∀fter — maths

Μάρκος Βασίλης Αθηνα 2020

Πρόχειρες Σημειώσεις

Β΄ Λυκείου: Άλγεβρα

Περιεχόμενα

1 Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

Αρχικά, όπως θυμόμαστε, ένα γραμμικό σύστημα 2×2 είναι ένα σύνολο (ένα «σετ») από εξισώσεις που έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

- είναι, όλες κι όλες, μόνο δύο (2) (αυτό είναι πρώτο δυάρι στο 2×2),
- και στις δύο εξισώσεις μεφανίζονται συνολικά ακριβώς δύο (2) μεταβλητές (αυτό είναι το δεύτερο δυάρι στο 2×2) και
- κάθε μία από αυτές είναι γραμμική, δηλαδή είναι της μορφής:

  $$ax + by = c,$$

  οπότε είτε αναπαρίσταται ως μία ευθεία πάνω στο επίπεδο είτε ως όλο το επίπεδο είτε ως τίποτα πάνω στο επίπεδο.

Σχόλιο

Μία γραμμική εξίσωση που αναπαρίσταται ως ευθεία είναι η $2x + y = 4$, ενώ μία εξίσωση που αναπαρίσταται ως όλο το επίπεδο είναι η $0x + 0y = 0$ (αφού κάθε σημείο $M(x, y)$ την ικανοποιεί). Τέλος, μία εξίσωση που δεν αναπαρίσταται πάνω στο επίπεδο είναι η $0x + 0y = -3$.

Για παράδειγμα, το ακόλουθο:

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 2x - 4y &= 9 \end{cases}$$

είναι ένα γραμμικό σύστημα 2×2. Για αυτού του είδους τα συστήματα έχουμε τρεις τρόπους επίλυσης.

1.1 Μέθοδος της αντικατάστασης

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, επιλύουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη με στόχο να βρούμε έναν από τους δύο αγνώστους και, στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση, βρίσκουμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Παράδειγμα 1.1.

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 2x - 4y &= 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 2x - 4(6 - 3x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 2x - 24 + 12x = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 14x = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3\dfrac{33}{14} \\ x = \dfrac{33}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{15}{14} \\ x = \dfrac{33}{14} \end{cases}$$

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{33}{14}, -\frac{15}{14}\right)$.

□

1.2 Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Με αυτήν την μέθοδο, πολλαπλασιάζουμε και τις δύο (ή μόνο την μία, σε αρκετές περιπτώσεις) σχέσεις με κατάλλλους αριθμούς έτσι ώστε σε (τουλάχιστον) μία από τις δύο μεταβλητές να δημιουργηθούν αντίθετοι συντελεστές στις δύο εξισώσεις και στη συνέχεια προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη με αποτέλεσμα να προκύψει μία εξίσωση με μόνο έναν άγνωστο[1] (εκείνον που δεν δημιουργήθηκαν αντίθετοι συνετελεστές στις δύο εξισώσεις). Στη συνέχεια είναι εύκολο να υπολογίσουμε και τους δύο αγνώστους, όταν το σύστημα έχει λύση.

Σχόλιο

Συνήθως η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών οδηγεί σε λιγότερες ή απλούστερες πράξεις κατά την επίλυση και γι΄ αυτό συχνά είναι προτιμότερη.

Παράδειγμα 1.2.

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 2x - 4y &= 9 \end{cases} \overset{\times 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 12x + 4y &= 24 \\ 2x - 4y &= 9 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 14x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{33}{14}.$$

Τώρα, αντικαθιστώντας το x σε κάποια από τις δύο αρχικές εξισώσεις, εύκολα βρίσκουμε ότι $y = -\frac{15}{14}$, επομένως, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{33}{14}, -\frac{15}{14}\right)$.

□

1.3 Μέθοδος των οριζουσών

Εδώ χρειάζεται πρώτα να θυμηθούμε λίγη θεωρία.

Ορισμός 1.1: Ορίζουσα συστήματος

Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

τότε ορίζουμε την **ορίζουσα** του συστήματος να είναι ο πραγματικός αριθμός:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε και τις ορίζουσες του συστήματος ως προς x και y

[1] Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, ειδάλλως θα εμφανιστούν και στους δύο αγνώστους αντίθετοι συντελεστές με αποτέλεσμα να οδηγηθούμε σε εξίσωση της μορφής $0x + 0y = c$.

Ορισμός 1.2: Ορίζουσες ως προς x, y

Έστω ένα γραμμικό 2×2 σύστημα:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

και έστω D η ορίζουσά του. Αντικαθιστώντας την πρώτη στήλη (συντελεστές του x) με τους σταθερούς όρους (e, f), παίρνουμε την ορίζουσα ως προς x, D_x:

$$D_x = \begin{vmatrix} e & f \\ b & d \end{vmatrix} = ed - bf.$$

Ανάλογα, ορίζουμε και την ορίζουσα του συστήματος ως προς y, D_y, αντικαθιστώντας τη δεύτερη στήλη (συντελεστές του y) με τους σταθερούς όρους:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ec.$$

Μπορούμε να αποδείξουμε[2] ότι το σύστημα έχει λύση **αν και μόνον αν** $D \neq 0$ και ότι, τότε, η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right).$$

Παράδειγμα 1.3. Επομένως, για το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 2x - 4y &= 9 \end{cases}$$

έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 = -14 \neq 0,$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 9 \cdot 1 = -33,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 6 \cdot 2 = 15.$$

Επομένως,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-33}{-14} = \frac{33}{14},$$
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{-14} = -\frac{15}{14},$$

δηλαδή, η λύση είναι το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{33}{14}, -\frac{15}{14}\right)$.

□

[2] Βλ. Παράρτημα.

Η τελευταία μέθοδος έχει μία μικρή ταλαιπωρία για την επίλυση ενός συστήματος, κυρίως λόγω πράξεων, αλλά είναι μία πολύ καλή γενική στρατηγική αντιμετώπισης **παραμετρικών συστημάτων**, συστημάτων, δηλαδή, που έχουν και μία παράμετρο, πέρα από τους δύο αγνώστους τους.

Παράδειγμα 1.4. Να διερευνήσετε ως προς τις λύσεις του το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + 3y &= 1 \\ x + 3\lambda y &= 3. \end{cases}$$

Εδώ ξεκινάμε υπολογίζοντας την ορίζουσα του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 3 = 3(\lambda^2 - 1).$$

Τώρα, μιας και μας απασχολεί πότε η ορίζουσα αυτή είναι μηδέν (για να δούμε αν το σύστημα έχει μοναδική λύση ή όχι), επιλύουμε την εξίσωση:

$$D = 0 \Leftrightarrow 3(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Διακρίνουμε, λοιπόν, τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ τότε, $D \neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Υπολογίζουμε, επομένως, τις:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 9 = 3(\lambda - 3)$$
$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 1,$$

  οπότε οι λύσεις συναρτήσει του λ είναι όλα τα ζεύγη της μορφής:

$$(x, y) = \left(\frac{\lambda - 3}{\lambda^2 - 1}, \frac{3\lambda - 1}{3(\lambda^2 - 1)} \right), \ \forall \lambda \neq -1, 1.$$

- Αν $\lambda = -1$, τότε $D = 0$ και επομένως το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση. Αντικαθιστώντας, βλέπουμε ότι:

$$\begin{cases} -x + 3y &= 1 \\ x - 3y &= 3 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 0 = 4,$$

  το οποίο είναι αδύνατο, άρα το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

- Αν $\lambda = 1$, τότε $D = 0$ και επομένως το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση. Αντικαθιστώντας, βλέπουμε ότι:

$$\begin{cases} x + 3y &= 1 \\ x + 3y &= 3 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} 0 = 2,$$

  το οποίο είναι αδύνατο, άρα το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

Συνοψίζοντας, το σύστημα:

- έχει ακριβώς μία λύση, την:

$$(x, y) = \left(\frac{\lambda - 3}{\lambda^2 - 1}, \frac{3\lambda - 1}{3(\lambda^2 - 1)}\right),$$

  για $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και

- δεν έχει καμία λύση για $\lambda \in \{-1, 1\}$.

□

1.4 Γεωμετρική επίλυση και αναπαράσταση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος

Μπορούμε, αν και συνήθως δε μας ζητείται, να επιλύσουμε ένα σύστημα γραφικά. Ανεξάρτητα όμως από το αν αυτό ζητείται, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο ένα 2×2 γραμμικό σύστημα. Πριν προχωρήσουμε, να ξεκαθαρίσουμε ότι δε θα ασχοληθούμε καθόλου με τετριμμένα[3] συστήματα της μορφής:

$$\begin{cases} 0x + 0y &= 5 \\ 0x + 0y &= 0 \end{cases}$$

στο οποίο, η πρώτη εξίσωση παριστάνει το τίποτα (είναι αδύνατη) και η δεύτερη τα πάντα πάνω στο επίπεδο. Αντιθέτως, θα μας απασχολήσουν συστήματα με εξισώσεις της μορφής $ax + by = c$ όπου τουλάχιστον ένα από τα a, b είναι μη μηδενικό[4]. Έτσι, κάθε εξίσωση ενός τέτοιου συστήματος θα παριστάνει μία (και μοναδική) ευθεία πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο.

Μέσα από την παραπάνω συζήτηση είναι σαφές ότι η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος ανάγεται τελικά στην αναζήτηση του σημείου τομής δύο ευθειών. Για παράδειγμα, θεωρήστε τα παρακάτω τρία συστήματα:

$$(\mathsf{A}) \begin{cases} x + y &= 1 \\ x - 2y &= 0 \end{cases}, \quad (\mathsf{B}) \begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= -1 \end{cases}, \quad (\mathsf{C}) \begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{cases}$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση του καθενός φαίνεται στο σχήμα 1.1 και είναι άκρως διαφωτιστική. Στην περίπτωση του πρώτου συστήματος, που έχει μοναδική λύση, η «εικόνα» του στο επίπεδο είναι δύο τεμνόμενες και μη παράλληλες ευθείες, ενώ στην περίπτωση του δεύτερου, που είναι αδύνατο, η «εικόνα» του είναι δύο παράλληλες (και μη τεμνόμενες ευθείες). Τέλος, στην περίπτωση του τρίτου συστήματος που είναι *αόριστο* βλέπουμε ότι και οι δύο εξισώσεις αναπαριστούν την ίδια ευθεία.

Σχόλιο

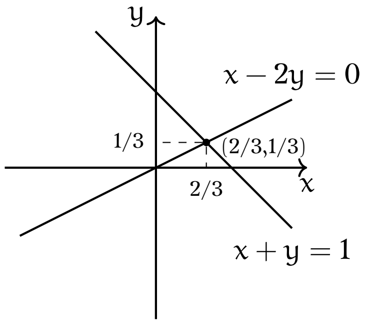
Μέσα από τη γεωμετρική αναπαράσταση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος βλέπουμε ότι δικαιολογείται πλήρως και ο χαρακτηρισμός του ως *γραμμικό* αφού, ουσιαστικά, μελετάμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

1.5 Επίλυση 2×2 μη γραμμικών συστημάτων

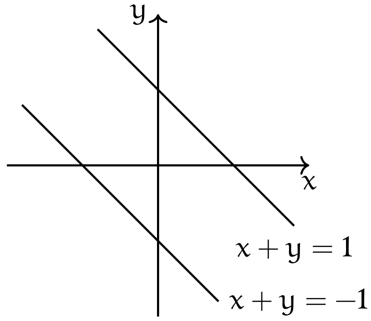
Όπως πριν, ας ξεκαθαρίσουμε πρώτα τι είναι ένα 2×2 μη γραμμικό σύστημα. Κατ΄ αναλογία, έχουμε την ακόλουθη περιγραφή για ένα μη γραμμικό 2×2 σύστημα:

[3] Να βρείτε την ετυμολογία της λέξης.

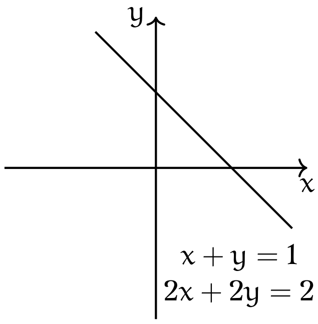
[4] Περισσότερο με τη γενική μορφή της εξίσωσης ευθείας θα ασχοληθούμε στα μαθηματικά προσανατολισμού.



(α΄) Το σύστημα A.



(β΄) Το σύστημα B.



(γ΄) Το σύστημα C.

Σχήμα 1.1: Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των τριών συστημάτων.

- έχει, όλες κι όλες, μόνο δύο (2) εξισώσεις (αυτό είναι, και πάλι, το πρώτο δυάρι στο 2×2),
- συνολικά και στις δύο εξισώσεις εμφανίζονται ακριβώς δύο (2) μεταβλητές (αυτό είναι το δεύτερο δυάρι στο 2×2) και
- τουλάχιστον μία από αυτές **δεν** είναι γραμμική, δηλαδή **δεν** είναι της μορφής:
$$ax + by = c,$$
με άλλα λόγια, περιγράφει μία καμπύλη διαφορετική από μία ευθεία (π.χ. κύκλο, έλλειψη, υπερβολή ή ό,τι άλλο).

Εδώ δεν θα εμβαθύνουμε ιδιαίτερα και ο μόνος τρόπος επίλυσης που έχουμε είναι η μέθοδος της αντικατάστασης ή/και, ό,τι άλλο μπορέσουμε να σκεφτούμε εκείνη τη στιγμή και το οποίο να είναι χρήσιμο για την απλοποίηση της των δύο εξισώσεων. Ας δούμε, ενδεικτικά, δύο παραδείγματα, μαζί με τη γεωμετρική τους ερμηνεία.

Παράδειγμα 1.5. Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2 \\ 3x + y &= 0. \end{cases}$$

Επιλύουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς y, οπότε παίρνουμε:

$$3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x$$

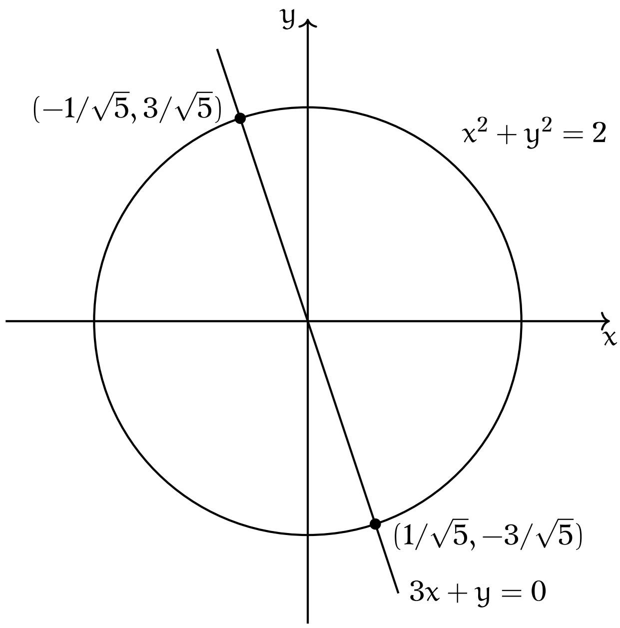
και αντικαθιστούμε στην πρώτη, οπότε:

$$x^2 + (-3x)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 2 \Leftrightarrow 10x^2 = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ή } x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $y = -3x$ και τις δύο τιμές για το x που βρήκαμε, εύκολα βρίσκουμε ότι οι δύο λύσεις του συστήματος είναι οι:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \text{ και } \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

Γεωμετρικά, η πρώτη εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{2}$ και η δεύτερη μία ευθεία, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Το σύστημα του παραδείγματος 1.5.

□

Παράδειγμα 1.6. Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} y - x^2 &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$

Εδώ λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y οπότε παίρνουμε:

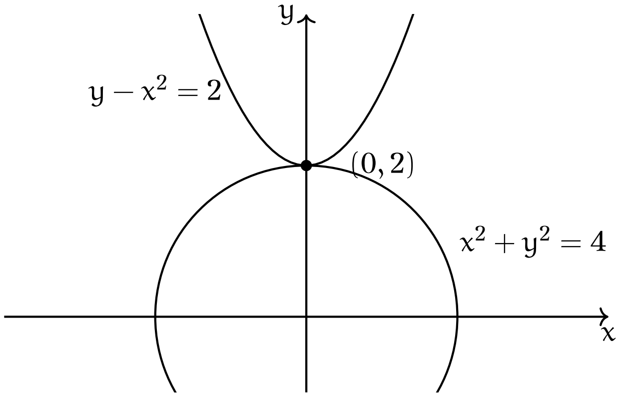
$$y = x^2 + 2$$

και αντικαθιστούμε στη δεύτερη, οπότε έχουμε:

$$x^2 + (x^2 + 2) = 4 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη βρίσκουμε $y = 2$, συνεπώς, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $A(0,2)$. Γεωμετρικά, η πρώτη εξίσωση αναπαριστά μια παραβολή με κορυφή το σημείο $(0,2)$ και η δεύτερη έναν κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.

□



Σχήμα 1.3: Το σύστημα του παραδείγματος 1.6.

