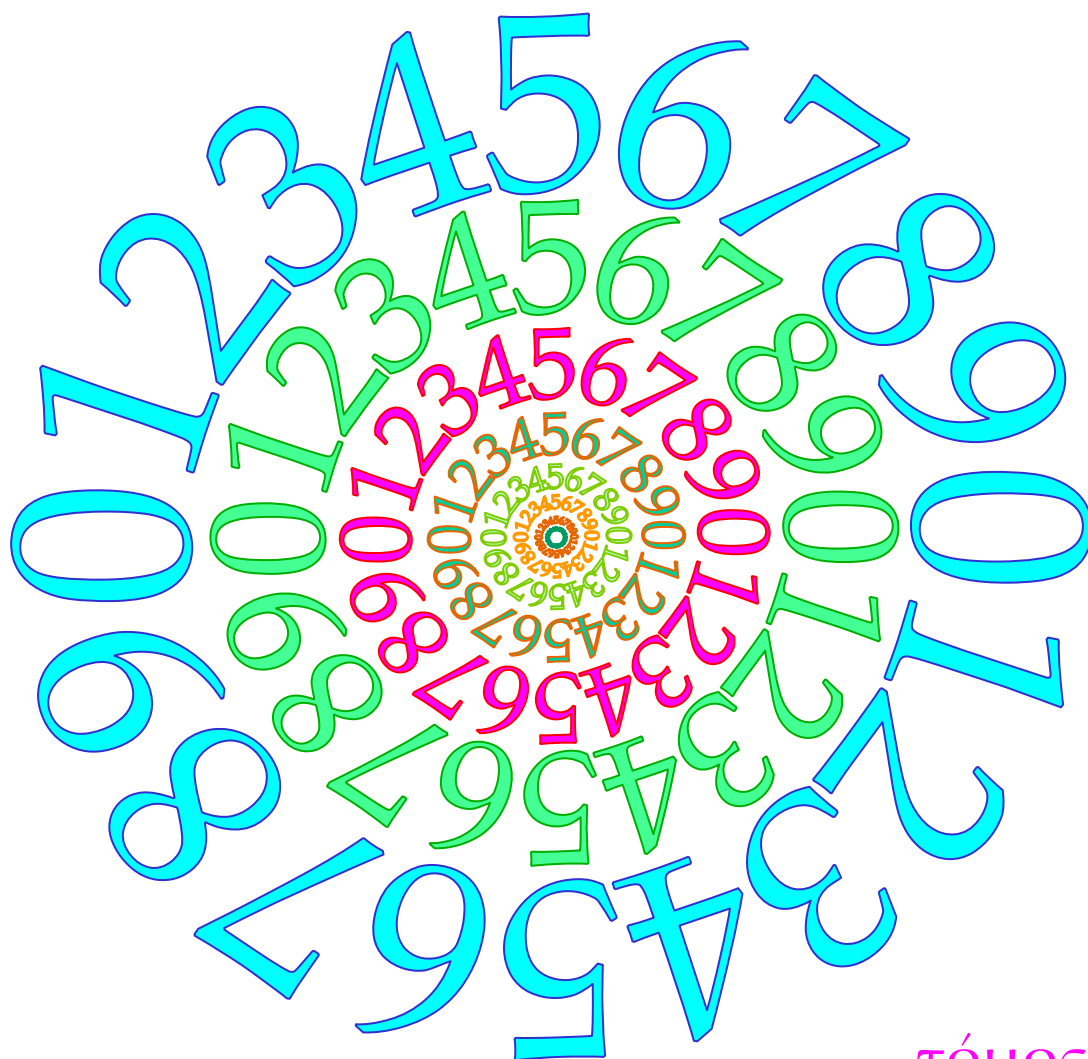


Μιχάλης Λάμπρου – Νίκος Κ. Σπανουδάκης



τόμος 1

# Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους



2007

# Περιεχόμενα

(ο πρώτος αριθμός σε μια γραμμή αναφέρεται στη σελίδα που αρχίζει το άρθρο και ο δεύτερος στη σελίδα που περιέχει τις απαντήσεις)

<b>Πρόλογος</b>	3	
<b>Διεθνής Μαθηματικός Διαγωνισμός "Καγκουρό"</b>	4	
<b>Περιεχόμενα</b>	5	
<b>Θέματα διαγωνισμού "Καγκουρό 2007"</b>		
Επίπεδο 1 (Γ' και Δ' Δημοτικού)	7	86
Επίπεδο 2 (Ε' και ΣΤ' Δημοτικού)	11	87
Επίπεδο 3 (Α' και Β' Γυμνασίου)	17	90
Επίπεδο 4 (Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου)	22	92
Επίπεδο 5 (Β' και Γ' Λυκείου)	27	95
<b>Μαθηματικά Δημοτικού</b>		
Γ' Δημοτικού		
Τετράγωνα και Ορθογώνια.	33	98
Πόσα λουλούδια έχει ο κήπος;	34	98
Λαβύρινθος.	35	98
Δ' Δημοτικού		
Σπηλιά με σεντούκια και δράκους.	36	99
Ζώα.	37	99
Στερεά σώματα.	38	99
Ε' Δημοτικού		
Πρόβλημα.	39	100
Πολλαπλάσια.	40	100
Διαδρομές σε κάστρο.	41	100
ΣΤ' Δημοτικού		
Βάψιμο τοίχου.	42	101
Κριτήρια διαιρετότητας.	44	101
Εμβαδά σχημάτων.	45	101
<b>Μαθηματικά Γυμνασίου</b>		
Α' Γυμνασίου		
Αθροίσματα αριθμών με όμοια ψηφία.	46	102
Β' Γυμνασίου		
Κριτήριο διαιρετότητας δια του 11.	49	102
Γ' Γυμνασίου		
Διεθνής αριθμός βιβλίου (ISBN).	52	103

