 \Leftrightarrow |c-2| = 1 \Leftrightarrow c - 2 = 1 \text{ ή } c - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

$c = 3$ ή **$c = 1$**.

Σημείωση : Θα μπορούσε κάποιος να είχε υπολογίσει την τυπική απόκλιση.

$$s^2 = \frac{(0+2)^2 + (-1+2)^2 + (-2+2)^2 + (-3+2)^2 + (-4+2)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2} = s'$$

$$CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\bar{x}'|} = 2\frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{|c-2|} = 2\frac{\sqrt{2}}{|-2|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{|c-2|} = 1 \Leftrightarrow |c-2| = 1 \Leftrightarrow c - 2 = 1 \text{ ή } c - 2 = -1 \Leftrightarrow$$

$c = 3$ ή **$c = 1$**.