1.6 Γραμμικά $\mu \times \nu$ συστήματα

Ο τίτλος μπήκε απλά για να τρομάξει τον κόσμο. Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση των 3×3 γραμμικών συστημάτων, δηλαδή $\mu = \nu = 3$, για εμάς. Αυτά τα συστήματα, όπως κανείς φαντάζεται, πλέον, είναι γραμμικά συστήματα που:

- έχουν τρεις (3) (αυτό είναι πρώτο τριάρι στο 3×3),
- συνολικά σε όλες τις εξισώσεις εμφανίζονται ακριβώς τρεις (3) μεταβλητές (αυτό είναι το δεύτερο τριάρι στο 3×3) και
- κάθε μία από αυτές είναι γραμμική, δηλαδή είναι της μορφής:

$$ax + by + cz = d,$$

δηλαδή, είτε περιγράφει ένα επίπεδο, είτε τα πάντα, είτε τίποτα μέσα στον χώρο.

Σχόλιο

Μπορείτε να φανταστείτε τι περιγράφει μία εξίσωση της μορφής

$$ax + by + cz + dw = e;$$

Όπως και με τα μη γραμμικά συστήματα, δεν εμβαθύνουμε ιδιαίτερα (εδώ μας δυσκολεύει αρκετά[5] και η γεωμετρική τους αναπαράσταση) και εστιάζουμε, κυρίως, στην επίλυση με την μέθοδο της αντικατάστασης και της αναγωγής του συστήματος σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα. Γι΄ αυτόν τον σκοπό, διαλέγουμε μια σχέση και μία μεταβλητή και επιλύουμε αυτήν τη σχέση ως προς αυτή τη μεταβλητή και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι, έχουμε πια ένα 2×2 σύστημα να επιλύσουμε όπως θέλουμε και στο τέλος να αντικαταστήσουμε στην πρώτη σχέση που διαλέξαμε και να βρούμε και την τρίτη μεταβλητή. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7. Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y &= 1 \\ y - z &= -1. \end{cases}$$

[5]Ειδικά αν ασκεφτείτε ότι κάποιοι από εμάς — όπως ο υποφαινόμενος — δεν μπορούμεε να τραβήξουμε ούτε μια ίσια γραμμή...

Λύνουμε την πρώτη ως προς z οπότε έχουμε:

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$$

και, αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση, παίρνουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ y - (-x - y) & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ x + 2y & = & -1 \end{array} \right. \overset{(-)}{\Rightarrow} 3y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}.$$

Τώρα, από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $x = \frac{1}{3}$ και από την τρίτη $z = \frac{1}{3}$, άρα, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Γεωμετρικά, η λύση του παραπάνω συστήματος ερμηνεύεται ως το σημείο τομής τριών επιπέδων του χώρου.

$\square$

1.7 Ασκήσεις

1.7.1 Α΄ Ομάδα

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να τα ερμηνεύσετε γεωμετρικά:

$$(A)\begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x-6y-3=1 \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} 2-3x=y \\ 2x-6y+4=0 \end{cases}$$

$$(C)\begin{cases} x-2y=-2 \\ 4y-2x=4 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} 3x+5y=0 \\ -3x=5y-1 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να τα ερμηνεύσετε γεωμετρικά:

$$(A)\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} xy=4 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$$

$$(C)\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2y+x^2=0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=9 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$(A)\begin{cases} x+y=z \\ 3x-4y=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} 2y+x=1 \\ 3x-y+2z=-4 \\ y-z=0 \end{cases}$$

4. Τα ψηφία ενός διψήφιου αριθμού έχουν τις εξής ιδιότητες:
   - το άθροισμά τους είναι 11,
   - η διαφορά τους έχει απόλυτη τιμή 3.

   Ποιος είναι ο αριθμός;

5. Γυρίζει ένα φίλος σας, λάτρης της μελιντζάνας και του μήλου, από την λαϊκή και σας λέει:

   «Σήμερα έκανα έξυπνες αγορές. Είχα 10 ευρώ στην τσέπη μου και πήρα 3 κιλά πορτοκάλια, 2 κιλά μήλα και 3 κιλά μελιντζάνες. Έτσι πήρα τα περισσότερα κιλά που μπορούσα με αυτά τα 10 ευρώ. Στην αρχή σκέφτηκα να πάρω μόνο 4 κιλά μήλα και 3 κιλά μελιντάνες, αφού δεν μου αρέσουν και πολύ τα πορτοκάλια, πάλι με 10 ευρώ, αλλά μετά είδα ότι με συνέφερε να πάρω 1 κιλό πορτοκάλια, 10/3 του κιλού μήλα και 3 κιλά μελιντζάνες. Αλλά δε μου έβγαιναν τα λεφτά γιατί μου έλειπαν 10 λεπτά. Κι εκεί που το σκεφτόμουν, βρίσκω κάτω ένα δεκάλεπτο! Αλλά, τελικά, ούτε αυτό με συνέφερε και πήρα όσα σου είπα στην αρχή, αφού ήταν περισσότερα κιλά.»

   Τα υπολόγισε σωστά ο φίλος σας ή του ξέφυγε κάτι;

6. Είδαμε ότι ένα 2×2 γραμμικό σύστημα ερμηνεύεται γεωμετρικά μέσω δύο ευθειών και των σχετικών τους θέσεων (δηλαδή, είτε τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο είτε ταυτίζονται είτε είναι παράλληλες). Μπορείτε να δώσετε μία γεωμετρική ερμηνεία για ένα σύστημα που είναι μεν γραμμικό αλλά είναι 1000×1000, δηλαδή αποτελείται από 1000 εξισώσεις με 1000 αγνώστους;

1.7.2 Β΄ Ομάδα

1. Να διερευνήσετε τα παρακάτω συστήματα ως προς τις λύσεις τους:

$$(A)\begin{cases} \lambda x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

(B) $\begin{cases} x - 3\lambda y = 2 \\ 3\lambda x - y = 1 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3\lambda - y = \lambda \\ \lambda^2 x - y = 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + \lambda y = 1 \end{cases}$

2. Σε μία καφετέρια προμηθεύονται δύο είδη (χαρμάνια) καφέ· arabica και brazilian. Το πρώτο στοιχίζει 26 ευρώ το κιλό ενώ το δεύτερο 27 ευρώ το κιλό. Κάθε μήνα ο ιδιοκτήτης της καφετέριας διαθέτει για αγορά καφέ 2412 ευρώ για να αγοράσει, συνολικά, 90 κιλά καφέ. Πόσα κιλά αγοράζει από το κάθε είδος;

3. Ας δούμε τώρα το παραπάνω πρόβλημα λίγο πιο ρεαλιστικά. Η τιμή ενός προϊόντος στην αγορά δεν παραμένει σταθερή καθώς επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες (ζήτηση, προσφορά, πληθωρισμός κ.α.). Έτσι, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τις ακριβείς τιμές που θα συναντήσουμε σε μία αγορά μας, οπότε, αν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα του καφετεριάρχη πιο αποδοτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Η τιμή του πρώτου είδους, έστω τ, είναι ένας θετικός αριθμός και ότι, η τιμή του άλλου είδους εξαρτάται άμεσα από αυτήν του πρώτου. Ας υποθέσουμε ότι, από την εμπειρία μας έχουμε διαπιστώσει ότι η τιμή του brazilian είναι περίπου 4% ακριβότερη από αυτήν του arabica. Με αυτά τα δεδομένα, να διερευνήσετε τις ποσότητες από το κάθε είδος καφέ που αγοράζει ο καφετεριάρχης αν είναι διατεθιμένος να ξοδεύει κάθε μήνα 2412 ευρώ και να αγοράζει 90 κιλά καφέ. Σε κάθε περίπτωση, μην ξεχνάτε ότι δεν μιλάμε για χρυσό, αλλά για καφέ, οπότε, δε θα ήταν διατεθιμένος κανείς να πληρώσει π.χ. 50 ευρώ για ένα κιλό καφέ.

4. Δίνεται μία ευθεία του επιπέδου με εξίσωση:
$$x - ay + 3 = 0,$$
όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι μία παράμετρος. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εν λόγω ευθεία είναι εφαπτόμενη στον κύκλο με εξίσωση:
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Πριν λύσετε το σύστημα, πόσες λύσεις αναμένετε να βρείτε; Γιατί;

5. Έχουμε δύο τετράγωνα (όχι απαραίτητα ίσα μεταξύ τους) των οποίων το συνολικό εμβαδόν είναι ίσο με 15m^2. Αν θέλουμε το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι ίσο με $12 + 4\sqrt{6}$, ποιες πρέπει να είναι η πλευρές των δύο τετραγώνων; Αν θέλουμε το άθροισμα των περιμέτρων να είναι το μεγαλύτερο δυνατό;

2

Συναρτήσεις

Ας θυμηθούμε τώρα στα γρήγορα όσους ορισμούς, προτάσεις και θεωρήματα διατυπώσαμε για τις συναρτήσεις.

2.1 Ορισμός, Γραφική παράσταση και πεδίο ορισμού συνάρτησης

Ορισμός 2.1: Συνάρτηση

Μία αντιστοίχιση $f : A \to B$ ονομάζεται συνάρτηση αν αντιστοιχίζει **κάθε** στοιχείο $x \in A$ σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο $y \in B$. Το x το ονομάζουμε *ανεξάρτητη μεταβλητή* και το y *εξαρτημένη μεταβλητή* και συμβολίζουμε την παραπάνω σχέση εξάρτησης με:

$$y = f(x).$$

Σχόλιο

Ένα πολύ απλό παράδειγμα συνάρτησης είναι οι αναμνήσεις μας σαν συνάρτηση του χρόνου. Σε κάθε μία χρονική στιγμή που θυμόμαστε αντιστοιχεί μία ανάμνηση από τη ζωή μας. Προφανώς, μπορεί πολλές στιγμές να αντιστοιχούν στην ίδια ανάμνηση, αλλά ποτέ μία στιγμή δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε δύο αναμνήσεις/βιώματά μας.

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1. Να εξετάσετε αν μπορεί κάποια από τις δύο μεταβλητές να γραφτεί σαν συνάρτηση της άλλης στην παρακάτω σχέση:

$$x + y^2 = 1.$$

Ας εξετάσουμε πρώτα αν το y γράφεται σαν συνάρτηση του x. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να μπορούμε να βρούμε για κάθε x που είναι επιτρεπτό ένα και μόνο y που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Με λίγο πειραματισμό, βλέπουμε ότι για $x = 0$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1,$$

οπότε δεν μπορούμε να γράψουμε το y σαν συνάρτηση του x μιας και για το $x = 0$ βρήκαμε δύο τιμές για το y που να ικανοποιούν τη δοθείσα σχέση[1].

[1]Πιο λακωνικά και περιεκτικά, θα λέγαμε ότι το y *δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές του* x.

Ας εξετάσουμε τώρα το αντίστροφο, αν το x γράφεται σαν συνάρτηση του y. Εδώ βλέπουμε ότι είναι εύκολο να λύσουμε την παραπάνω σχέση ως προς x, οπότε:

$$x + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y^2,$$

άρα, πράγματι, το x γράφεται σαν συνάρτηση του y, με:

$$x = f(y) = 1 - y^2.$$

□

Σχόλιο

Πολλές φορές, για μία έκφραση σαν την $f(y) = 1-y^2$ χρησιμοποιούμε την ορολογία «τύπος». Η έννοια του τύπου όπως τη χρησιμοποιούμε εδώ δεν είναι καλώς θεμελιωμένη στα μαθηματικά και γι΄ αυτό την αποφεύγουμε σε «επίσημες» περιστάσεις, ωστόσο είναι αρκετά χρήσιμος και διαισθητικός όρος σε πιο «χαλαρά» πλαίσια.

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω να υπενθυμίσουμε και ότι το σύνολο A που αναφέρεται στον ορισμό το ονομάζουμε **πεδίο ορισμού** της f και το σύνολο B **πεδίο τιμών**. Αν δεν μας δίνεται το πεδίο ορισμού A, τότε θεωρούμε ότι αυτό είναι το ευρύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο έχουν νόημα τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε την f. Οι συνήθεις περιορισμοί που πρέπει να έχουμε κατά νου φαίνονται στον πίνακα 2.1. Τέλος, συνήθως το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης f το συμβολίζουμε με D_f.

Τύπος	**Περιορισμός**
$\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\dfrac{1}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$

Πίνακας 2.1: Περιορισμοί κατά την αναζήτηση πεδίου ορισμού

Παράδειγμα 2.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}.$$

Ακολουθώντας τα όσα είπαμε, έχουμε:

- $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$
- $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

Από τους δύο παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε, τελικά:

$$-1 \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1),$$

άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα:

$$D_f = [-1, 1).$$

□

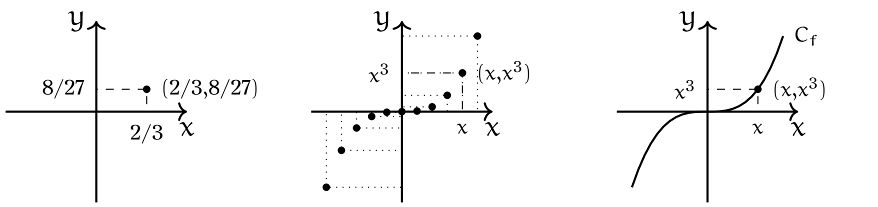
Επίσης, αν δε μας δίνεται το πεδίο τιμών τότε μπορούμε να θεωρούμε, χωρίς να μας απασχολεί ιδιαίτερα προς το παρόν, ότι αυτό είναι το $\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2: Γραφική παράσταση συνάρτησης

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε η γραφική παράσταση της f, C_f, είναι το σύνολο εκείνων των σημείων που είναι της μορφής $(x, f(x))$, δηλαδή:

$$C_f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}.$$

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ μπορεί να κατασκευαστεί όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, παίρνοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σχεδιάζοντας το σημείο $(x, f(x))$ πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο.



(α΄) Ένα σημείο… (β΄) Πολλά σημεία… (γ΄) Όλα τα σημεία!

Σχήμα 2.1: Η κατασκευή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$.

Να θυμίσουμε επίσης σε αυτό το σημείο ότι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί και μέσω της γραφικής της παράστασης αν προβάλουμε όλα τα σημεία της στον άξονα $x'x$, ενώ το *σύνολο τιμών* μπορεί να βρεθεί αν προβάλουμε όλα τα σημεία της στον άξονα $y'y$.

Σχόλιο

Το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης είναι το σύνολο των τιμών που παίρνει η συνάρτηση καθώς το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της, ενώ το πεδίο τιμών είναι ένα οποιοδήποτε υπερσύνολο του συνόλου τιμών. Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ μπορεί να έχει για πεδίο τιμών λ.χ. όλο το $\mathbb{R}$, αλλά το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

Συνεχίζουμε τώρα ορίζοντας μία σχέση ισότητας και μία σχέση (μερικής) διάταξης μεταξύ συναρτήσεων.

Ορισμός 2.3: Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι ίσες αν:

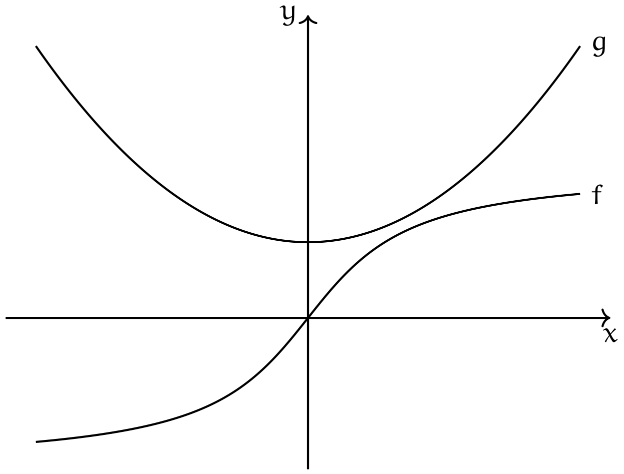
- $A = B$ (έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού) και,
- $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ (έχουν τον ίδιο τύπο).

Ορισμός 2.4: Διάταξη μεταξύ συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι $f < g$ αν:

- $A = B$ (έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού) και,
- $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Το παραπάνω ερμηνεύεται και γραφικά ως ότι η γραφική παράσταση της g είναι «πάνω» από τη γραφική παράσταση της f σε κάθε σημείο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: $f < g$

Σχόλιο

Προσέξτε ότι, σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε όλες τις συναρτήσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x$ δεν είναι ούτε μεγαλύτερη ούτε μικρότερη ούτε ίση με τη συνάρτηση $g(x) = -x$.

Ας περάσουμε τώρα σε πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων.