## Μαθηματικά Λυκείου

### Α' Λυκείου

Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. 55 103

### Β' Λυκείου

Λογαριθμικοί κανόνες. 58

### Γ' Λυκείου

Συνεχείς συναρτήσεις σε ένα σημείο μόνο. 61 104

## Ιστορία των Μαθηματικών

Ένα αρχαίο Ελληνικό σύστημα αρίθμησης. 66 105

## Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Περίεργοι αριθμοί 1	68	
Περίεργοι αριθμοί 2	69	
Άπειρο	70	
Χωρίς λόγια	71	
Γρήγορες πράξεις	72	
μαθηματικά 1	73	
μαθηματικά 2	74	105
μαθηματικά 3	75	
Αριθμόλεξα 1, 2 και 3	76	106

## Γρίφοι

Γρίφος 1 - γινόμενο αριθμών	77	108
Γρίφος 2 - αριθμοί σε κύκλους	78	108
Γρίφος 3 - εμβαδά	79	109
Γρίφος 4 - πολλά γινόμενα	80	110
Γρίφος 5 - ζυγαριά	81	110
Γρίφος 6 - τετράγωνο με αθροίσματα	82	110
Γρίφος 7 - τετραγωνισμός	83	111

## Λύσεις στις Ασκήσεις του βιβλίου

Σύντομες απαντήσεις στα θέματα του διαγωνισμού "Καγκουρό 2007".	85
Αναλυτικές απαντήσεις στα θέματα του διαγωνισμού "Καγκουρό 2007".	86
Απαντήσεις στα Μαθηματικά Δημοτικού.	98
Απαντήσεις στα Μαθηματικά Γυμνασίου.	102
Απαντήσεις στα Μαθηματικά Λυκείου.	103
Απαντήσεις στο άρθρο της Ιστορίας των Μαθηματικών.	105
Απαντήσεις στα Διασκεδαστικά Μαθηματικά.	105
Απαντήσεις στους Γρίφους.	108

## Πράξεις μεταξύ αριθμών με όμοια ψηφία

Σε αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε αθροίσματα φυσικών αριθμών με μεγάλο πλήθος όμοιων ψηφίων (συνήθως εκατό ή παραπάνω).

Σε όλο το άρθρο οι τρεις τελείες (...) υποκαθιστούν κατάλληλο πλήθος ψηφίων όμοιων με τα διπλανά τους, εκτός αν από τα συμπραζόμενα φαίνεται κάτι διαφορετικό.

**Άσκηση:** Να βρείτε το άθροισμα  $11111+111$ .

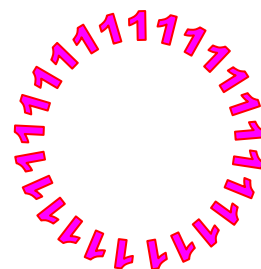
**Απάντηση:** Το βρίσκουμε με το γνωστό τρόπο. Φαίνεται στο πίνακα δίπλα.

$$\begin{array}{r} 11111 \\ + 111 \\ \hline 11222 \end{array}$$

**Άσκηση:** Όλα τα ψηφία δυο φυσικών αριθμών είναι 1. Ο ένας έχει 100 ψηφία (δηλαδή είναι ο  $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}}$ ) και ο άλλος 150 (δηλαδή είναι ο

$\underbrace{111\dots111}_{150 \text{ ψηφία}}$ ). Ποιο είναι το άθροισμά τους;

**Απάντηση:** Είναι  $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{111\dots111}_{150 \text{ ψηφία}} = \underbrace{111\dots111}_{50 \text{ ψηφία}} \underbrace{222\dots222}_{100 \text{ ψηφία}}$ .



### Ασκήσεις για λύση:

1. Να βρείτε τα αθροίσματα:

α)  $\underbrace{111\dots111}_{500 \text{ ψηφία}} + \underbrace{111\dots111}_{300 \text{ ψηφία}}$ ,

β)  $\underbrace{111\dots111}_{200 \text{ ψηφία}} + \underbrace{111\dots111}_{200 \text{ ψηφία}}$ .

2. Να βρείτε τη διαφορά:  $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} - \underbrace{111\dots111}_{60 \text{ ψηφία}}$ .

3. Να βρείτε το άθροισμα  $\underbrace{444\dots444}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{444\dots444}_{80 \text{ ψηφία}}$ .

**Άσκηση:** Να βρείτε το άθροισμα  $555555+5555$ .

**Απάντηση:**

1ος τρόπος: Ο γνωστός. Είναι  $555555+5555=561110$ .

2ος τρόπος: Έχουμε (με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας)  
 $555555+5555=5\cdot111111+5\cdot1111=5\cdot(111111+1111)$   
 $=5\cdot112222=561110$ .

$$\begin{array}{r} 555555 \\ + 5555 \\ \hline 561110 \end{array}$$

**Άσκηση:** Να βρείτε το άθροισμα  $\underbrace{555\dots555}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{555\dots555}_{30 \text{ ψηφία}}$ .