2.2 Μονοτονία συναρτήσεων, ολικά ακρότατα και «1-1» συναρτήσεις

2.2.1 Μονοτονία

Υπενθυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.5: Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα *διάστημα* $\Delta \subseteq A$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ορισμός 2.6: Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα *διάστημα* $\Delta \subseteq A$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Σχόλιο

Προσέξτε ότι η μονοτονία είναι μία έννοια που ορίζεται για μία συνάρτηση σε ένα **διάστημα**. Έτσι, δεν μπορούμε να πουμε λ.χ. ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνηίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά ξεχωριστά στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Επίσης, μία συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα θα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Παράδειγμα 2.3. Να μελετήσετε την παρακάτω συνάρτηση ως προς την μονοτονία:

$$f(x) = \sqrt{3 - x}, \ x \leq 3.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 - x_1 > 3 - x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3 - x_1} > \sqrt{3 - x_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

□

2.2.2 Ακρότατα

Συνεχίζουμε υπενθυμίζοντας τη έννοια του (ολικού) ακροτάτου μίας συνάρτησης.

Ορισμός 2.7: Ολικό μέγιστο

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει *ολικό μέγιστο* στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0).$$

Ορισμός 2.8: Ολικό ελάχιστο

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει *ολικό ελάχιστο* στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) \ge f(x_0).$$

Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο ή έλάχιστο σε ένα $x_0 \in D_f$ θα λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) **ακρότατο** εκεί.

Παράδειγμα 2.4. Να βρείτε ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο της $f(x) = 1 + ημ^2 x$, $x \in [0, 2π]$.

Αρχικά, ξεκινώντας από τη γνωστή ανισότητα:

$$-1 \le ημx \le 1$$

έχουμε:

$$-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow |ημx| \le 1 \Leftrightarrow ημ^2 x \le 1,$$

επομένως:

$$f(x) = 1 + ημ^2 x \le 1 + 1 = 2.$$

Δεν τελειώσαμε, όμως! Πρέπει να βρούμε κι ένα $x_0 \in [0, 2π]$ έτσι ώστε $f(x_0) = 2$. Μετά από λίγο πειραματισμό, βρίσκουμε ότι:

$$f\left(\frac{π}{2}\right) = 1 + ημ^2 \frac{π}{2} = 1 + 1 = 2,$$

άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{π}{2}$ το $f(x_0) = 2$.

Από μια άλλη γνωστή ανισότητα, την $y^2 \ge 0$, παίρνουμε (για $y = ημx$):

$$ημ^2 x \ge 0 \Leftrightarrow 1 + ημ^2 x \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1.$$

Όπως και πριν, με λίγο πειραματισμό βρίσκουμε ότι:

$$f(0) = 1 + \eta\mu^2 0 = 1 + 0 = 1,$$

επομένως, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(x_0) = 1$.

□

2.2.3 Συναρτήσεις «1-1»

Ορισμός 2.9: «1-1» συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται «1-1» αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Σχόλιο

Παρατηρήστε ότι στον ορισμό των «1-1» συναρτήσεων χρησιμοποιήσαμε το ρήμα *λέγεται* ενώ στην διατύπωση του αντιθετοαντιστρόφου το ρήμα *είναι*. Γιατί, άραγε, το κάναμε αυτό;

Για ευκολία, χρησιμοποιούμε το *αντιθετοαντίστροφο* του ορισμού:

Πρόταση 2.1: Αντιθετοαντίστροφο του ορισμού

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Απόδειξη. Έστω μία «1-1» συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Έστω, δηλαδή, ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ αλλά $x_1 \neq x_2$. Αφού η f είναι «1-1» έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$, άτοπο. Επομένως, ισχύει η ζητούμενη συνεπαγωγή για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

□

Παράδειγμα 2.5. Να δείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι «1-1»:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \ x \neq 1.$$

Έστω, με βάση το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού, $x_1, x_2 \neq 1$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$\begin{gathered} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = x_2, \end{gathered}$$

άρα η f είναι «1-1».

□

Επίσης, ισχύει και η ακόλουθη:

Πρόταση 2.2: Σχέση μονοτονίας και «1-1»

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $x_1 < x_2$. Τότε, αφού η f είναι γνησίως μονότονη, θα ισχύει είτε $f(x_1) < f(x_2)$ είτε $f(x_1) > f(x_2)$. Σε κάθε περίπτωση, ισχύει σίγουρα ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα η f είναι «1-1».

□

Σχόλιο

Το αντίστροφο της πρότασης 2.2 γενικά δεν ισχύει. Μπορείτε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα;

2.3 Συμμετρικές και περιοδικές συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε κι εδώ τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.10: Άρτια συνάρτηση

ία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγετα άρτια αν:

- για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και,
- για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(-x) = f(x).$$

Μία άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Ορισμός 2.11: Περιττή συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγετα περιττή αν:

- για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $-x \in A$ και,
- για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(-x) = -f(x).$$

Μία περιττή συνάρτηση έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Παράδειγμα 2.6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ είναι άρτια.

Αφού το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$, η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται. Για τη δεύτερη, έχουμε:

$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x),$$

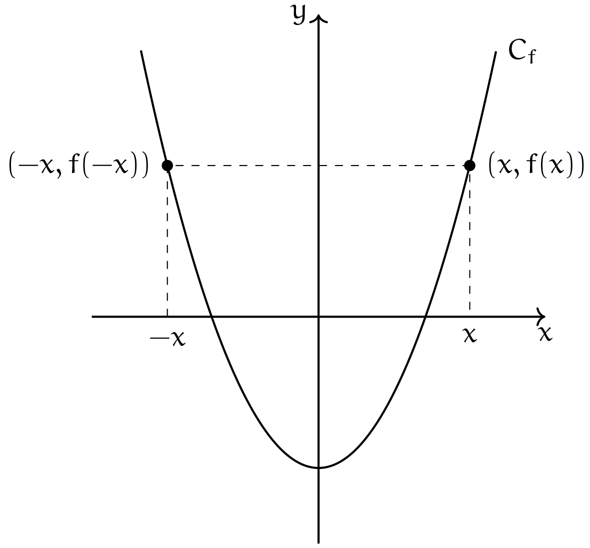
άρα η f είναι άρτια. Γεωμετρικά, αυτό φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση (βλ. σχήμα 2.3).

□

Ορισμός 2.12: Περιοδική συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική με περίοδο $T > 0$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + T) = f(x).$$



Σχήμα 2.3: Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2$.

Παράδειγμα 2.7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημ(2x) + συνx$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2π$.

Με βάση τον ορισμό, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f(x+2\pi) = ημ(2(x+2\pi)) + συν(x+2\pi) = \\ &= ημ(2x+4\pi) + συνx = ημ(2x) + συνx = \\ &= f(x), \end{aligned}$$

επομένως, η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2π$.

□

2.4 Ασκήσεις

2.4.1 Α΄ Ομάδα

1. Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης και στη συνέχεια να περιγράψετε με λίγα παραδείγματα από την καθημερινή σας ζωή και από τα μαθηματικά διαδικασίες (αντιστοιχίσεις) που είναι και διαδικασίες που δεν είναι συναρτήσεις.

2. Δίνονται οι πίνακες τιμών που φαίνονται στο σχήμα ;;:

   (α΄) Σε ποιες από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί το y να είναι συνάρτηση του x;

   (β΄) Σε ποιες από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί το x να είναι συνάρτηση του y;

   (γ΄) Σε εκείνες τις περιπτώσεις που το x δεν είναι συνάρτηση του y ή το y δεν είναι συνάρτηση του x, τι είναι αυτό που «χαλάει» τη δουλειά;

3. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις γράφεται κάποια από τις μεταβλητές που εμφανίζονται σαν συνάρτηση της άλλης:

$$\begin{aligned} &(A)\ x^2+y^2=2\\ &(B)\ 3x^2+y=1\\ &(C)\ 2x^3+y^2=-1\\ &(D)\ x^2+y^2=0. \end{aligned}$$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{2x}{x^2-3}\\ g(x)&=\sqrt{4x-3}\\ h(x)&=\sqrt{\frac{4x-6}{x^2-3x+2}}\\ s(x)&=\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}. \end{aligned}$$

5. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

$$\begin{aligned} f(x)&=2x+3\\ g(x)&=x^3-2\\ h(x)&=\sqrt{1-2x^7}+x\\ s(x)&=\frac{x}{x+9}\\ t(x)&=\frac{2x}{x+9}. \end{aligned}$$

6. Να βρείτε τουλάχιστον ένα ολικό ακρότατο για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} f(x)&=\text{ημ}x\\ g(x)&=2\text{συν}^2x-3\\ h(x)&=\frac{x^2}{2x^2+3}\\ s(x)&=\frac{\text{ημ}^2x}{\text{ημ}^2x+1}. \end{aligned}$$

7. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»:

$$\begin{aligned} f(x)&=4-3x\\ g(x)&=x^2-4\\ h(x)&=x^3+2\\ s(x)&=x^3+2x \end{aligned}$$

8. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή/και περιττές:

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+x\\ g(x)&=3x^3-2x\\ h(x)&=\sqrt{x^2+4}\\ s(x)&=0. \end{aligned}$$

9. Αν f είναι μία συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα ;;:

   (α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

   (β΄) Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:
$$f(x)=1.$$

   (γ΄) Να βρείτε σε ποια διαστήματα η f είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

   (δ΄) Είναι η f άρτια; Περιττή;

2.4.2 Β΄ Ομάδα

1. Η κυριά Κούλα μένει στον τελευταίο όροφο μιας πολυκατοικίας, σε ένα διαμέρισμα που έχει ένα μεγάλο μπαλκόνι. Στη γωνία του μπαλκονιού της, το οποίο δεν καλύπτεται από τέντα, η κυρία Κούλα έχει τοποθετήσει ένα μεγάλο κυλινδρικό βαρέλι ύψους 1.5m και διαμέτρου 0.5m στο οποίο η κυρία Κούλα μαζέυει το νερό της βροχής για να ποτίζει τα λουλούδια της. Ο εγγονός της κυρίας Κούλας, ο Γιωργάκης, μένει στο από κάτω διαμέρισμα και θέλει να γίνει μετεωρολόγος όταν μεγαλώσει. Έτσι, κάθε μέρα στις 7 το απόγευμα, ανεβαίνει στο σπίτι της γιαγιάς του και μετράει πόση είναι η στάθμη του νερού στο βαρέλι για να «μελετάει» τις βροχοπτώσεις στην περιοχή του.

   Την 31η του Οκτώβρη, η κυρία Κούλα άδειασε το βαρέλι για να το καθαρίσει για να είναι έτοιμο για τις βροχές του Νοέμβρη που, συνήθως, είναι πολλές. Έτσι, όταν ο μικρός Γιωργάκης πήγε να μετρήσει τη στάθμη του νερού στο βαρέλι εκείνη την ημέρα, το βρήκε άδειο. Τις επόμενες δύο εβδομάδες, όμως, ο Γιωργάκης είχε δουλειά να κάνει γιατί έτυχε να βρέξει πολλά από τα επόμενα βράδια. Έτσι, για τις πρώτες δεκατέσσερις μέρες του Νοέμβρη, ο Γιωργάκης έφτιαξε τον πίνακα 2.2 (το ύψος του νερού στο βαρέλι είναι μετρημένο σε εκατοστά): Αυτές τις ημέρες, λόγω των βροχοπτώσεων, η κυρία Κούλα δε χρειάστηκε να ποτίσει καθόλου τα λουλούδια της.

   (α΄) Είναι το ύψος του νερού στο βαρέλι μία συνάρτηση του χρόνου; Αιτιολογήστε κατάλληλα την απάντησή σας. Επίσης, αν είναι συνάρτηση, να βρείτε το πεδίο ορισμού της, το πεδίο τιμώνς της και το σύνολο τιμών της με βάση τα δεδομένα της κατάστασης.

   (β΄) Να παραστήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα δεδομένα του πίνακα. Στον κατακόρυφο άξονα θα μετράτε το ύψος του νερού και στον οριζόντιο τις ημέρες που περνούν.

   (γ΄) Μπορείτε να βρείτε από τα παραπάνω δεδομένα ποια βράδια έβρεξε;

   (δ΄) Μπορείτε να ερμηνεύσετε κάπως αυτές τις μειώσεις που παρατηρούνται στη στάθμη του νερού στο βαρέλι;

   (ε΄) Όλες οι μετρήσεις του πίνακα έγινα στις 7 το απόγευμα. Αν ο Γιωργάκης ήθελε να φτιάξει και ένα γράφημα σαν αυτό που κάνατε στο δεύτερο ερώτημα αλλά με τις τιμές της στάθμης του νερού στο βαρέλι για κάθε στιγμή της ημέρας πώς θα μπορούσε να το σχεδιάσει; Δοκιμάστε να υλοποιήσετε την πρότασή σας και να σχεδιάσετε ένα γράφημα σαν κι αυτό.

   (ϛ΄) Μπορείτε να υποθέσετε ποια ήταν η πιο θερμή μέρα του Νοέμβρη κατά τις πρώτες δύο εβδομάδες του; Γιατί;

   (ζ΄) Τι άλλα συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε από τα παραπάνω δεδομένα;

   (η΄) Μπορείτε να βρείτε έναν τύπο για την παραπάνω συνάρτηση; Φαίνεται εύχρηστος; Αιτιολογήστε κατάλληλα;

2. Σε ένα γνωστό και αγαπημένο ποίημα του Νίκου Καββαδία — *Θεσσαλονίκη*, ποιητική συλλογή *Το Πούσι* — συναντάμε τον εξής στίχο:

   *σ΄ έστειλε ο πρώτος στα νερά, να πας για να **γραδάρεις***

   (α΄) Να αναζητήσετε σε λεξικό ή στο διαδίκτυο τη λέξη «γραδάρω» και να βρείτε την ετυμολογία της. Στη συνέχεια να διαβάσετε το σχετικό ποίημα (αν θέλετε, αναζητήστε και κάποια ανάλυσή του σε εγχειρίδια ή στο διαδίκτυο) και απαντήστε στο εξής ερώτημα:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	9	11.2	11.1	18.4	18.3	18.2	18.2	18	19.5	22	25.8	26.4	29.6

Πίνακας 2.2: Οι μετρήσεις του Γιωργάκη.

Χρησιμοποιεί ο ποιητής τη λέξη «γραδάρω» με την έννοια που βήκατε στο λεξικό ή με κάποια άλλη; Αν εννοεί κάτι άλλο, τι (μπορεί να) είναι αυτό; (*Μην κοιτάξετε το επόμενο ερώτημα!*)

(β΄) *Είναι γραμμένα ανάποδα για να μην μπείτε στον πειρασμό να τα διαβάσετε πριν απαντήσετε το προηγούμενο ερώτημα.*

Στο εν λόγω ποίημα, ο ποιητής δε χρησιμοποιεί τη λέξη «γραδάρω» με την έννοια του «βαθμομετρώ ένα υγρό ως προς την πυκνότητά του», αλλά, όπως φαίνεται από το συγκείμενο, με την έννοια του «μετράω το βάθος των νερών». Πριν τα σύγχρονα βυθόμετρα, ο κύριος τρόπος βυθομέτρησης των νερών καθώς ένα πλοίο βρισκόταν στη θάλασσα, ήταν με τη χρήση του *σκαντάλιου*, το οποίο χρησιμοποιούνταν ακόμα και για ποιοτική ανάλυση του βυθού.

i. Να βρείτε πώς ακριβώς χρησιμοποιούνταν το σκαντάλιο.

ii. Στη συνέχεια, φανταστείτε το εξής σενάριο. Στα πλαίσια της χαρτογράφησης του βυθού, δύο ναύτες πραγματοποιούν διαδοχικές μετρήσεις με το σκαντάλιο τους ανά 15 μέτρα (υποθέτουμε ότι το πλοίο κινείται με σχετικά μικρή ταχύτητα για τους σκοπούς της χαρτογράφησης). Μπορούν οι μετρήσεις των δύο ναυτών να περιγραφούν σαν συνάρτηση της θέσης του πλοίου; Ποια είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης; Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες αυτού του είδους η μέτρηση δε μας δίνει την ακριβή εικόνα του βυθού;

3. Υπάρχει συνάρτηση που να είναι και άρτια και περιττή; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

4. Δίνεται η συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f_a(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 2019 + ax & x > 0 \end{cases}$$

(α΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για $a = -2019$, $a = 0$ και $a = 2018$.

(β΄) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η f είναι 1-1.

5. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι 1-1 και όχι γνησίως μονότονη; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

3

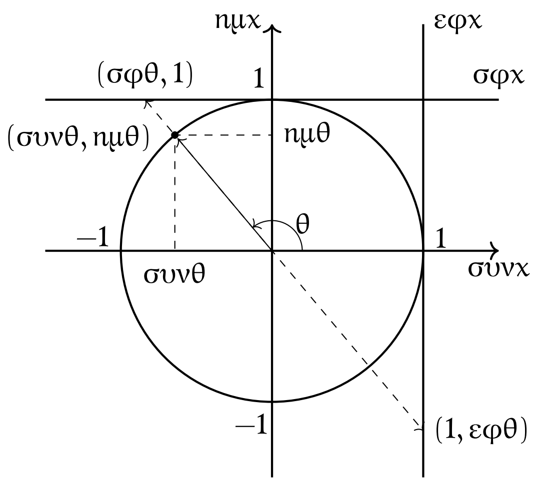
Τριγωνομετρία

3.1 Βασικές έννοιες και εργαλεία

Παρουσιάζουμε πρώτα τις βασικές έννοιες και εργαλεία που εμφανίζονται στο κεφάλαιο της τριγωνομετρίας.

3.1.1 Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Μπαίνουμε απευθείας στο ψητό κι επειδή μία εικόνα ισοδυναμεί με χίλιες λέξεις, στο σχήμα 3.1 φαίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος (ένας απλός κύκλος ακτίνας $\rho = 1$) με όλους τους άξονες των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών και τον τρόπο που τους υπολογίζουμε.



Σχήμα 3.1: Ο τριγωνομετρικός κύκλος.

3.1.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Συνεχίζοντας, στον πίνακα 3.1 φαίνονται όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες που έχουμε στη διάθεσή μας (όπου εμφανίζεται η μεταβλητή k, αυτή είναι *ακέραιος* αριθμός, δηλαδή $k \in \mathbb{Z}$).

Κύκλοι και ημικύκλια	
$ημ(x+2kπ)=ημx$	$εφ(x+kπ)=εφx$
$συν(x+2kπ)=συνx$	$σφ(x+kπ)=σφx$
Παραπληρωματικές γωνίες	
$ημ(π-x)=ημx$	$εφ(π-x)=-εφx$
$συν(π-x)=-συνx$	$σφ(π-x)=-σφx$
Γωνίες με διαφορά $π$	
$ημ(π+x)=-ημx$	$εφ(π+x)=εφx$
$συν(π+x)=-συνx$	$σφ(π+x)=σφx$
Συμπληρωματικές γωνίες	
$ημ(π/2-x)=συνx$	$εφ(π/2-x)=-σφx$
$συν(π/2-x)=-ημx$	$σφ(π/2-x)=-εφx$
Αντίθετες γωνίες	
$ημ(-x)=-ημx$	$εφ(-x)=-εφx$
$συν(-x)=συνx$	$σφ(-x)=-σφx$
Αθροίσματα γωνιών	
$ημ(x+y)=ημxσυνy+ημyσυνx$	
$συν(x+y)=συνxσυνy-ημxημy$	
$εφ(x+y)=\dfrac{εφx+εφy}{1-εφxεφy}$	$σφ(x+y)=\dfrac{σφxσφy-1}{σφy+σφx}$
Διπλάσια τόξα	
$ημ(2x)=2ημxσυνx$	$συν(2x)=συν^2x-ημ^2x$
$εφ(2x)=\dfrac{2εφx}{1-εφ^2x}$	$σφ(x+y)=\dfrac{σφ^2x-1}{2σφx}$
Γενικές ταυτότητες	
$ημ^2x+συν^2x=1$	$εφxσφx=1$
$εφx=\dfrac{ημx}{συνx}$	$σφx=\dfrac{συνx}{ημx}$

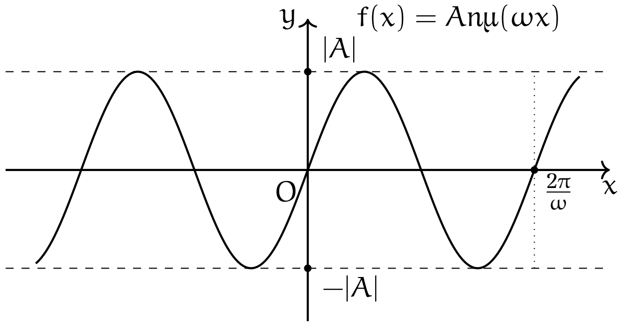
Πίνακας 3.1: Το τριγωνομετρικό «σκονάκι».

3.1.3 Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

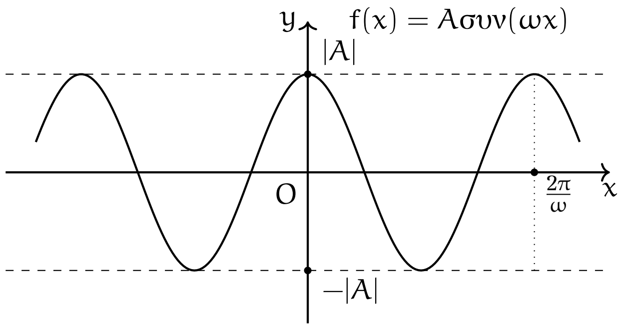
Τέλος, στα σχήματα 3.2, 3.3 και 3.4 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3.1.4 Παραδείγματα και βασικές εφαρμογές

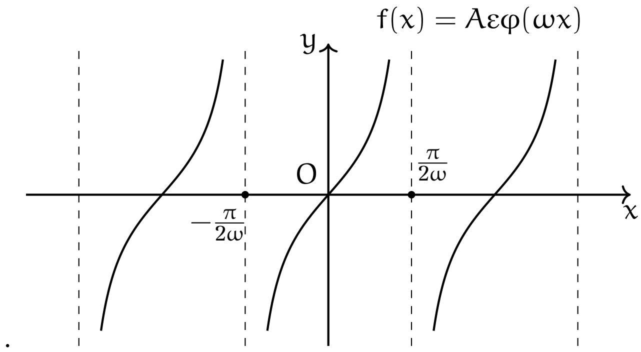
Περνάμε τώρα σε κάποια παραδείγματα στα οποία αναδεικνύεται η χρησιμότητα των παραπάνω.



Σχήμα 3.2: Η συνάρτηση $f(x) = A\eta\mu(\omega x)$



Σχήμα 3.3: Η συνάρτηση $f(x) = A\sigma\upsilon\nu(\omega x)$



Σχήμα 3.4: Η συνάρτηση $f(x) = A\varepsilon\varphi(\omega x)$

Σχόλιο

Χρησιμοποιώντας της σχέση

$$\sigma\varphi(x) = -\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

μπορείτε να εξηγήσετε πώς θα σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σφx;

Παράδειγμα 3.1. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας $\frac{473\pi}{3}$.

Γνωρίζουμε ότι ένας κύκλος είναι 2π ακτίνια. Επομένως, επειδή εδώ η γωνία μας δίνεται σε «τρίτα», έχουμε:

$$2\pi = \frac{6\pi}{3}.$$

Διαιρούμε τώρα το 473 με το 6, όπως ξέρουμε, με πηλίκο και υπόλοιπο και βλέπουμε ότι:

$$473 = 78 \cdot 6 + 5,$$

άρα:

$$\frac{473\pi}{3} = \frac{(78 \cdot 6 + 5)\pi}{3} = \frac{78 \cdot 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 78(2\pi) + \frac{5\pi}{3},$$

άρα:

$$\text{ημ}\left(\frac{473\pi}{3}\right) = \text{ημ}\left(78(2\pi) + \frac{5\pi}{3}\right) = \text{ημ}\frac{5\pi}{3}.$$

Τώρα, για τη γωνία $\frac{5\pi}{3}$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3},$$

άρα:

$$\text{ημ}\frac{5\pi}{3} = \text{ημ}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{ημ}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Παράδειγμα 3.2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\text{ημ}x = \frac{1}{2}.$$

Αρχικά, βρίσκουμε μία γνωστή γωνία που να έχει ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$. Μετά από λίγη σκέψη, θυμόμαστε ότι:

$$\text{ημ}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι παραπληρωματικές γωνίες και γωνίες με διαφορά ακέραιο πολλαπλάσιο κύκλων έχουν το ίδιο ημίτονο παίρνουμε:

$$\text{ημ}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Παράδειγμα 3.3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\text{συν}(4x)$.

Πρώτα, υπολογίζουμε την περίοδο της συνάρτησης f χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

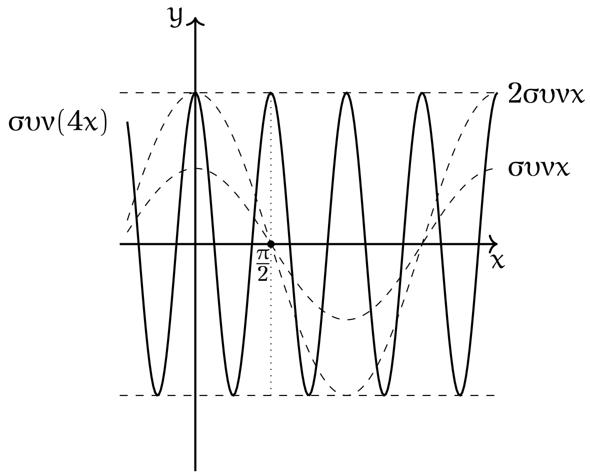
Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε έναν πίνακα με τα χαρακτηριστικά σημεία της γραφικής παράστασης της f σε διάστημα μιας περιόδου (ρίζες και ακρότατα), όπως φαίνεται στον πίνακα 3.2.

Τώρα είναι εύκολο να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5 (για σύγκριση, έχουν σχεδιαστεί και οι συνx και 2συνx τις οποίες εσείς δε χρειάζεται να σχεδιάσετε).

□

Θέση	**x**	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$
0	0	$f(0) = 2$
T/4	$\pi/8$	$f(\pi/8) = 0$
T/2	$\pi/4$	$f(\pi/4) = -2$
3T/4	$3\pi/8$	$f(3\pi/8) = 0$
T	$\pi/2$	$f(\pi/2) = 2$

Πίνακας 3.2: Τα χαρακτηριστικά σημεία της C_f.



Σχήμα 3.5: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2\text{συν}(4x)$.

Σχόλιο

Παρατηρήστε πως το ω επηρεάζει τη μορφή της συνημιτονοειδούς καμπύλης, αυξάνοντας τη συχνότητα της «ταλάντωσής» της.

3.2 Ασκήσεις

3.2.1 Α΄ Ομάδα

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:
   (α΄) ημ(π), συν(π), εφ(π).
   (β΄) ημ (π), συν (π), εφ (π).
   (γ΄) ημ $\left(\frac{9\pi}{4}\right)$, συν $\left(\frac{9\pi}{4}\right)$, εφ $\left(\frac{9\pi}{4}\right)$.
   (δ΄) ημ (2790°), συν (2790°), εφ (2790°).
   (ε΄) ημ $\left(-\frac{277\pi}{3}\right)$, συν $\left(-\frac{277\pi}{3}\right)$, εφ $\left(-\frac{277\pi}{3}\right)$.

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών:
   - $\frac{\pi}{4}$
   - $\frac{1983\pi}{3}$
   - 36.855° (χιλιάδες μοίρες)
   - $\frac{-169\pi}{2}$.

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο:
   (α΄) $-1 \leq$ ημx ≤ 1,
   (β΄) $-1 \leq$ συνx ≤ 1,
   (γ΄) ημ^{2}x + συν^{2}x = 1,
   (δ΄) συνx = ημ $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
   (ε΄) ημx < εφx, για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
   (A) $\text{συν}^2 x - \text{ημ}^2 x$
   (B) $\dfrac{\text{συν}x - \text{ημ}x}{\text{ημ}x + \text{συν}x}$
   (C) $\dfrac{\text{συν}(x-\pi)\text{συν}x - \text{ημ}(\pi/2 + x)\text{συν}(\pi + x)}{\text{εφ}^2 x - 2\text{σφ}x}$
   (D) $\dfrac{\text{συν}(2\pi - x)\text{συν}x - \text{ημ}(x-\pi)\text{συν}(\pi/2 - x)}{4\text{συν}^2 x}$.

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων σε διάστημα μεγαλύτερο της μίας περιόδου:
$$f(x) = 2\text{ημ}(3x)$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}\text{συν}(2x)$$
$$f(x) = \text{εφ}\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$f(x) = 0.4\text{ημ}\left(10\pi(x+1)\right)$$
   Αρχικά, να σχεδιάσετε κάθε γραφική παράσταση σε ξεχωριστό σύστημα αξόνων μαζί με την αντίστοιχη «απλή» γραφική παράσταση (δηλαδή, την f(x) μαζί με την ημx, την g(x) μαζί με την συνx κ.ο.κ.) και, στη συνέχεια, και τις τέσσερις στο ίδιο σύστημα αξόνων. Για δική σας ευκολία, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διαφορετικά χρώματα.

6. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
   (α΄) συν^{2}x + 2ημ^{2}x,
   (β΄) $\text{εφ}(x+\pi) + \frac{\text{ημ}x}{\text{ημ}(x+\pi/2)}$,
   (γ΄) $\frac{\text{συν}x - \text{ημ}x}{\text{συν}x + \text{ημ}x}$,
   (δ΄) $\frac{\text{συν}(x+\pi)\text{συν}(-x) - \text{ημ}(x+\pi)\text{ημ}(-x)}{\text{εφ}^2 x + 1}$,
   (ε΄) εφ(x − π/2)ημ(x).

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:
$$f(x) = \text{ημ}(2x)$$
$$g(x) = \text{συν}^2 x - \text{ημ}^2 x$$
$$h(x) = 3\text{συν}\frac{x}{3}$$
$$s(x) = 7\text{ημ}(3x) - 2.$$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
$$\text{ημ}x = 1$$
$$\text{συν}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\text{εφ}x = -1$$
$$\text{ημ}x = \sqrt{3}\text{συν}(-x)$$
$$2\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 3\text{ημ}x - 1$$

9. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
   (α΄) ημ^{4}x − συν^{4}x.
   (β΄) $\frac{\text{ημ}x - \text{συν}(x-\pi)}{\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x}$.

(γ') $\sigma\upsilon\nu(-x)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\eta\mu(x-\pi)$.

(δ') $\varepsilon\varphi^2(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu^2(\pi+x)+\eta\mu^2(-x)$.

(ε') $\varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)$.

10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\eta\mu(2x) \\ g(x) &= 2\sigma\upsilon\nu(-3x) \\ h(x) &= \eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu(2x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x) \end{aligned}$$

$$s(x) = \frac{2\eta\mu(3\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \eta\mu x &= \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon\varphi x &= \sqrt{3} \\ \eta\mu x &= \sigma\upsilon\nu x. \end{aligned}$$

3.2.2 Β' Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}.$$

(α') Να δείξετε ότι:

$$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x).$$

(β') Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(γ') Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0,\pi]$ με βάση τη γραφική της παράσταση.

(δ') Να βρείτε ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο της f.

(ε') Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 3.$$

(ϛ') Να λύσετε την εξίσωση:

$$(f(x))^2 + 1 = 0.$$

2. Να βρείτε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- η f είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$,
- η f έχει ολικό μέγιστο σε κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του π,
- η f δεν είναι η $A\sigma\upsilon\nu(2x)$ για οποιοδήποτε $A\in\mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\varepsilon\varphi(2x)}{\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\varepsilon\varphi^2(2x+\pi)+1\right)}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu(2x)$.

(β') Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(γ') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0,\pi]$, με βάση τη γραφική της παράσταση.

(δ') Σχεδιάστε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ μαζί με τη γραφική παράσταση της f. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια αυτού του σχήματος, να εξηγήσετε *πόσες* λύσεις έχει η εξίσωση:

$$\eta\mu(2x) = \frac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Τέλος, αφού μελετήσετε προσεκτικά το σχήμα, να βρείτε τι μορφή θα έχουν αυτές οι λύσεις — είτε με τη βοήθεια κάποιου μαθηματικού τύπου είτε περιγραφικά (π.χ. «ακέραια πολλαπλάσια του $\pi/3$» ή κάτι παρόμοιο).

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

(α') Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη άσκηση, να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}.$$

(β') Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο, να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας ή, αν δεν βρήκατε κάποιο ικανοποιητικό αποτέλεσμα στο προηγούμενο ερώτημα, να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό κύκλο για να δείτε ποιες είναι οι πιθανές λύσεις της εξίσωσης.

(γ΄) Να ακολουθήσετε τα προηγούμενα βήματα και για την εξίσωση:

$$\text{ημ}x = 1.$$

5. Θεωρήστε ένα σημείο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $A = 5m$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω, κινούμενο αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Για δική μας ευκολία, ας θεωρήσουμε αυτό το σημείο κινείται στον κύκλο που φαίνεται στο σχήμα ;;.

   (α΄) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου Μ σαν συναρτήσεις της γωνίας θ.

   (β΄) Γνωρίζουμε ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή καθ΄ όλη τη διάρκεια της κίνησης και, μάλιστα, συνδέεται με τη γωνία στροφής μέσω της σχέσης:

   $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

   όπου t ο χρόνος της κίνησης. Αν υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το σημείο Μ βρισκόταν στη θέση $M(1, 0)$, να εκφράσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ κατά την κίνησή του σαν συναρτήσεις του *χρόνου*.

   (γ΄) (*)Αν τοποθετήσουμε έναν προβολέα αριστερά του σημείου Μ, τότε ποια θα είναι η εξίσωση θέσης-χρόνου της σκιάς του Μ πάνω σε έναν τοίχο παράλληλο στον άξονα $y'y$; Τι κίνηση εκτελεί η σκιά του σημείου Μ; Ομαλή ή όχι;

6. Πολλές φορές, για ευκολία στους υπολογισμούς (ειδικά τα παλαιότερα χρόνια), χρησιμοποιούσαμε έναν ακόμα τριγωνομετρικό αριθμό, το *αντίστροφο συνημίτονο*, το οποίο το συμβολίζουμε με $\sec x$ και ορίζεται ως[1]:

   $$\sec x = \frac{1}{\text{συν}x}.$$

   (α΄) Να δώσετε έναν γεωμετρικό ορισμό του $\sec x$ για γωνίες $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

   (β΄) Να υπολογίσετε τη τιμή του $\sec x$ για όσες από τις χαρακτηριστικές γωνίες $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ και $\pi/2$ μπορείτε.