**Απάντηση:** Είναι

$$\begin{aligned} \underbrace{555\dots555}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{555\dots555}_{30 \text{ ψηφία}} &= 5 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + 5 \cdot \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ ψηφία}} = 5 \cdot \left( \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ ψηφία}} \right) \\ &= 5 \cdot \left( \underbrace{111\dots111}_{70 \text{ ψηφία}} \underbrace{222\dots222}_{30 \text{ ψηφία}} \right) = \underbrace{555\dots5}_{69 \text{ ψηφία}} \underbrace{6111\dots1110}_{29 \text{ ψηφία}}. \end{aligned}$$

### Ασκήσεις για λύση:

**4.** Να βρείτε τα αθροίσματα

α)  $\underbrace{555\dots555}_{200 \text{ ψηφία}} + \underbrace{555\dots555}_{100 \text{ ψηφία}},$     β)  $\underbrace{666\dots666}_{80 \text{ ψηφία}} + \underbrace{666\dots666}_{20 \text{ ψηφία}},$     γ)  $\underbrace{777\dots777}_{70 \text{ ψηφία}} + \underbrace{777\dots777}_{40 \text{ ψηφία}}.$

**Άσκηση:** Είναι σωστό ότι  $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\dots999}_{100 \text{ ψηφία}} = \underbrace{1000\dots000}_{101 \text{ ψηφία}};$

**Απάντηση:** Όχι. Είναι  $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\dots999}_{100 \text{ ψηφία}} = \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} + 9 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}}$   
 $= (1+9) \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} = 10 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ ψηφία}} = \underbrace{111\dots1110}_{101 \text{ ψηφία}}.$

**Άσκηση:** Να βρείτε το άθροισμα  $99999 + 999.$

**Απάντηση:** 1ος τρόπος: Ο γνωστός (και λίγο κουραστικός).

2ος τρόπος: Είναι  $99999 + 999 = 9 \cdot 11111 + 9 \cdot 111.$  Η συνέχεια αφήνεται ως άσκηση.

3ος τρόπος: Είναι

$$99999 + 999 = 100\,000 - 1 + 999 = 100\,000 + 998 = 100\,998.$$

**Άσκηση:** Ονομάζουμε Α τον αριθμό  $\underbrace{999\dots999}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\dots999}_{80 \text{ ψηφία}}.$  Οι επόμενες ερωτήσεις

αναφέρονται στον Α.

α) Πόσα ψηφία έχει;

β) Να βρείτε πιο ψηφίο είναι το

i) πρώτο,

ii) 21ο,

iii) 22ο,

iv) 50ό,

v) 80ό,

vi) 100ό,

vii) 101ο.

**Απάντηση:** Εφαρμόζοντας την ιδέα που περιέχεται στο τρίτο τρόπο της προηγούμενης άσκησης έχουμε

$$\begin{aligned} \underbrace{999\dots999}_{100 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\dots999}_{80 \text{ ψηφία}} &= \underbrace{1000\dots000}_{101 \text{ ψηφία}} - 1 + \underbrace{999\dots999}_{80 \text{ ψηφία}} \\ &= \underbrace{1000\dots000}_{101 \text{ ψηφία}} + \underbrace{999\dots9998}_{79 \text{ ψηφία}} = \underbrace{100\dots000}_{20 \text{ ψηφία}} \underbrace{999\dots9998}_{79 \text{ ψηφία}} \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα:

α) 101,

β) i) 1,                      ii) 0,                      iii) 9,  
iv) 9,                      v) 9,                      vi) 9,  
vii) 8.

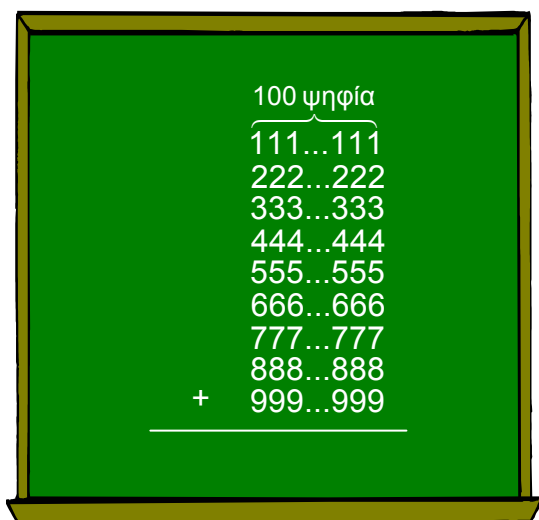
### Ασκήσεις για λύση:

5. Να βρείτε τα αθροίσματα

α)  $1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + 111111111$ ,

β)  $5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + 555555555$ ,

γ)  $9 + 99 + 999 + 9999 + \dots + 999999999$ .



**Άσκηση:** Να βρείτε το άθροισμα των εννέα αριθμών που εμφανίζονται στο διπλανό πίνακα. Όλοι οι αριθμοί έχουν από εκατό ψηφία ο καθένας.

**Απάντηση:** 1ος τρόπος: Το άθροισμα των ψηφίων των μονάδων είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων, εκατοντάδων κλπ, ίσο με  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ .

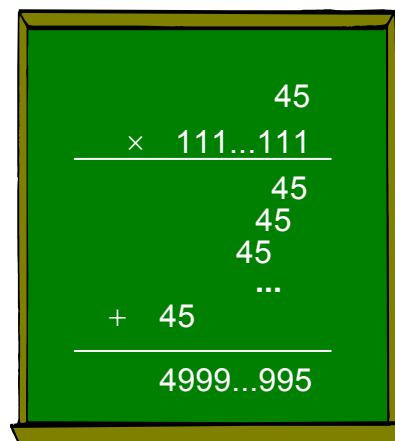
Επομένως κάνοντας την πρόσθεση με το συνηθισμένο τρόπο,

- το ψηφίο των μονάδων του αποτελέσματος είναι 5.
- το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων συν το κρατούμενο είναι  $45 + 4 = 49$ , άρα το ψηφίο των δεκάδων του αποτελέσματος είναι 9.
- όμοια όλα τα επόμενα ψηφία είναι 9, εκτός από το πρώτο που είναι 4.

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι ο αριθμός 
$$\begin{array}{r} 101 \text{ ψηφία} \\ 4 \overline{999 \dots 999} 5 \\ 99 \text{ ψηφία} \end{array}$$

2ος τρόπος: Ονομάζουμε B το ζητούμενο άθροισμα. Είναι

$$\begin{aligned} B &= \overbrace{11 \dots 11} + \overbrace{22 \dots 22} + \overbrace{33 \dots 33} + \overbrace{44 \dots 44} \\ &\quad + \overbrace{55 \dots 55} + \overbrace{66 \dots 66} + \overbrace{77 \dots 77} + \overbrace{88 \dots 88} + \overbrace{99 \dots 99} \\ &= \overbrace{11 \dots 11} + 2 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 3 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 4 \cdot \overbrace{11 \dots 11} \\ &\quad + 5 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 6 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 7 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 8 \cdot \overbrace{11 \dots 11} + 9 \cdot \overbrace{11 \dots 11} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot \overbrace{11 \dots 11} \\ &= 45 \cdot \overbrace{11 \dots 11} \end{aligned}$$



Στο πίνακα δίπλα φαίνεται ο υπολογισμός του τελευταίου γινομένου.

### Ασκήσεις για λύση:

6. Να βρείτε τα αθροίσματα

α)  $\Sigma = \overbrace{111 \dots 111}^{100 \text{ ψηφία}} + \overbrace{222 \dots 222}^{200 \text{ ψηφία}} + \overbrace{333 \dots 333}^{300 \text{ ψηφία}}$  β)  $T = \overbrace{111 \dots 111}^{100 \text{ ψηφία}} + \overbrace{222 \dots 222}^{200 \text{ ψηφία}} + \overbrace{333 \dots 333}^{300 \text{ ψηφία}} + \overbrace{444 \dots 444}^{400 \text{ ψηφία}}$ .

7. Να βρείτε τις διαφορές

α)  $\overbrace{222 \dots 222}^{200 \text{ ψηφία}} - \overbrace{111 \dots 111}^{100 \text{ ψηφία}}$ , β)  $\overbrace{111 \dots 111}^{200 \text{ ψηφία}} - \overbrace{222 \dots 222}^{100 \text{ ψηφία}}$ .

(Οι απαντήσεις στη σελίδα 102)

# Περίεργοι αριθμοί

Καθένας από τους αριθμούς 0, 1, 135, 144 είναι το γινόμενο του αθροίσματος των ψηφίων του επί το γινόμενο των ψηφίων του. Δηλαδή

$$0 = 0 \cdot 0$$

$$1 = 1 \cdot 1$$

$$135 = (1+3+5) \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5)$$

$$144 = (1+4+4) \cdot (1 \cdot 4 \cdot 4)$$

Έχει αποδειχθεί ότι αυτοί είναι οι μόνοι αριθμοί με αυτή την ιδιότητα.

Βιβλιογραφία: David W. Wilson. A038369 στην

"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."

(<http://www.research.att.com/~njas/sequences/A038369>)

Ένα κανονικό πολύγωνο με 65537 πλευρές μπορεί να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη.

Ο 1729 είναι ο μικρότερος αριθμός που γράφεται ως άθροισμα δύο κύβων με δυο διαφορετικούς τρόπους:

$$1729 = 1^3 + 12^3$$

$$= 9^3 + 10^3$$

Ο αριθμός 5851

- είναι πρώτος.
- το άθροισμα των ψηφίων του είναι 19.
- το άθροισμα των ψηφίων του τετραγώνου του  $5851^2 = 34234201$  είναι 19.
- το άθροισμα των ψηφίων του κύβου του  $5851^3 = 200304310051$  είναι 19.
- είναι ο μοναδικός αριθμός που έχει όλες μαζί τις προηγούμενες ιδιότητες.

Βιβλιογραφία: Lekraj Beedassy

(<http://primes.utm.edu/curios/ByOne.php?submitter=Beedassy>)

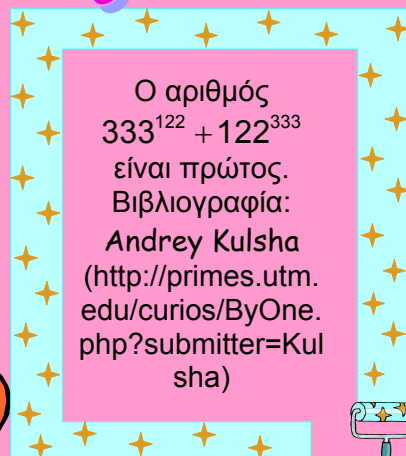
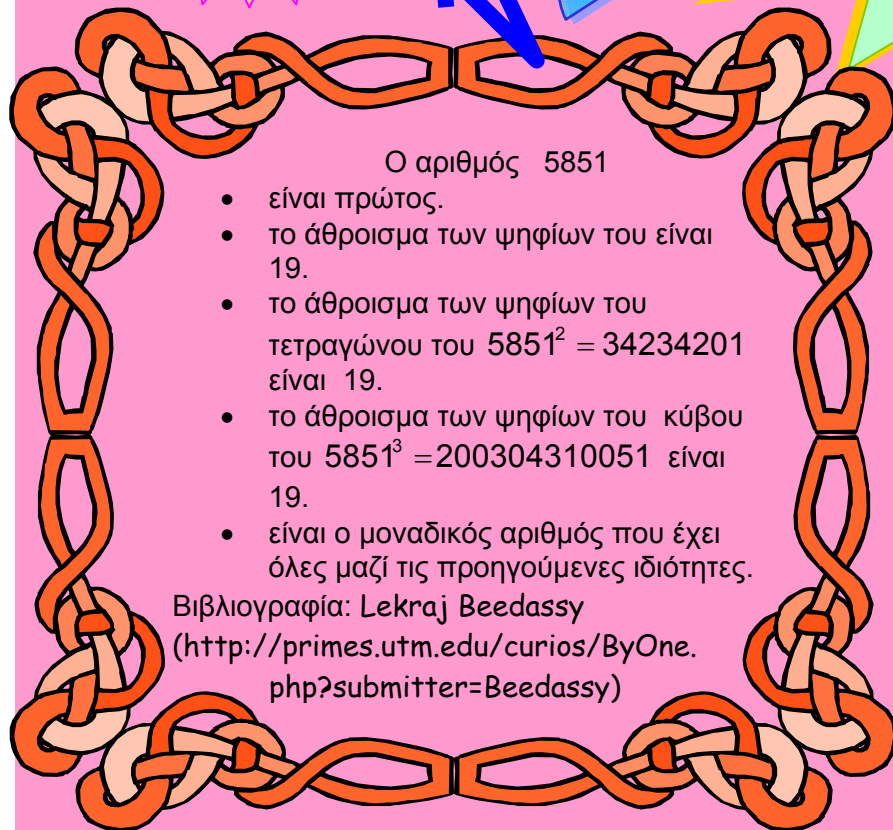
Ο αριθμός  $333^{122} + 122^{333}$

είναι πρώτος.

Βιβλιογραφία:

Andrey Kulsha

(<http://primes.utm.edu/curios/ByOne.php?submitter=Kulsha>)





# μαθηματικά 1



## Μαντεύουμε ένα άθροισμα

Γράφουμε κρυφά τον αριθμό 78 σε ένα χαρτάκι και το δίνουμε σε έναν φίλο να το φυλάξει, χωρίς να δει τον αριθμό.

Ρωτάμε τώρα τον φίλο να επιλέξει έναν αριθμό από το διπλανό 5x5 πίνακα, να τον κυκλώσει και μετά να διαγράψει όλους τους υπόλοιπους αριθμούς στην ίδια γραμμή ή στήλη του πίνακα. Αν για παράδειγμα επιλέξει το 14 στην τρίτη γραμμή, θα έχουμε την κατάσταση που δείχνει το Σχήμα 2. Με τους αριθμούς που μένουν ζητάμε από τον φίλο να επαναλάβει την διαδικασία άλλες τέσσερις φορές: Να κυκλώσει δηλαδή έναν αριθμό και μετά να διαγράψει κάθε φορά όλους τους υπόλοιπους αριθμούς στην ίδια γραμμή ή στήλη του πίνακα. Στο τέλος θα καταλήξει σε μία κατάσταση όπως, για παράδειγμα, στο Σχήμα 3. Του ζητάμε τώρα να προσθέσει όλους τους κυκλωμένους αριθμούς. Στο παράδειγμα είναι  $20 + 23 + 14 + 8 + 13 = 78$ . Ως δια μαγείας, ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος με τον αριθμό που είχαμε γράψει στο χαρτάκι πριν ξεκινήσει η διαδικασία.

14	12	20	17	11
20	18	26	23	17
16	14	22	19	13
11	9	17	14	8
13	11	19	16	10

14	<del>12</del>	20	17	11
20	<del>18</del>	26	23	17
<del>16</del>	14	<del>22</del>	<del>19</del>	<del>13</del>
11	<del>9</del>	17	14	8
13	<del>11</del>	19	16	10

Σχήμα 2

<del>14</del>	<del>12</del>	20	<del>17</del>	<del>11</del>
<del>20</del>	<del>18</del>	<del>26</del>	23	<del>17</del>
<del>16</del>	14	<del>22</del>	<del>19</del>	<del>13</del>
<del>11</del>	<del>9</del>	<del>17</del>	<del>14</del>	8
13	<del>11</del>	<del>19</del>	<del>16</del>	<del>10</del>

Σχήμα 3

**Ερμηνεία:** Το άθροισμα βγαίνει πάντα 78. Το σημαντικό όμως ερώτημα είναι το γιατί. Πριν διαβάσει τα παρακάτω ο αναγνώστης, καλό είναι να απαντήσει στα ερωτήματα

- Πώς κατασκευάστηκε ο παραπάνω πίνακας; Ποιο είναι το μυστικό του;
- Μπορούν να κατασκευαστούν άλλοι παρόμοιοι πίνακες, με διαφορετικό τελικό άθροισμα ή με διαφορετικό μέγεθος (π.χ. 6x6, 7x7, 100x100);

Η απάντηση και στο δεύτερο ερώτημα είναι καταφατική, μόλις ερμηνεύσουμε την κατασκευή του πρώτου πίνακα.