   (γ΄) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση:

   $$f(x) = \sec x$$

   είναι άρτια ή περιττή.

   (δ΄) Να αποδείξετε ότι:

   $$\sec^2 x = 1 + \text{εφ}^2 x.$$

   (ε΄) Μπορείτε να βρείτε σε τι αντιστοιχεί το $\sec x$ πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο;

   (ϛ΄) Μπορείτε να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sec x$; Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε κάποιο εργαλείο σχεδίασης γραφικών παραστάσεων προς βοήθειά σας.

7. Να λύσετε και τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{ημ}(2x) &= 0 \\ 3\text{συν}(-4\pi x) + 3 &= 0 \\ \text{ημ}^2 x &= 4\text{ημ}x - 3 \\ \text{ημ}x + \text{συν}x &= 0 \\ \text{εφ}(2x + \pi) &= 1. \end{aligned}$$

8. Θεωρήστε την εξίσωση:

$$\text{ημ}x = 0.$$

   (α΄) Να δείξετε ότι οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή οι αριθμοί x της μορφής:

   $$x = k\pi,\ \ k\iota\mathbb{Z}.$$

[1] Πολλές φορές το συμβολίζουμε στα ελληνικά με *τεμχ*, από τη μετάφραση του αγγλικού όρου secant ως διατέμνουσα, αλλά δε μου αρέσει αυτός ο συμβολισμός...

(β′) Να ερμηνεύσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο το παραπάνω αποτέλεσμα.

(γ′) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ το παραπάνω αποτέλεσμα.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{(2 - \eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu(2x + \pi/3)}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2}.$$

(α′) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

(β′) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μεγαλύτερο της μίας περιόδου. *Θα χρειαστεί να θυμηθείτε τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων* $g(x)$ *και* $g(x-c)$ *για τις διάφορες τιμές του* $c \in \mathbb{R}$.

(γ′) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

(δ′) Αφού ξανασχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων, να βρείτε, εποπτικά, τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x).$$

(ε′) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση:

$$f(x) = g(x).$$

(ϛ′) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι:

$$(f(x))^2 = f(x).$$

10. Δίνεται η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x = x.$$

(α′) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$.

(β′) Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε και την ευθεία $y = x$.

(γ′) Με βάση το σχήμα που έχετε κατασκευάσει, μπορείτε να βρείτε πόσες ρίζες έχει η δοθείσα εξίσωση;

(δ′) Αν αριθμήσουμε τις *μη αρνητικές* ρίζες της εξίσωσης αυτής ως εξής: $a_0 = 0$, a_1 είναι η πρώτη θετική ρίζα μετά το 0, a_2 η δεύτερη κ.ο.κ. τότε να δείξετε ότι:

$$a_{\nu+1} - a_\nu > a_\nu - a_{\nu-1},$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, να δείξετε ότι όσο προχωράμε προς τα δεξιά, οι ρίζες της εξίσωσης «απομακρύνονται»[2].

11. Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο και αρκετή γεωμετρία, να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\eta\mu x < x.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ και όποια άλλη χρειαστείτε (είτε τριγωνομετρικής συνάρτησης είτε π.χ. ευθείας) να ερμηνεύσετε την παραπάνω ανισότητα γεωμετρικά χωρίς τον τριγωνομετρικό κύκλο.

Τέλος, να εξετάσετε αν αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή, αν δεν ισχύει, να εξετάσετε πώς μπορείτε να την «παραλλάξετε» έτσι ώστε να ισχύει.

12. Μπορείτε να βρείτε εξίσωση που να περιέχει μόνο τριγωνομετρικές συναρτήσεις και να *μην* έχει άπειρες λύσεις; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

[2] Μπορείτε να εξηγήσετε πώς η σχέση που πρέπει να αποδείξετε σημαίνει αυτό το πράγμα;

4

Πολυώνυμα

4.1 Βασικές έννοιες σχετικές με τα πολυώνυμα

Ξεκινάμε με τον ορισμό του μονωνύμου:

Ορισμός 4.1: Μονώνυμο

Μία παράσταση της μορφής αx^k, όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός, το x είναι μία μεταβλητή και το k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος ($k \in \{0, 1, 2, \dots\}$), θα λέγεται μονώνυμο μίας μεταβλητής (της x). Αν $\alpha \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο βαθμός του μονωνύμου είναι ίσος με k, ενώ, αν $\alpha = 0$, θα λέμε ότι ο βαθμός του μονωνύμου *δεν ορίζεται.*

Με βάση τον παραπάνω έχουμε και τον ακόλουθο:

Ορισμός 4.2: Πολυώνυμο

Θα ονομάζουμε πολυώνυμο μίας μεταβλητής κάθε παράσταση που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μονωνύμων. Δηλαδή, η παράσταση $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο αν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ και συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k.$$

Επίσης, θα ονομάζουμε βαθμό του πολυωνύμου και θα συμβολίζουμε με $\deg(p(x))$ τον μεγαλύτερο ακέραιο s, για τον οποίο ισχύει ότι $a_s \neq 0$. Αν όλοι οι συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_k$ είναι ίσοι με μηδέν, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου δεν ορίζεται.

Σχόλιο

Συχνά, ορίζεται βαθμός για το μηδενικό πολυώνυμο/μονώνυμο ίσος με $-\infty$, ωστόσο εμείς υιοθετούμε τη σύμβαση του σχολικού βιβλίου και θεωρούμε ότι το μηδενικό πολυώνυμο/μονώνυμο δεν έχει βαθμό.

Τέλος, ορίζουμε πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα:

Ορισμός 4.3: Ισότητα πολυωνύμων

Θα λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα **αν και μόνον αν** οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι. Δηλαδή, αν έχουμε δύο πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ όπου:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

και:

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m,$$

τότε:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow m = n \text{ και } a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n.$$

4.2 Διαιρετότητα πολυωνύμων

Δεχόμαστε, χωρίς απόδειξη[1], και το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.1: Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

Για κάθε δύο πολυώνυμα, $p(x)$ και $q(x)$, υπάρχουν δύο άλλα μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

1. $p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x)$,
2. $\upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon(x)) < \deg(q(x))$.

Έχουμε, τώρα, το ακόλουθο εξαιρετικά χρήσιμο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.2

Ένα πολυώνυμο $p(x)$ έχει ως παράγοντα το $(x - \rho)$ **αν και μόνον αν** το ρ είναι ρίζα του, δηλαδή $p(\rho) = 0$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι το $p(x)$ έχει το $(x - \rho)$ ως παράγοντα. Τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο $q(x)$ έτσι ώστε:

$$p(x) = (x - \rho)q(x).$$

Επομένως, έχουμε:

$$p(\rho) = (\rho - \rho)q(\rho) = 0,$$

άρα το ρ είναι ρίζα του $p(x)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι $p(\rho) = 0$. Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του $p(x)$ με το $(x-\rho)$ έχουμε ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

1. $p(x) = \pi(x)(x - \rho) + \upsilon(x)$,
2. είτε $\upsilon(x) = 0$ είτε $\deg(\upsilon(x)) < \deg((x - \rho)) = 1$.

[1] Μπορείτε να βρείτε την απόδειξη στο Παράρτημα.

Επομένως, αφού $\deg(\upsilon(x)) < 1$ ή $\upsilon(x) = 0$, έπεται ότι $\deg(\upsilon(x)) = 0$ ή $\upsilon(x) = 0$, δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, $\upsilon(x) = c$, για κάποιον σταθερό αριθμό $c \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$p(x) = \pi(x)(x - \rho) + c.$$

Τώρα, αφού $p(\rho) = 0$, έπεται ότι:

$$p(\rho) = 0 \Leftrightarrow \cancelto{0}{\pi(\rho)(\rho - \rho)} + c = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Έτσι, έχουμε:

$$p(x) = \pi(x)(x - \rho),$$

δηλαδή, το $(x - \rho)$ είναι παράγοντας του $p(x)$.

□

Ας περάσουμε τώρα και σε μερικά παραδείγματα, για να μην χάνουμε τη φόρμα μας.

Παράδειγμα 4.1 (Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος). Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x) = x^4 - 3x^3 + x$ με το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

Ακολουθούμε πιστά τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο, οπότε παίρνουμε (βλ. σχήμα 4.1):

$$\pi(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ και } \upsilon(x) = -11x + 16.$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,0x^2 & +\ \ x & +\ 0 & x^2 - 4 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & & +\,4x^2 & & & x^2 - 3x + 4 \\ \cline{1-3}
& -\,3x^3 & +\,4x^2 & +\ \ x & & \\
& +\,3x^3 & & -\,12x & & \\ \cline{2-4}
& & +\,4x^2 & -\,11x & & \\
& & -\,4x^2 & & +\,16 & \\ \cline{3-5}
& & & -\,11x & +\,16 &
\end{array}$$

Σχήμα 4.1: Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε την παραπάνω διαίρεση χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner[2], παρατηρώντας πρώτα ότι ο διαιρέτης, $x^2 - 4$, γράφεται ως $(x-2)(x+2)$. Έτσι, διαιρούμε πρώτα τον διαρετέο, x^4-3x^3+x, με το $x - 2$, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & 0 & 1 & 0 & \rho = 2 \\
 & 2 & -2 & -4 & -6 & \\ \hline
1 & -1 & -2 & -3 & \boxed{-6} &
\end{array}$$

[2]Στο Παράρτημα μπορείτε να βρείτε μία συζήτηση για την ορθότητα του σχήματος Horner.

Επομένως:

$$p(x) = (x-2)\underbrace{(x^3 - x^2 - 2x - 3)}_{q(x)} - 6.$$

Διαιρούμε τώρα το πηλίκο της διαίρεσης, $q(x)$, με τον άλλον παράγοντα του διαιρέτη, $x+2$, οπότε:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 & \rho = -2 \\ & -2 & 6 & -8 & \\ \hline 1 & -3 & 4 & \boxed{-11} & \end{array}$$

Επομένως:

$$q(x) = (x+2)(x^2 - 3x + 4) - 11.$$

Επιστρέφοντας στο $p(x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)q(x) - 6 = \\ &= (x-2)\left[(x+2)(x^2 - 3x + 4) - 11\right] - 6 = \\ &= (x-2)(x+2)(x^2 - 3x + 4) - 11(x-2) - 6 = \\ &= (x^2 - 4(x^2 - 3x + 4) - 11x + 22 - 6 = \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 4) - 11x + 16. \end{aligned}$$

□

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με παραδείγματα επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

Παράδειγμα 4.2 (Πολυωνυμική εξίσωση). Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^4 - 3x^3 + 2x = 0.$$

Στόχος μας είναι παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $x^4 - 3x^3 + 2x$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αρχικά, βγάζουμε ως κοινό παράγοντα το x:

$$x^4 - 3x^3 + 2x = x\underbrace{(x^3 - 3x^2 + 2)}_{p(x)}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $p(1) = 0$, επομένως το 1 είναι ρίζα του p, άρα το $(x-1)$ είναι παράγοντάς του. Για να βρούμε την παραγοντοποίηση, χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & \rho = 1 \\ & 1 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Επομένως:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2).$$

Σχόλιο

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και τριωνύμων με αρνητική διακρίνουσα.

Έτσι, η εξίσωση γράφεται ως:

$$
\begin{aligned}
&x^4 - 3x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2-2x-2) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 1 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 1 - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

□

Παράδειγμα 4.3 (Πολυωνυμική ανίσωση). Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^2-4}{1-x} \leq \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2}.$$

Αρχικά, παίρνουμε τους απαραίτητους περιορισμούς:

- $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$
- $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Επιλύουμε την εξίσωση:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1,$$

  επομένως, $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Τώρα, επεξεργαζόμαστε την ανίσωση ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2-4}{1-x} \leq \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{1-x} - \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{-(x-1)} - \frac{x^3-4x}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{(x-1)} - \frac{x^3-4x}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(4-x^2)(x-2) - (x^3-4x)}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{4x - 8 - x^3 + 2x^2 - x^3 + 4x}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x^3 + 2x^2 + 8x - 8}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(-2x^3 + 2x^2 + 8x - 8)(x-1)(x-2)}_{p(x)} \leq 0.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα του $-2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$, επομένως, από του ακόλουθο σχήμα Horner:

$$
\begin{array}{cccc|c}
-2 & 2 & 8 & -8 & \rho = 1 \\
 & -2 & 0 & 8 & \\
\hline
-2 & 0 & 8 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$-2x^2+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$-$	
$p(x)$		$+$	|	$-$	‖	$-$	‖	$+$	

Πίνακας 4.1: Ο πίνακας προσήμου του $p(x)$.

έπεται ότι η ανισότητα γράφεται ως:

$$(x-1)(-2x^2+8)(x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(-2x^2+8)(x-2) \leq 0.$$

Για το τριώνυμο $-2x^2+8$, παρατηρούμε ότι οι ρίζες του είναι οι -2 και 2,οπότε και παίρνουμε τον πίνακα προσήμου 4.1, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και τους περιορισμούς $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Συνεπώς, οι λύσεις τις ανισότητας είναι οι:

$$x \in [-2, 1) \cup (1, 2).$$

□

4.4 Ασκήσεις

4.4.1 Α΄ Ομάδα

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με τα σύμβολα $=, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ έτσι ώστε να είναι αληθείς:

$$x^2 = 1 \ldots x = -1 \tag{4.1}$$
$$3 + 2 \ldots 5 \tag{4.2}$$
$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \ldots xy > 0 \tag{4.3}$$
$$1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \tag{4.4}$$
$$\sqrt{x^2} \ldots x \ldots x > 0 \tag{4.5}$$
$$x + 2x \ldots 3x \ldots 6x - 3x \tag{4.6}$$
$$x^2 \geq 0 \ldots 4 \ldots 4 \tag{4.7}$$
$$x^2 \ldots x - 1 \ldots \text{περιπτεράς} \ldots \text{καρότο} \tag{4.8}$$

2. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις με τον *Ευκλείδειο αλγόριθμο* (διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο) και, στη συνέχεια, να γράψετε την *ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης* για κάθε μία από αυτές:

   (α΄) $5 \div 3$,
   (β΄) $25 \div 13$,
   (γ΄) $185 \div 6$,
   (δ΄) $2596 \div 11$,
   (ε΄) $108 \div 7$,
   (ϛ΄) $9 \div 14$.

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους παρακάτω αριθμούς:

   (α΄) 6,
   (β΄) 16,
   (γ΄) 31,
   (δ΄) 168,
   (ε΄) 20562,
   (ϛ΄) 1453.

   Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτήν την ανάλυση που βρήκατε, να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο όλων των παραπάνω αριθμών.

4. Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις πλήρως, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις ...:

   (α΄) $1, 2, \ldots, 11$,
   (β΄) $1, 4, 7, \ldots, 31$,
   (γ΄) $2 + 4 + 6 + \ldots + 18$,
   (δ΄) $4 - 2 - \ldots - 6$,
   (ε΄) $2 + 4 + 8 + \ldots + 256$,
   (ϛ΄) $1 - 2 + 3 - \ldots + 13$,
   (ζ΄) $x + 2x^2 + \ldots + 8x^8$.

   Σε κάθε περίπτωση, να μετρήσετε πόσοι όροι/προσθετέοι εμφανίζονται.

5. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να πείτε πόσοι είναι οι προσθετέοι, για $\nu = 1, 5, 10, 100$ και, γενικά, για οποιοδήποτε ν.

   (α΄) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^\nu$,
   (β΄) $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2\nu+1}$,
   (γ΄) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$,
   (δ΄) $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

6. Αν p, q είναι δύο πολυώνυμα του x, έτσι ώστε:

$$p(x) = ax^5 - x^3 + 3x - 1$$
$$q(x) = 2x^5 + bx^3 - x^2 + x,$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε:

   (α΄) να βρείτε τον βαθμό του $p(x)+q(x)$ για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$,
   (β΄) να βρείτε το γινόμενο του $p(x) \cdot q(x)$ για τις διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις πολυωνύμων $p(x)$ και $q(x)$ και να γράψετε σε κάθε περίπτωση την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης:

$$p(x) = 3x^5 + 5x^3 + x^2 - x \tag{4.9}$$
$$q(x) = x^3 - 2$$
$$p(x) = 5x^5 + 3x^3 + x - 2 \tag{4.10}$$
$$q(x) = 7x^5 - 2x$$

$$p(x) = x^9 + x^8 + \ldots + x + 1 \qquad (4.11)$$
$$q(x) = x^2 + x$$
$$p(x) = x^{2019} + x^{2018} + \ldots + x + 1 \quad (4.12)$$
$$q(x) = x - 1.$$

8. Δίνονται οι αριθμοί:

$$p = 14856, \;\; q = 165.$$

(α΄) Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης:

$$p \div q.$$

(β΄) Να γράψετε τα δεκαδικά αναπτύγματα των p, q.