Πρόκειται για πίνακα πρόσθεσης: Γράφουμε αριθμούς στην εξωτερική περιφέρεια του πίνακα, όπως δείχνει το παράδειγμα στο Σχήμα 4. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι οι 6, 4, 12, 9, 3 οριζόντια και οι 8, 14, 10, 5, 7 κάθετα. Κατόπιν, στο εσωτερικό του πίνακα, γράφουμε το άθροισμα

	6	4	12	9	3
8	14	12	20	17	11
14	20	18	26	23	17
10	16	14	22	19	13
5	11	9	17	14	8
7	13	11	19	16	10

Σχήμα 4

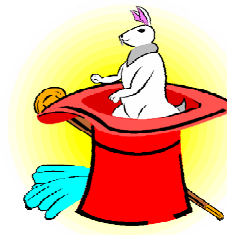


των δύο αριθμών στην κορυφή της εκάστοτε γραμμής και στήλης. Τώρα, η επιλογή ενός αριθμού που κυκλώνεται, στην παραπάνω διαδικασία, είναι ισοδύναμη με την επιλογή ενός ζεύγους αριθμών της περιφέρειας (ενός από τους οριζόντιους και ενός από τους κάθετους). Για παράδειγμα η επιλογή του 14 που κάναμε στο πρώτο βήμα, είναι ισοδύναμη με την επιλογή 4 + 10.

Το γεγονός ότι σε κάθε βήμα διαγράφουμε όλους τους υπόλοιπους αριθμούς στην ίδια γραμμή ή στήλη του πίνακα, σημαίνει ότι ποτέ δεν θα επιλέξουμε δύο φορές έναν από τους οριζόντιους ή κάθετους αριθμούς. Είναι σαφές ότι το άθροισμα των κυκλωμένων αριθμών ισούται με το άθροισμα όλων των αριθμών στην εξωτερική περιφέρεια του πίνακα. Εδώ είναι  $6+4+12+9+3+8+14+10+5+7 = 78$ , το ίδιο για όλες τις δυνατές επιλογές ζευγών από τους οριζόντιους με τους κάθετους.



## μαθηματικά 2



Ακολουθήσε τα επόμενα βήματα:

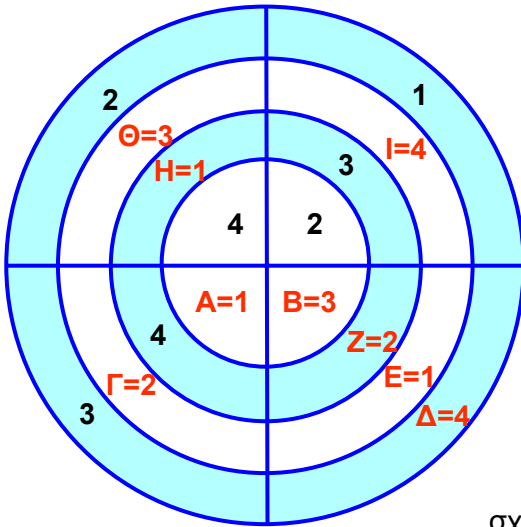
Βήματα		Παράδειγμα
1ο	Σημείωσε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό.	427
2ο	Πολλαπλασίασε τον επί 6.	$427 \cdot 6 = 2562$
3ο	Άνοιξε ένα βιβλίο σε μια τυχαία σελίδα. Σημείωσε τον αριθμό της σελίδας. Πρόσθεσε τα ψηφία του. Επανάλαβε το ίδιο για την επόμενη και τη μεθεπόμενη σελίδα.	σελ. 254. άθρ. ψηφ. : 11 σελ. 255. άθρ. ψηφ. : 12 σελ. 256. άθρ. ψηφ. : 13
4ο	Πολλαπλασίασε τους τρεις αριθμούς που βρήκες στο 3ο βήμα.	$11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$
5ο	Πρόσθεσε τα ψηφία του αριθμού του 4ου βήματος	$1 + 7 + 1 + 6 = 15$
6ο	Πρόσθεσε τους αριθμούς του 2ου και 5ου βήματος.	$2562 + 15 = 2577$
7ο	Πρόσθεσε τα ψηφία του αριθμού του 6ου βήματος	$2 + 5 + 7 + 7 = 21$
8ο	Κοίτα πόσα χαρτονομίσματα του ευρώ έχεις στη τσέπη σου. Μέτρησε την αξία τους σε ευρώ. Αν δεν έχεις καθόλου χαρτονομίσματα, υπολόγισε 25 ευρώ.	45
9ο	Πολλαπλασίασε τους αριθμούς του 7ου και 8ου βήματος.	$21 \cdot 45 = 945$
10ο	Πρόσθεσε 6 στον αριθμό του 9ου βήματος.	$945 + 6 = 951$
11ο	Διάρρησε τον αριθμό του 10ου βήματος διά του 5. Σημείωσε το πηλίκο και το υπόλοιπο.	$951 : 5$ πηλίκο: 190 υπόλοιπο: 1
12ο	Αφαίρεσε το υπόλοιπο από το πηλίκο που βρήκες στο 11ο βήμα.	$190 - 1 = 189$
13ο	Πρόσθεσε τα ψηφία του αριθμού του 12ου βήματος.	$1 + 8 + 9 = 18$
14ο	Άλλαξε τα ψηφία του αριθμού του 13ου βήματος με όποιο τρόπο θέλεις.	81
15ο	Πολλαπλασίασε τον αριθμό του 14ου βήματος επί τον εαυτό του.	$81 \cdot 81 = 6561$
16ο	Πρόσθεσε τα ψηφία του αριθμού του 15ου βήματος. Επανάλαβε το ίδιο στον αριθμό που βρήκες και ξανά μέχρι να βρεις μονοψήφιο.	$6 + 5 + 6 + 1 = 18$ $1 + 8 = 9$
	Βρήκες 9.	!

Μπορείς να το εξηγήσεις;

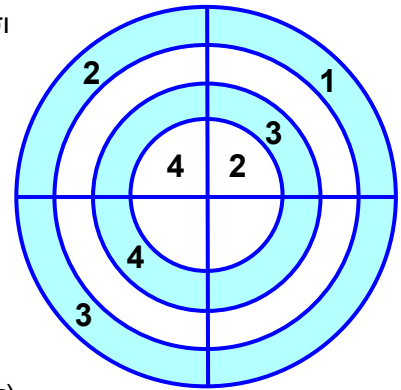
(Η απάντηση στη σελίδα 105)

## Γρίφος 2

Να συμπληρωθεί το σχήμα δεξιά, έτσι ώστε σε κάθε τομέα, σε κάθε δακτυλίδι και στον εσωτερικό μικρό κύκλο να βρίσκονται τα ψηφία 1 έως 4, από μία φορά το καθένα.



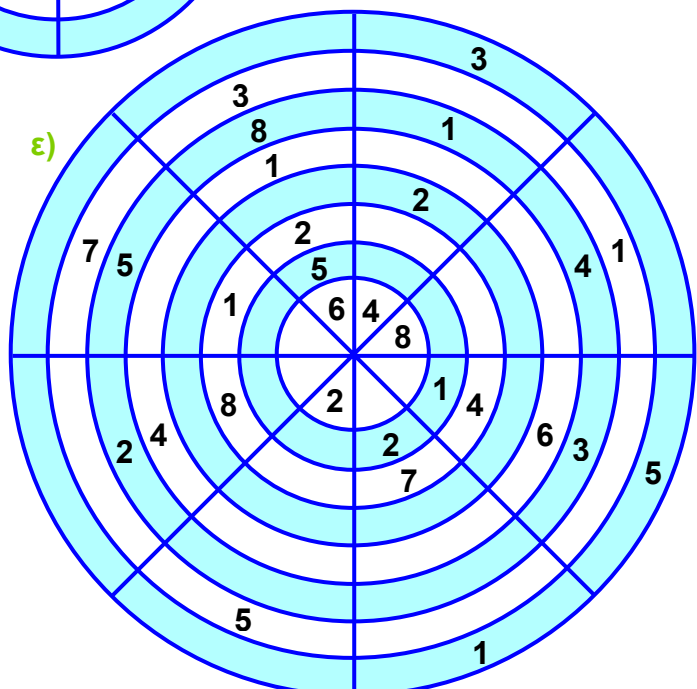
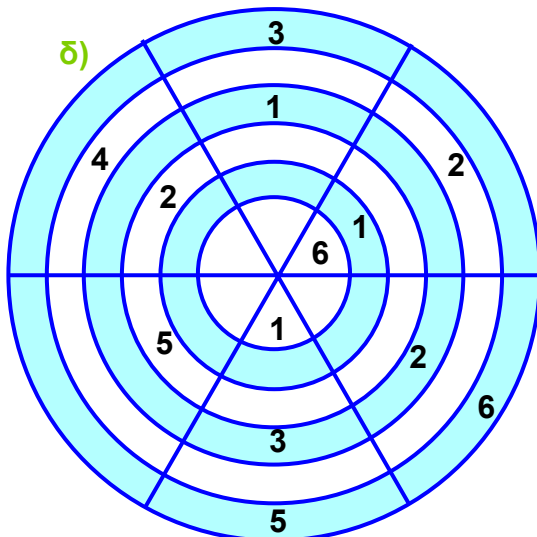
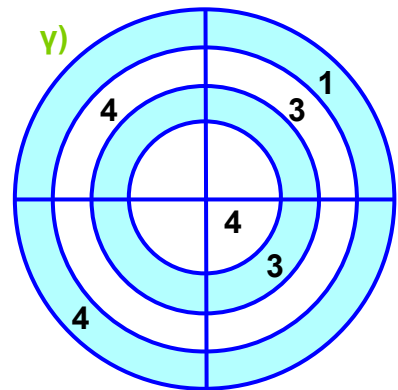
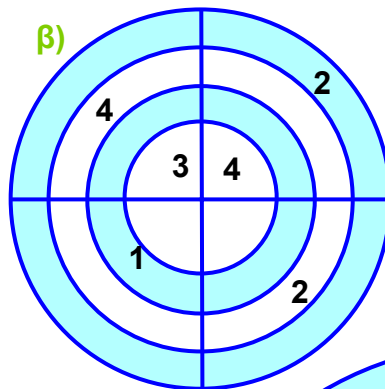
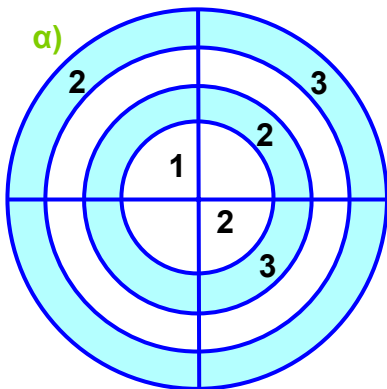
**Λύση:** Το A είναι 1 ή 3, λόγω του μέσα κύκλου. Δεν μπορεί να είναι 3, λόγω τομέα, άρα A=1. Οπότε B=3 (κύκλος), Γ=2 (τομέας), Δ=4 (δακτυλίδι). Το E από τον τομέα είναι 1 ή 2. Δεν είναι 2, από το δακτυλίδι. Άρα E=1. Έτσι Z=2 (τομέας), H=1 (δακτυλίδι), Θ=3 (τομέας) και I=4 (δακτυλίδι).