(γ΄) Να ξαναγράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης των p, q, χρησιμοποιώντας τα δεκαδικά αναπτύγματα όλων των αριθμών (των p, q και του πηλίκου και του υπολοίπου).

(δ΄) Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης των πολυωνύμων:

$$(x^4+4x^3+8x^2+5x+6)\div(x^2+6x+5).$$

Τι παρατηρείτε;

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α΄) $x^3 - 4x^2 + x = 0$,

(β΄) $-8x^3 + 13x - 5 = 0$,

(γ΄) $\dfrac{x^3 - 3x - 4}{x^2 - 1} = 2$.

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α΄) $-4x^3 + 6x^2 + 2x > -4$,

(β΄) $\dfrac{x^2 + x}{x - 1} < \dfrac{x^2 - 1}{x}$,

(γ΄) $\dfrac{2x^2}{x - 2} + \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x}$.

11. Να βρείτε δύο πολυώνυμα p, q τέτοια ώστε:

$$p(x) = (2x + 4)q(x) - 3.$$

12. Να βρείτε δύο πολυώνυμα p, q βαθμού 3 έτσι ώστε:

(α΄) το άθροισμά τους να έχει βαθμό 3,

(β΄) το άθροισμά τους να έχει βαθμό 2,

(γ΄) το άθροισμά τους να έχει βαθμό 1,

(δ΄) το άθροισμά τους να έχει βαθμό 0.

13. Να εξηγήσετε γιατί το παρακάτω δεν είναι ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης πολυωνύμων:

$$x^3 + 1 = x^2(x + 1) + (-x^2 + 1).$$

14. Να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε[3] τις παρακάτω τιμές του πολυωνύμου:

$$p(x) = 2019x^4 + 2018x^3 + 2017x^2 + 2.$$

(α΄) $p(0)$,

(β΄) $p(1)$,

(γ΄) $p(-1)$,

(δ΄) $p(2)$,

(ε΄) $p(-2)$,

(ϛ΄) $p(7)$.

15. Αν $p(x)$ είναι το πολυώνυμο:

$$p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$

να μετρήσετε:

(α΄) πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις θα χρειαστεί να κάνετε για να υπολογίσετε το $p(2019)$ από τον τύπο του p και,

(β΄) πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις θα χρειαστεί να κάνετε για να υπολογίσετε το $p(2019)$ χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner.

16. Συγκρίνετε τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας Διαίρεσης πολυωνύμων με αυτόν που ακολουθείτε κατά την εφαρμογή του σχήματος Horner. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε μεταξύ τους. Εστιάστε και σε διαδικαστικά στοιχεία (*πώς* υλοποιείται ο καθένας τους), αλλά και σε εννοιολογικά στοιχεία (*τι* κάνει ο καθένας και πού χρησιμεύει).

[3]Χωρίς υπολογισή τσέπης, κινητό ή οποιαδήποτε άλλη μηχανή/άνθρωπο/ον σε αυτό ή σε άλλο σύμπαν μπορεί να κάνει περίπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς.

17. Να παραγοντοποιήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή χωρίς, τα παρακάτω πολυώνυμα και, στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες τους, αν αυτές υπάρχουν:

$$p_1(x) = 4x - 12$$
$$p_2(x) = 3x^2 + 7x + 4$$
$$p_3(x) = x^2 + 3$$
$$p_4(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$p_5(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$p_6(x) = x^4 + 4x^2 - 12$$
$$p_7(x) = x^8 + x^7 - x^3 - 1$$
$$p_8(x) = x^{2019} + x^{2018} + \ldots + x + 1$$
$$p_9(x) = x^4 + x^2 + 1.$$

18. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(α΄) $4x - 3 = 8$

(β΄) $18x^2 - 9x + 1 = 0$

(γ΄) $x^3 - 5x^2 + 7x = 3$

(δ΄) $9x^4 - 8x^3 + 3x - 4 = 0$

(ε΄) $x^5 - 4x^2 - 5x - 6 = 0.$

19. Να αποδείξετε ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 = 0,$$

είναι ο αριθμός 3. Ποια είναι η πολλαπλότητα της ρίζας αυτής;

20. Να βρείτε μία εξίσωση που:

(α΄) να έχει μοναδική ρίζα το 8,

(β΄) να έχει ως ρίζες μόνο το -4 και το 6,

(γ΄) να έχει ως ρίζες μόνο το 2 και το 0,

(δ΄) να έχει ως ρίζες μόνο τους $2, 3, 4, 5, 6$,

(ε΄) να έχει ως διπλή ρίζα το 0, ως απλή το 11 και ως τριπλή το 17,

(ϛ΄) να μην έχει καμμία ρίζα.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α΄) $x^2 - 2x - 8 > 0$

(β΄) $3x^3 - 7x^2 + x + 2 \leq 0$

(γ΄) $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 < 0$

(δ΄) $x^6 - 12x^3 \geq -35$

(ε΄) $6x^3 + 14x < 11x^2 + 9.$

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α΄) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} + \dfrac{1}{x-2} > 0$

(β΄) $\dfrac{x^3 - x^2 + 20x}{x-7} \leq 0$

(γ΄) $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} - \dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 2$

(δ΄) $\dfrac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 6}{2x^2 - 4x} + \dfrac{x^2+1}{x} > 3x + 4$

(ε΄) $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + 3x + 2} - \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x+2} > 5.$

23. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις *(Θα σας φανεί χρήσιμο να χρησιμοποιήσετε εκθέτες αντί για ρίζες)*:

(α΄) $\sqrt{x^2 \sqrt[3]{x^5}},$

(β΄) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^8 \sqrt[3]{x}}},$

(γ΄) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^6}}},$

24. Να εξηγήσετε:

(α΄) Γιατί δεν ορίζουμε το σύμβολο $x^{\mu/\nu}$ και για μη θετικές τιμές του x (δηλαδή για $x \leq 0$), όταν ο μ είναι ακέραιος και ο ν φυσικός.

(β΄) Γιατί δεν ορίζουμε το σύμβολο $x^{\mu/\nu}$ και για αρνητικές τιμές του x αλλά το ορίζουμε για $x = 0$, όταν ο μ και ν είναι φυσικοί, με το $\mu \neq 0$.

25. Να ξαναγράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χρησιμοποιώντας μόνο ριζικά και ακέραιες δυνάμεις (δηλαδή, να μην εμφανιστεί πουθενά παράσταση της μορφής $x^{5/3}$, αλλά μόνο ακέραιοι εκθέτες):

(α΄) $x^{1.7},$

(β΄) $x^{2.67},$

(γ΄) $x^{-4.93},$

(δ΄) $x^{0.33\ldots}.$

26. Να υπολογίσετε με ακρίβεια τουλάχιστον δέκα (10) δεκαδικών ψηφίων τους παρακάτω αριθμούς (αν δεν έχετε αριθμομηχανή με τέτοια ακρίβεια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το δωρεάν εργαλείο `https://web2.0calc.com/`):

    (α΄) 2^1,
    (β΄) $2^{1.4}$,
    (γ΄) $2^{1.41}$,
    (δ΄) $2^{1.414}$,
    (ε΄) $2^{1.4142}$,
    (ϛ΄) $2^{1.41421}$,
    (ζ΄) $2^{1.414213}$,

    Στη συνέχεια, να υπολογίσετε με την ίδια ακρίβεια και τον $\sqrt{2}$ και να συνεχίσετε την παραπάνω διαδικασία προσθέτοντας κι άλλα ψηφία του $\sqrt{2}$ στον εκθέτη του 2, φτάνοντας τουλάχιστον μέχρι το δέκατο. Στο τέλος, χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή, υπολογίστε και τον αριθμό $2^{\sqrt{2}}$. Τι παρατηρείτε;

27. Χρησιμοποιώντας μία αριθμομηχανή με καλή ακρίβεια και το σκεπτικό της παραπάνω άσκησης, προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί ισχύει η παρακάτω σχέση:
$$2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\pi} = 2^{\sqrt{2}+\pi}.$$
Στη συνέχεια, να γενικεύσετε το παραπάνω επιχείρημα και να εξηγήσετε γιατί ισχύει η σχέση:
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$
για κάθε $a > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$.

4.4.2 Β΄ Ομάδα

1. Δίνονται δύο πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ για τα οποία ισχύουν τα εξής:

    - $p(x) = q(x)(x-4)$.
    - Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $p(x)$ με το $x^2 - 16$ είναι 0.
    - Η σχέση:
    $$x^4 - x + 1 = \pi(x)(x^3+2) + p(x)$$
    είναι ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης του $x^4 - x + 1$ με το $x^3 + 2$.
    - $q(0) = 4$.

    (α΄) Να βρείτε το $p(0)$.
    (β΄) Να βρείτε τον βαθμό του $p(x)$.
    (γ΄) Να βρείτε τις ρίζες του $p(x)$.
    (δ΄) Να βρείτε το $p(x)$.
    (ε΄) Να βρείτε το $q(x)$.

2. Τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής είναι, επί της ουσίας, *πεπερασμένα* αθροίσματα μονωνύμων (μίας μεταβλητής), δηλαδή, κάποτε σταματάμε να προσθέτουμε όρους. Υπάρχουν, όμως, και *άπειρα* αθροίσματα μονωνύμων και, μάλιστα, αρκετά από αυτά είναι ιδιαίτερα «κομψά». Για παράδειγμα, αν πάρουμε έναν αριθμό $x \in (0,1)$, τότε ισχύει:
$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$
Αλλά, γιατί ισχύει αυτό; Μπορείτε να το «αποδείξετε», με κάποιον τρόπο; Στη συνέχεια, μπορείτε, με δεδομένου το παραπάνω, να αποδείξετε ότι:
$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x};$$

3. Να βρείτε το πολυώνυμο p αν γνωρίζετε ότι:

    - Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του p με το x^2+1 είναι:
    $$p(x) = \pi_1(x)(x^2+1) + 3x - 4.$$
    - Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης ενός πολυωνύμου q, τρίτου βαθμού, με το x^2+1 είναι:
    $$q(x) = \pi_2(x)(x^2+1) + p(x).$$

4. Θα λέμε ότι ένα πολυώνυμο p είναι «*μικρότερο*» από ένα άλλο πολυώνυμο q, και θα το συμβολίζουμε με
$$p \preceq q,$$

αν $\deg(p(x)) \leq \deg(q(x))$, δεχόμενοι ότι το μηδενικό πολυώνυμο είναι το μικρότερο όλων. Να αποδείξεε τα ακόλουθα:

(α΄) Αν $p \preceq q$ και $q \preceq r$, τότε $p \preceq r$ (η μεταβατική ιδιότητα της «ανισότητας»).

(β΄) Αν $p \preceq q$ και $q \preceq p$, τότε τα p και q έχουν τον ίδιο βαθμό.

(γ΄) Υπάρχουν δύο πολυώνυμα p, q τέτοια ώστε $p \preceq q$, $q \preceq p$ και $p \neq q$.

5. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, ότι για κάθε πολυώνυμο p, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α΄) το $p(0)$ είναι ίσο με τον σταθερό όρο του πολυωνύμου p,

(β΄) το $p(1)$ είναι ίσο με το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου p.

6. Ένας αλγόριθμος[4] λέγεται αλγόριθμος *ωμής βίας*[5], αν, κατά την επίλυση ενός προβλήματος, εξαντλεί όλες τις δυνατές περιπτώσεις που οδηγούν σε κάποια λύση. Για παράδειγμα, ένας τέτοις αλγόριθμος επίλυσης εξισώσεων, αυτό που πρακτικά θα έκανε, θα ήταν να εξετάσει αν όλοι (!) οι αριθμοί αποτελούν λύση μιας εξίσωσης. Χρησιμοποιώντας μία τέτοια προσέγγισης «ωμής βίας» και το σχήμα Horner, προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι οι λύσεις τους είναι μεταξύ των αριθμών $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(α΄) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$,

(β΄) $x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 6 = 0$.

7. Εξετάστε αν αληθεύουν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

(α΄) Υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ πέμπτου βαθμού τέτοιο ώστε:

$$p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = \\ = 0.$$

(β΄) Υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ πέμπτου βαθμού τέτοιο ώστε:

$$p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = \\ = p(5) = 0.$$

8. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner να αποδείξετε την ακόλουθη ταυτότητα:

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

9. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση, να αποδείξετε, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$, την ταυτότητα:

$$a^\nu - b^\nu = (a-b)(a^{\nu-1} + a^{\nu-2}b + \ldots + b^{\nu-1}).$$

10. Να αποδείξετε ότι αν ένας ακέραιος αριθμός είναι ρίζα μία πολυωνυμική εξίσωσης, τότε είναι και διαιρέτης του σταθερού όρου του πολυωνύμου.

11. Να αποδείξετε ότι, για κάθε πολυώνυμο $p(x)$, το $p(1)$ ισούται με το άθροισμα των συντελεστών του.

12. Είδαμε ότι κάθε πολυώνυμο $p(x)$ που έχει μία ρίζα ρ, μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή:

$$p(x) = (x - \rho)q(x).$$

Με βάση το παραπάνω, αν ένα πολυώνυμο έχει βαθμό ν, πόσες ρίζες, το πολύ, ενδέχεται να έχει;

13. Όπως είπαμε, κάθε πολυώνυμο που έχει ρίζα, μπορεί να παραγοντοποιηθεί. Ισχύει και το αντίστροφο; Ισχύει δηλαδή ότι κάθε πολυώνυμο που μπορεί να παραγοντοποιηθεί έχει (τουλάχιστον μία) ρίζα;

14. Να αποδείξετε ότι, αν:

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

είναι μία εξίσωση πέμπτου βαθμού με ακριβώς πέντε ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$, τότε ισχύει ότι:

$$a = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5,$$

[4]Δηλαδή, «μπακάλικα», μία σειρά από βήματα που μας επιτρέπουν να επιλύσουμε ένα πρόβλημα.
[5]Brute-force, στα αγγλικά.

δηλαδή, ο συντελεστής του x^4 είναι το άθροισμα των ριζών. Επίσης, να αποδείξετε ότι:

$$e = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4 \cdot \rho_5,$$

δηλαδή, ο σταθερός όρος είναι το γινόμενο των ριζών. Μπορείτε να βρείτε και τους υπόλοιπους συντελεστές, b, c, d, συναρτήσει των ριζών;

15. Να δώσετε παράδειγμα ενός πολυωνύμου $p(x)$ το οποίο να έχει άπειρες ρίζες. Πόσα τέτοια πολυώνυμα μπορείτε να βρείτε;

16. Αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο $p(x)$:

    - είναι τρίτου βαθμού,
    - όλοι οι συντελεστές του είναι είτε 0 είτε 1,

    τότε:

    (α΄) Πόσα τέτοια πολυώνυμα υπάρχουν; (δοκιμάστε να απαντήσετε χωρίς να τα γράψετε όλα).

    (β΄) Αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι ακριβώς ένας συντελεστής είναι ίσος με 0, τότε πόσα τέτοια πολυώνυμα υπάρχουν;

    (γ΄) Αν, εναλλακτικά, γνωρίζετε ότι $p(1) = 2$, τότε, πόσα τέτοια πολυώνυμα υπάρχουν;

17. Ο τρόπος με τον οποίο λύνουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση βασίζεται έντονα στη χρήση της ταυτότητας

    $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

    Για παράδειγμα, για να λύσουμε την εξίσωση:

    $$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

    χωρίς τη χρήση του τύπο των ριζών, μπορούμε πρώτα να «συμληρώσουμε» το τετράγωνο, ως εξής:

    $$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 3 = \\ = (x+2)^2 - 1,$$

    και, στη συνέχεια, ξαναγράφουμε την εξίσωση ως εξής:

    $$(x+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1,$$

    οπότε, εύκολα βλέπουμε ότι:

    $$x + 2 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -2 \pm 1,$$

    δηλαδή $x = -1$ ή $x = -3$. Κατ΄ αναλογίαν, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

    $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

    να επιλύσετε τις εξισώσεις:

    $$x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0,$$

    και

    $$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0.$$

    Τι διαφορές/ομοιότητες παρατηρείτε; Μπορείτε να εφαρμόσετε την ίδια τεχνική στην εξίσωση:

    $$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

18. Όπως είδαμε, το σχήμα Horner μπορεί να μας βοηθήσει να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο ή ακόμα και να κάνουμε πιο γρήγορα τη διαίρεση ενός πολυωνύμου με έναν πρωτοβάθμιο παράγοντα (π.χ. το $x - 2$). Μπορείτε να σκεφτείτε έναν τρόπο για να αξιοποιήσουμε το σχήμα Horner και σε άλλες περιπτώσεις διαιρέσεων με διαιρέτες μεγαλύτερου βαθμού; Για παράδειγμα, πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε τη διαίρεση μεταξύ των p, q, όπου:

    $$p(x) = 3x^8 - 5x^7 + 6x^4 + 3x - 1$$
    $$q(x) = x^2 - 5x + 6,$$

    χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner; (*Υπόδειξη: Δοκιμάστε να παραγοντοποιήσετε τον διαιρέτη*).