**Γρίφοι για λύση:** Να συμπληρωθούν τα ακόλουθα σχήματα έτσι ώστε σε κάθε τομέα, σε κάθε δακτυλίδι και στον εσωτερικό μικρό κύκλο να βρίσκονται από μία φορά το καθένα

τα ψηφία

- 1 έως 4, για τα σχήματα α), β), γ),
- 1 έως 6, για το σχήμα δ), και
- 1 έως 8, για το σχήμα ε).



(Οι απαντήσεις στη σελίδα 108)



Κάθε τετραγωνάκι έχει μικρούς (πράσινους) αριθμούς και μεγάλους (κόκκινους) αριθμούς.

Ο κάθε μικρός αριθμός είναι το άθροισμα των μεγάλων αριθμών του τετραγώνου στο οποίο βρίσκεται μαζί με τους αριθμούς στα γειτονικά τετράγωνα (δηλαδή εκείνα που έχουν με αυτό κοινή πλευρά, οριζόντια, κάθετα αλλά όχι διαγώνια). Τοποθετήστε τους μεγάλους αριθμούς 1 έως 9 στις σωστές θέσεις. Δύο από αυτούς έχουν ήδη τοποθετηθεί.

Λύση:

15 <b>α</b>	21 <b>β</b>	15 <b>4</b>
16 <b>δ</b>	29 <b>ε</b>	21 <b>ζ</b>
14 <b>3</b>	24 <b>θ</b>	16 <b>ι</b>

Είναι  $1+2+3+\dots+9=45$ . Επίσης  $\alpha+\beta+\delta=15$  και  $\zeta+\theta+\iota=16$ . Έτσι  $(\alpha+\beta+\delta)+(\zeta+\theta+\iota)+\epsilon+4+3=45$ , απ' όπου  $\epsilon=7$ . Αφαιρώντας τις ισότητες  $\alpha+\delta+3+\epsilon=16$  και  $\alpha+\beta+\delta=15$  κατά μέλη έχουμε  $3+\epsilon-\beta=1$ , οπότε  $\beta=9$ . Επίσης από την  $\beta+\zeta+4=15$  έχουμε  $\zeta=2$ . Μέχρι στιγμής έχουμε συμπληρώσει τις θέσεις που φαίνονται δίπλα.

15 <b>α</b>	21 <b>9</b>	15 <b>4</b>
16 <b>δ</b>	29 <b>7</b>	21 <b>2</b>
14 <b>3</b>	24 <b>θ</b>	16 <b>ι</b>

Είναι  $4+2+\iota+7=21$ , άρα  $\iota=8$ . Επίσης  $\theta+\iota+2=16$ , οπότε  $\theta=6$ . Ακόμη  $\delta+3+\theta=14$ , που δίνει  $\delta=5$ . Τέλος,  $9+\alpha+\delta=15$ , έτσι  $\alpha=1$ . Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται δίπλα.

15 <b>1</b>	21 <b>9</b>	15 <b>4</b>
16 <b>5</b>	29 <b>7</b>	21 <b>2</b>
14 <b>3</b>	24 <b>6</b>	16 <b>8</b>

**Παρατήρηση:** Ο αριθμός που βρίσκεται στο κέντρο μπορεί να υπολογιστεί αμέσως, αν δίνονται όλοι οι μικροί αριθμοί, χωρίς να χρειαστεί κανένας από τους μεγάλους. Πραγματικά, αν  $\gamma$  και  $\eta$  είναι οι μεγάλοι αριθμοί στις προφανείς θέσεις, τότε η παράσταση

$$A = (\delta + \alpha + \beta) + (\beta + \gamma + \zeta) + (\zeta + \iota + \theta) + (\theta + \eta + \delta) - (\beta + \delta + \epsilon + \zeta + \theta)$$

μπορεί να υπολογιστεί. Όμως

$$\begin{aligned} A &= \delta + \alpha + \beta + \beta + \gamma + \zeta + \zeta + \iota + \theta + \theta + \eta + \delta - \beta - \delta - \epsilon - \zeta - \theta \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \zeta + \eta + \theta + \iota - \epsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota) - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Στη παρένθεση του τελευταίου μέλους εμφανίζεται το άθροισμα όλων των μεγάλων αριθμών. Αυτό όμως ισούται με  $1+2+3+\dots+9=45$ , αφού έχει γίνει ενδεχομένως αναδιάταξη της σειράς των προσθετών.

Επομένως  $A = 45 - 2\epsilon$ . Αφού το  $A$  είναι γνωστό, το  $\epsilon$  μπορεί να υπολογιστεί.

**Γρίφοι για λύση:** Με τις ίδιες υποθέσεις να λύσετε τους παρακάτω γρίφους.

α)

18	15	17 <b>2</b>
16	31	14 <b>8</b>
19	17	20

β)

10	21	18
22	23	22
15	20	13 <b>1</b>

γ)

6		12
18		24

(Οι απαντήσεις στη σελίδα 110)