19. Μία άλλη χρήση του σχήματος Horner είναι να αποδεικνύουμε ταυτότητες, πραγματοποιώντας διαίρεση με κάποιον πρωτοβάθμιο παράγοντα. Προσπαθήστε να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

    (α΄) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

    (β΄) $x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

    (γ΄) $x^7 + 1 = (x+1)(x^6 - x^5 + \ldots + x^2 - x + 1)$

    (δ΄) $x^9 + 1 = (x+1)(x^8 - x^7 + \ldots + x^2 - x + 1)$

(ε΄) $x^8 - y^8 = (x-y)(x^7 + x^6 y + \ldots + x^2 y^5 + x y^6 + y^7)$

(ϛ΄) $x^\nu - 1 = (x+1)(x^{\nu-1} - x^{\nu-2} + \ldots + x^2 - x + 1)$, για κάθε ν περιττό.

20. Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, μπορείτε να βρείτε μία ταυτότητα παρόμοια με την τελευταία που όμως να ισχύει και για τους άρτιους; Αν ναι, ποια είναι; Αν όχι, γιατί; *Υπόδειξη: Σκεφτείτε λίγο τα πολυώνυμα* x^2+1, x^4+1 *κ.λπ.*

21. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(x) = x^6 - 7x^5 + 19x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 4x.$$

(α΄) Να παραγοντοποιήσετε το παραπάνω πολυώνυμο χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε.

(β΄) Να βρείτε τις ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου.

(γ΄) Να βρείτε την πολλαπλότητα κάθε ρίζας του $p(x)$.

(δ΄) Να σχεδιάσετε, με βάση τα παραπάνω, τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου $p(x)$ προσεγγιστικά.

(ε΄) Να επαληθεύσετε τη γραφική παράσταση του $p(x)$ χρησιμοποιώντας το GeoGebra ή όποιο άλλο εργαλείο θέλετε.

(ϛ΄) Να πείτε σε ποια διαστήματα η συνάρτηση $p(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα, κατά προσέγγιση, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του $p(x)$.

(ζ΄) Με βάση τη γραφική παράσταση που σχεδιάσατε, να σχεδιάσετε και τις γραφικές παραστάσεις των:

$$p(x)+3,\ p(x-1),\ p(x-1)+3.$$

(η΄) Με βάση τη γραφική παράσταση του $p(x)$, να λύσετε την ανισότητα:

$$p(x) > 0.$$

(θ΄) Ανάλογα, να λύσετε και την ανισότητα:

$$p(x) < 0.$$

(ι΄) Ανάλογα, να λύσετε και την ανισότητα:

$$p(x-1) > -3.$$

(ια΄) Ανάλογα, να λύσετε και το Κυπριακό.

22. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(x) = 16x^7 - 64x^6 - 12x^5 + 292x^4 - 184x^3 - 336x^2 + 288x.$$

(α΄) Να παραγοντοποιήσετε το $p(x)$. *Θα χρειαστείτε, πέρα από την οποιαδήποτε προφανή παραγοντοποίηση, να αναζητήσετε και ακέραιες ρίζες αλλά και ρητές ρίζες!*

(β΄) Να λύσετε την εξίσωση:

$$p(x) = 0.$$

(γ΄) Να βρείτε την πολλαπλότητα κάθε ρίζας του $p(x)$.

(δ΄) Να εξηγήσετε ποιο θα είναι το πρόσημο του $p(x)$ για πολύ μεγάλες τιμές του x, καθώς επίσης και για πολύ μικρές τιμές του x.

(ε΄) Αξιοποιώντας τα παραπάνω, να σχεδιάζετε τη γραφική παράσταση του $p(x)$.

(ϛ΄) Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμά σας στο προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιώντας το GeoGebra.

(ζ΄) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του $p(x)$, να λύσετε την ανισότητα:

$$p(x) > 0.$$

(η΄) Να μελετήσετε το $p(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, με βάση τη γραφική της παράσταση.

(θ΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $0 < a < b$ ισχύει ότι:

$$p(a+2) < p(b+2).$$

23. Να βρείτε μία πολυωνυμική ανισότητα που να έχει ως λύσεις ακριβώς το διάστημα $(2,3)$ και να είναι:

(α΄) δευτέρου βαθμού,

(β΄) τρίτου βαθμού,

(γ΄) τετάρτου βαθμού,

(δ΄) πέμπτου βαθμού,

(ε΄) έκτου βαθμού.

24. Να βρείτε μία πολυωνυμική ανισότητα που να έχει ως λύσεις ακριβώς:

(α΄) το διάστημα $(-1, 1)$,

(β΄) το διάστημα $(-1/2, 1/2)$,

(γ΄) το διάστημα $(-1/3, 1/3)$,

(δ΄) το διάστημα $(-1/4, 1/4)$,

(ε΄) το διάστημα $(-1/20, 1/20)$.

25. Αν $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές από το σύνολο $\{-1, 1\}$, να βρείτε πόσες, το πολύ, ακέραιες ρίζες μπορεί να έχει. Μπορείτε να βρείτε ένα πολυώνυμο με τόσες ακριβώς ρίζες· Αν το $p(x)$ είναι τετάρτου βαθμού;

26. Αν ν είναι ένας φυσικός αριθμός, μπορείτε να βρείτε ένα πολυώνυμο βαθμού ν που να έχει ακριβώς $\nu - 1$ διαφορετικές ρίζες;

27. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(x) = x^5 + 10x^4 + 25x^3 - 20x^2 - 80x + 64.$$

(α΄) Να βρείτε τις ρίζες του p και να το παραγοντοποιήσετε.

(β΄) Να βρείτε την πολλαπλότητα κάθε ρίζας του p.

(γ΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του p.

(δ΄) Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμά σας χρησιμοποιώντας το GeoGebra.

(ε΄) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $p(x)$ ως προς την μονοτονία με βάση τη γραφική της παράσταση.

(ϛ΄) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του $p(x)$, πόσες[6] λύσεις έχει η εξίσωση:

$$p(x) = a,$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$. *Υπόδειξη: Θα σας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο να αξιοποιήσετε την εντολή `extremum(p)` του GeoGebra, η οποία θα σας εμφανίσει τα σημεία στα οποία η συνάρτηση* $p(x) = x^5 + 10x^4 + 25x^3 - 20x^2 - 80x + 64$ *παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστα ή/και ελάχιστα).*

(ζ΄) Να βρείτε τις λύσεις της ανισότητας:

$$p(x) > 0,$$

χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση του $p(x)$ και στη συνέχεια να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας λύνοντας αλγεβρικά την ανισότητα.

28. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b.$$

(α΄) Να βρείτε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα a και b έτσι ώστε το $(x-2)$ να είναι παράγοντας του $p(x)$.

(β΄) Να βρείτε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα a και b έτσι ώστε το $(x+1)$ να είναι παράγοντας του $p(x)$.

(γ΄) Να βρείτε τις τιμές των a, b έτσι ώστε το $x^2 - x - 2$ να είναι παράγοντας του $p(x)$.

(δ΄) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = -24 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

(ε΄) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^2 - x - 2$.

(ϛ΄) Να εξηγήσετε πώς συνδέονται όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μεταξύ τους.

29. Δίνονται δύο πολυώνυμα $p(x), \pi(x)$ που ικανοποιούν τις εξής υποθέσεις:

- $p(0) = 4$.
- Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $p(x)$ με το $x^2 + 1$ είναι:

$$p(x) = \pi(x)(x^2 + 1) + 2x - 1.$$

[6] Όχι *ποιες*, αλλά *πόσες*.

- Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $p(x)$ με το $\pi(x)$ *δεν* είναι:

$$p(x) = \pi(x)(x^2 + 1) + 2x - 1.$$

- $\pi(1) = 0$.

(α΄) Να βρείτε το $\pi(0)$.

(β΄) Να βρείτε το $p(1)$.

(γ΄) Να δείξετε ότι ο βαθμός του $\pi(x)$ είναι, το πολύ, τρία (1).

(δ΄) Να δείξετε ότι ο βαθμός του $p(x)$ είναι, το πολύ, ένα (3).

(ε΄) Να βρείτε το $\pi(x)$.

(ϛ΄) Να βρείτε το $p(x)$.

30. Θεωρήστε το σύστημα:

$$\begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta = b_1 \\ x\eta\mu\theta + y\sigma\upsilon\nu\theta = b_2 \end{cases}$$

όπου $\theta \in [0, 2\pi]$ και $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει πάντοτε μοναδική λύση, για οποιαδήποτε τιμή των b_1, b_2, θ.

(β΄) Για $\theta = 0$ και $b_1 = b_2 = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

(γ΄) Για $\theta = \pi$ και $b_1 = b_2 = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

(δ΄) Για $\theta = \pi/2$ και $b_1 = b_2 = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

(ε΄) Για $\theta = \pi/3$ και $b_1 = b_2 = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

(ϛ΄) (Μόνο για όσους έχουν δει μαθηματικά κατεύθυνσης) Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις σχεδιάστε τα εξής δύο διανύσματα:

- το $\vec{b} = (b_1, b_2)$ και
- το $\vec{c} = (x, y)$, όπου (x, y) είναι η λύση του συστήματος.

Τι παρατηρείτε;

(ζ΄) Κι ένα τελευταίο. Θεωρήστε την αντιστοίχιση ϕ που παίρνει ένα διάνυσμα $b = (b_1, b_2)$ και το αντιστοιχίζει σε μία λύση του παραπάνω συστήματος με τα b_1 και b_2 για σταθερούς όρους. Είναι αυτή η αντιστοίχιση συνάρτηση; Αν ναι, μπορείτε να δώσετε μία καλή και σαφή περιγραφή του τι κάνει; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της; Ποιο το σύνολο τιμών της;

31. Στα πλαίσια αυτής της άσκησης θα ονομάζουμε *ακολουθία* κάθε *άπειρη «λίστα»* αριθμών[7]. Ο συμβολισμός που θα έχουμε για τις ακολουθίες θα είναι ο εξής:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

όπου, με a_1, a_2, a_3 κ.λπ., υποννοούμε το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο κ.λπ. στοιχείο της λίστας. Για παράδειγμα, τα παρακάτω είναι ακολουθίες:

$$(1, 2, 3, \ldots), \ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \ (0, 0, 0, \ldots).$$

Ορίζουμε, επίσης, πράξεις μεταξύ ακολουθιών. Έτσι, αν έχουμε δύο ακολουθίες, $(a_1, a_2, \ldots)$ και $(b_1, b_2, \ldots)$, τότε, το άθροισμά τους ορίζεται «φυσιολογικά» ως μία νέα ακολουθία, η:

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots).$$

Έτσι, το άθροισμα των ακολουθιών $(1, 2, 3, \ldots)$ και $(0.1, 0.2, 0.3, \ldots)$ είναι η ακολουθία:

$$(1.1, 2.2, 3.3, \ldots).$$

Ανάλογα, ορίζουμε και το γινόμενο δύο ακολουθιών, $(a_1, a_2, \ldots)$ και $(b_1, b_2, \ldots)$ να είναι η ακολουθία:

$$(a_1 b_1, a_2, b_2, \ldots).$$

Δεν τελειώσαμε εδώ! Ορίζουμε και μία συνάρτηση ϕ η οποία κάνει την εξής δουλειά: παίρνει ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ και το αντιστοιχίζει στην ακολουθία

[7] Ο όρος λίστα, προφανώς, δεν είναι αυστηρός. Αυτό που εννοούμε είναι ότι μπορούμε να καταγράψουμε τα στοιχεία της ακολουθίας με τρόπο που να θυμίζει «λίστα»· να έχουμε, δηλαδή, ένα πρώτο στοιχείο, ένα δεύτερο στοιχείο κ.ο.κ..

$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Για παράδειγμα, αν $p(x) = 1 + x + 2x^2$, τότε:

$$\phi(p) = (1, 1, 2, 0, 0, \ldots).$$

Δηλαδή, βάζουμε στην αρχή τους συντελεστές του πολυωνύμου και, μόλις μας τελειώσουν, βάζουμε παντού μηδενικά.

(α΄) Να βρείτε τα $\phi(p)$, αν:
- $p(x) = 1 - 2x + x^2 - x^3$,
- $p(x) = 0$,
- $p(x) = -2x^2 + 4x^4 - x^7$.

(β΄) Να δείξετε ότι, αν p, q είναι δύο πολυώνυμα, τότε:

$$\phi(p + q) = \phi(p) + \phi(q).$$

(γ΄) Να δείξετε ότι δε συμβαίνει το ίδιο με τον πολλαπλασιασμό. Δηλαδή, δεν ισχύει ότι:

$$\phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot \phi(q),$$

για κάθε δύο πολυώνυμα p, q.

(δ΄) Πώς θα έπρεπε να είχαμε ορίσει τον πολλαπλασιασμό μεταξύ των ακολουθιών έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot \phi(q);$$

5

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

5.1 Εκθετικές συναρτήσεις

5.1.1 Ορισμός εκθετικών συναρτήσεων και βασικές ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε πρώτα τους ορισμούς των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, για να προχωρήσουμε, στη συνέχεια, στον ορισμό των εκθετικών συναρτήσεων.

Ορισμός 5.1: Θετικός εκθέτης – μη αρνητική βάση

Για κάθε $\alpha \in [0, +\infty)$, $\mu \in \mathbb{N}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\mu, \nu \neq 0$ ορίζουμε:

$$\alpha^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Ορισμός 5.2: Πραγματικός εκθέτης – θετικός βάση

Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \neq 0$ ορίζουμε:

$$\alpha^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Προσέξτε ότι η ουσιαστικότερη διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ότι στην πρώτη περίπτωση γίνεται λόγος για τον αριθμό:

$$0^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{0^{\mu}} = 0,$$

ενώ στη δεύτερη αυτό δεν επιτρέπεται, μιας και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι αρνητικός, θα είχαμε διαίρεση με το 0. Για παράδειγμα:

$$0^{-2/3} = \sqrt[3]{0^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0}},$$

που δεν έχει νόημα.

Ως τώρα, έχουμε ορίσει το σύμβολο α^{x}, με $\alpha > 0$, μόνον στην περίπτωση που ο x είναι ρητός, αλλά, ως φυσικοί πλεονέκτες και άπληστοι, θα θέλαμε να το ορίσουμε και για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, σκεφτόμαστε το εξής: Αν πάρουμε έναν άρρητο, π.χ. το π, τότε ξέρουμε ότι αυτός γράφεται σε δεκαδική μορφή με κάποιον τρόπο. Στην περίπτωσή μας:

$$\pi = 3.141592653589793\ldots.$$

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι, διαβάζοντας τους παρακάτω αριθμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά:

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots,$$

«πλησιάζουμε» τον αριθμό π. Παρατηρούμε, επίσης, ότι όλοι οι παραπάνω αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν δεκαδικά κλάσματα, όπως για παράδειγμα:

$$3.141 = \frac{3141}{1000}.$$

Έτσι, όλοι οι παραπάνω αριθμοί είναι ρητοί, επομένως έχει νόημα να μιλήσουμε για τους αριθμούς:

$$4^3, 4^{3.1}, 4^{3.14}, 4^{3.141}, 4^{3.1415}, \ldots,$$

αφού $4^{3.1415} = 4^{31415/10000}$ κ.λπ.. Παρατηρούμε, επίσης, ότι, όπως φαίνεται και στον πίνακα 5.1, καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία του π, φαίνεται το αποτέλεσμα που παίρνουμε να προσεγγίζει κάποιον αριθμό μιας και από ένα σημείο και μετά κάποια από τα ψηφία του αριθμού σταθεροποιούνται[1].

$\approx \pi$	$\approx 4^{\pi}$
3	64
3.1	73.51466
3.14	77.70575
3.141	77.81413
3.1415	77.86739

Πίνακας 5.1: Ο αριθμός 4^{π}.

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και για τους υπόλοιπους αριθμούς a^x, με $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για τους νέους αυτούς (πραγματικούς, πλέον) εκθέτες ισχύουν οι συνήθεις ιδιότητες των δυνάμεων, όπως φαίνεται στον πίνακα 5.2.

Τέλος, στο σχήμα 5.1 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = a^x$, για τις διάφορες τιμές του[2] $0 < a \neq 1$.

5.1.2 Εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις

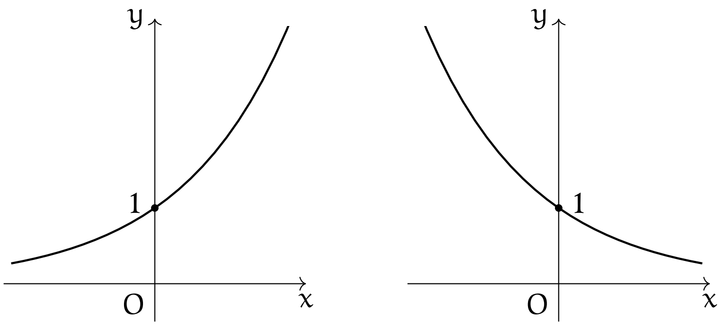
Ακολουθούν δύο ενδεικτικά παραδείγματα επίλυσης εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων.

[1]Μπορείτε να δοκιμάσετε να υπολογίσετε και άλλα ψηφία, πέρα από αυτά του πίνακα 5.1.

[2]Δε θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $a = 1$, γιατί είναι βαρετή (και, ίσως, γιατί σε αυτήν την περίπτωση θα παίρναμε τη σταθερή συνάρτηση 1).

$$
\begin{aligned}
a^{x+y} &= a^x a^y \\
a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\
a^x b^x &= (ab)^x \\
(a^x)^y &= a^{xy}.
\end{aligned}
$$

Πίνακας 5.2: Οι ιδιότητες των εκθετικών.



(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 5.1: Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$.

Παράδειγμα 5.1 (Επίλυση εξισώσεων). Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^{x-4} = 64.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& 4^{x-4} = 64 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 4^{x-4} = 4^3 \overset{4^x:\text{«1-1»}}{\Longleftrightarrow} \\
\Leftrightarrow\ & x - 4 = 3 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x = 7.
\end{aligned}
$$

□

Παράδειγμα 5.2 (Επίλυση ανσώσεων). Να λύσετε την ανίσωση:

$$6^{2x+4} < 36^{x+1}.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& 6^{2x+4} < 36^{3x+1} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 6^{2x+4} < (6^2)^{3x+1} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 6^{2x+4} < 6^{6x+2} \overset{6^x:\uparrow}{\Longleftrightarrow}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 < 6x + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x > 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

□

5.2 Λογαριθμικές συναρτήσεις

5.2.1 Ορισμός λογαριθμικών συναρτήσεων και βασικές ιδιότητες

Οι λογαριθμικές συναρτήσεις έρχονται να απαντήσουν στην ερώτηση:

«Σε ποιον αριθμό πρέπει να υψώσω το 2 για να πάρω 5;»

Με άλλα λόγια, αναζητούμε μια λύση της εξίσωσης:

$$2^x = 5.$$

Δεδομένου ότι η 2^x είναι «1-1», η εξίσωση αυτή έχει *το πολύ μία λύση*. Αν, προς το παρόν, δεχθούμε ότι η εξίσωση έχει λύση[3], τότε, θα συμβολίζουμε αυτήν τη λύση με $\log_2 5$. Γενικότερα, δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.3: Λογαρίθμου

Αν $0 < a \neq 1$ και $x > 0$, τότε ορίζουμε ως *λογάριθμο του* x *με βάση* a και τον συμβολίζουμε με $\log_a x$ τον αριθμό εκείνο στον οποίο αν υψώσουμε τον a θα πάρουμε x.

Προφανώς, από τον ορισμό του λογαρίθμου, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Άμεσο είναι και το εξής[4]:

$$\log_a a^x = x,$$

αφού, ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το a έτσι ώστε να πάρουμε a^x είναι το x.

Από τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα τις ιδιότητες των λογαρίθμων[5] που φαίνονται στον πίνακα 5.3 (όπου $x, y > 0$, $s \in \mathbb{R}$ και $0 < a \neq 1$).

Επίσης, ισχύει και ο εξής τύπος αλλαγής βάσης μεταξύ λογαρίθμων[6]:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ 0 < a, b \neq 1,\ x > 0.$$

Τέλος, στο σχήμα 5.2 φαίνοναι οι γραφικές παραστάσεις των λογαριθμικών συναρτήσεων σε σχέση με αυτές των αντίστοιχων εκθετικών.

Να αναφέρουμε και ότι θα χρησιμοποιούμε για ευκολία τους συμβολισμούς $\ln x = \log_e x$ *και* $\log x = \log_{10} x$.

Σχόλιο

Ο αριθμός e είναι περίπου ίσος με 2.718 και μπορεί α προσεγγιστεί με απεριόριστη ακρίβεια από την παράσταση:

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$$

για οσοδήποτε μεγάλες τιμές του ν.

[3] Πράγματι έχει, αλλά το *γιατί* έχει λύση, είναι μία άλλη συζήτηση που ξεφεύγει αρκετά από την ύλη μας.

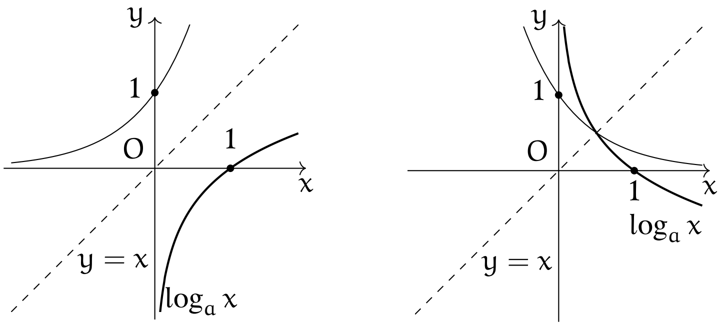
[4] Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, τότε οι δύο αυτές σχέσεις γράφονται ως $f(g(x)) = x$ και $g(f(x)) = x$, αντίστοιχα (κρατήστε αυτή τη σχέση για το άμεσο μέλλον).

[5] Οι αποδείξεις βρίσκονται στο Παράρτημα.

[6] Και πάλι, η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα.

$$\begin{aligned}
&\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\\
&\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\\
&\log_a x^s = s\log_a x
\end{aligned}$$

Πίνακας 5.3: Οι ιδιότητες των λογαρίθμων.



(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 5.2: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_a x$.

5.2.2 Παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 5.3 (Επίλυση εξισώσεων). Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^x = \sqrt{27}.$$

Για τους υπολογισμούς σας, θεωρήστε δεδομένο ότι $\ln 3 = 1.1$ και ότι $\ln 2 = 0.69$.

Διαδοχικά, έχουμε:

$$4^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow x = \log_4 \sqrt{27}.$$

Όλη η «μαγκιά» εδώ είναι να εκφράσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μόνο τον φυσικό λογάριθμο του 2 ($\ln 2$) και του 3 ($\ln 3$). Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\log_4 \sqrt{27} = \log_4 27^{1/2} = \frac{1}{2}\log_4 27 =\\
= \frac{1}{2}\log_4 3^3 = \frac{3}{2}\log_4 3.
\end{aligned}$$

Μια ανάσα πριν από τον τερματισμό, και το μόνο που μας ενοχλεί είναι η βάση του λογαρίθμου, που είναι 4 και όχι e. Εδώ έρχεται να μας βοηθήσει ο τύπος αλλαγής βάσης:

$$\begin{aligned}
\log_4 3 = \frac{\ln 3}{\ln 4} = \frac{\ln 3}{\ln 2^2} =\\
= \frac{\ln 3}{2\ln 2} = \frac{1.1}{2\cdot 0.69} \approx
\end{aligned}$$

$$\approx 0.8.$$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης είναι ίση με:

$$x = \frac{3}{2} \cdot 0.8 = 1.2.$$

□

Παράδειγμα 5.4 (Επίλυση ανισώσεων). Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{2x} > 4.$$

Για τους υπολογισμούς σας, θεωρήστε δεδομένο ότι $\ln 2 = 0.69$.

Διαδοχικά, έχουμε:

$$e^{2x} > 4 \overset{\ln x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \ln(e^{2x}) > \ln 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x > \ln 2^2 \Leftrightarrow 2x \geq 2\ln 2 \Leftrightarrow x > 0.69.$$

□

Παράδειγμα 5.5 (Εκτιμήσεις). Να βρείτε πόσα ψηφία έχει ο αριθμός:

$$123456789^{123456789}.$$

Πρώτη απάντηση: πολλά! Αλλά, επειδή δεν είναι δεκτή ως απάντηση και ώριμη ως αντίδραση, ας προσπαθήσουμε να δούμε τι γίνεται. Πάμε στην αριθμομηχανή και κάνουμε τις πράξεις μας και λέει ότι δεν μπορεί να το υπολογίσει[7]. Κι εμείς τι θα κάνουμε; Ε, στο κεφάλαιο των λογαρίθμων είμαστε, οπότε κάπως θα τους μπλέξουμε κι αυτούς εδώ μέσα. Ας θυμηθούμε ότι:

$$x = 10^{\log x}.$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τον ζητούμενο αριθμό να τον εκφράσουμε ως:

$$123456789^{123456789} = 10^{\log 123456789^{123456789}}.$$

Αν παίξουμε λίγο με τον εκθέτη, παρατηρούμε ότι αυτός είναι ίσος με:

$$123456789 \log 123456789.$$

Με το φοβερό κομπιουτεράκι μας, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε αυτόν τον αριθμό, ο οποίος είναι περίπου 2300173036.62. Επομένως, ο αριθμός μας είναι περίπου:

$$10^{2300173036.62},$$

άρα, έχει περίπου $2300173036 + 1 = 2300173037$ ψηφία[8].

□

Σχόλιο

Γενικά, για έναν αριθμό x το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του δίνεται από τον $\lceil \log x \rceil$, όπου με το σύμβολο $\lceil a \rceil$ συμβολίζουμε τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο από τον a.

[7] Η αριθμομηχανή του υπολογιστή μου λέει Invalid input, του κινητού λέει ∞, ενώ το παλιό κομπιουτεράκι του γραφείου με κοιτάζει σαν χάνος...

[8] Γιατί προσθέσαμε ένα;

Παράδειγμα 5.6 (Το μάτι του γερακιού). Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^x + \ln x = 2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + \ln x$, $x > 0$. Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω, λοιπόν, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \overset{2^x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} 2^{x_1} < 2^{x_2} \tag{5.1}$$

$$x_1 < x_2 \overset{\ln x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2. \tag{5.2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2^{x_1} + \ln x_1 < 2^{x_2} + \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως είναι και «1-1».

Στη συνέχεια, παρατηρούμε[9] ότι $f(1) = 2^1 + \ln 1 = 2$, επομένως, η δοσμένη εξίσωση γράφεται ως:

$$2^x + \ln x = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1).$$

Όμως, αφού η f είναι «1-1», έπεται ότι:

$$f(x) = f(1) \overset{f:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} x = 1.$$

□

[9] Εξ ου και το όνομα «το μάτι του γερακιού».

5.3 Ασκήσεις

5.3.1 Α΄ Ομάδα

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις *(Θα σας φανεί χρήσιμο να χρησιμοποιήσετε εκθέτες αντί για ρίζες)*:

   (α΄) $\sqrt{x^2}\sqrt[3]{x^5}$,

   (β΄) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^8}\sqrt[3]{x}}$,

   (γ΄) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^6}}}$,

2. Να εξηγήσετε:

   (α΄) Γιατί δεν ορίζουμε το σύμβολο $x^{\mu/\nu}$ και για μη θετικές τιμές του x (δηλαδή για $x \leq 0$), όταν ο μ είναι ακέραιος και ο ν φυσικός.

   (β΄) Γιατί δεν ορίζουμε το σύμβολο $x^{\mu/\nu}$ και για αρνητικές τιμές του x αλλά το ορίζουμε για $x = 0$, όταν ο μ και ν είναι φυσικοί, με το $\mu \neq 0$.

3. Να ξαναγράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χρησιμοποιώντας μόνο ριζικά και ακέραιες δυνάμεις (δηλαδή, να μην εμφανιστεί πουθενά παράσταση της μορφής $x^{5/3}$, αλλά μόνο ακέραιοι εκθέτες):

   (α΄) $x^{1.7}$,

   (β΄) $x^{2.67}$,

   (γ΄) $x^{-4.93}$,

   (δ΄) $x^{0.33\ldots}$.

4. Να υπολογίσετε με ακρίβεια τουλάχιστον δέκα (10) δεκαδικών ψηφίων τους παρακάτω αριθμούς (αν δεν έχετε αριθμομηχανή με τέτοια ακρίβεια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το δωρεάν εργαλείο `https://web2.0calc.com/`):

   (α΄) 2^{1},

   (β΄) $2^{1.4}$,

   (γ΄) $2^{1.41}$,

   (δ΄) $2^{1.414}$,

   (ε΄) $2^{1.4142}$,

   (ϛ΄) $2^{1.41421}$,

   (ζ΄) $2^{1.414213}$,

   Στη συνέχεια, να υπολογίσετε με την ίδια ακρίβεια και τον $\sqrt{2}$ και να συνεχίσετε την παραπάνω διαδικασία προσθέτοντας κι άλλα ψηφία του $\sqrt{2}$ στον εκθέτη του 2, φτάνοντας τουλάχιστον μέχρι το δέκατο. Στο τέλος, χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή, υπολογίστε και τον αριθμό $2^{\sqrt{2}}$. Τι παρατηρείτε;

5. Χρησιμοποιώντας μία αριθμομηχανή με καλή ακρίβεια και το σκεπτικό της παραπάνω άσκησης, προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί ισχύει η παρακάτω σχέση:
$$2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\pi} = 2^{\sqrt{2}+\pi}.$$
   Στη συνέχεια, να γενικεύσετε το παραπάνω επιχείρημα και να εξηγήσετε γιατί ισχύει η σχέση:
$$a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y},$$
   για κάθε $a > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4^{x},\\ f_2(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x},\\ f_3(x) &= e^{x},\\ f_4(x) &= 5^{-x},\\ f_5(x) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-x},\\ f_6(x) &= 3^{2x},\\ f_7(x) &= 0.5^{2x-1}. \end{aligned}$$
   Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας χρησιμοποιώντας το GeoGebra.

7. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3^{x},\\ f_2(x) &= 3^{x} + 5^{x},\\ f_3(x) &= 2 + e^{4x-2}, \end{aligned}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2^x + 5^x},$$
$$f_5(x) = 3^x - 3^{-x},$$
$$f_6(x) = 2 - e^{-x} + 6^x,$$
$$f_7(x) = 3e^{2x} - \frac{1}{2^x}.$$

Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας χρησιμοποιώντας το GeoGebra.

8. Να λύσετε τις ακόλουθες ανισώσεις:
   (α΄) $2^x < 4$,
   (β΄) $\frac{1}{e^x} \geq e^2$,
   (γ΄) $3^{4x-1} < 9$,
   (δ΄) $5.17^{x^2-4x+3} \leq 1$,
   (ε΄) $2^{x-4} < \left(\sqrt{2}\right)^x$,
   (ς΄) $4^{x+2} > 2^{4-2x}$
   (ζ΄) $e^x - 5^{-x} \geq 2$.

9. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1. Για όσες είναι, να το αποδείξετε, ενώ, για όσες δεν είναι, να εξηγήσετε γιατί:

$$f_1(x) = e^{-x},$$
$$f_2(x) = 2^{-x} - e^x,$$
$$f_3(x) = 3^x + 2^x,$$
$$f_4(x) = 2^x + 2^{x+4},$$
$$f_5(x) = e^{-x^2},$$
$$f_6(x) = 1 - 4e^{2-6x},$$
$$f_7(x) = x + e^x - 2.$$

Σε όσες περιπτώσεις δυσκολευτείτε, συμβουλευτείτε το GeoGebra.

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
    (α΄) $3^x = \frac{1}{9}$,
    (β΄) $2^{3x-2} = 2^{1-x}$,
    (γ΄) $4^{1+x} = 2^{4x+2}$,
    (δ΄) $\frac{3^x}{9^{x^2}} = 1$,
    (ε΄) $3x - 2^{-x} + 1 = 0$.

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
    (α΄) $4^{x-3} - 16 = 0$,
    (β΄) $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 1$,
    (γ΄) $e^{-x} = 1 + x$,
    (δ΄) $3^x - 6^x + 7^x = 0$.
    (ε΄) $3^{1/x} + 4^{1/x} + 5^{1/x} = 12$.

12. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:
    (α΄) $f_1(x) = \log_2 x$,
    (β΄) $f_2(x) = \log_{10}(x-1)$,
    (γ΄) $f_3(x) = \ln(2x+4)$,
    (δ΄) $f_4(x) = x - \log_{1/2}(x+3)$,
    (ε΄) $f_5(x) = e^x + \ln x + x$,
    (ς΄) $f_6(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$,
    (ζ΄) $f_7(x) = \ln(e^x + 4)$.

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
    (α΄) $2^{x^2} < 6$,
    (β΄) $\ln(x+1) + x > 1$,
    (γ΄) $4^{2x} - 4^{x+1} + 3 \leq 0$,
    (δ΄) $\frac{3 - \log_2(x-1)}{\log_2(x-1)} > 0$.

5.3.2 Β΄ Ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

   (α΄) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
   (β΄) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2+2}(e^{3x} + 1) = e^{3x}(e^{x^2+2} + 1).$$

   (γ΄) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $y \in \mathbb{R}$ έχει λύση (ως προς x) η εξίσωση:

$$f(x) = y.$$

   Για όσες έχει, να τη βρείτε.

2. Με δεδομένη την ανισότητα $e^x \geq 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\ln x \leq x - 1, \ \forall x > 0.$$

3. Στο πρόβλημα με τους δύο τραπεζίτες είδαμε ότι, ξεκινώντας με ένα ποσό της τάξης των 10 ευρώ, μπορούσαμε να έχουμε ένα κέρδος, θεωρητικά, ίσο με 10e, όπου e είναι ο αριθμός του Euler και είναι περίπου ίσος με $e \approx 2.71828\ldots$. Είδαμε, επίσης, ότι κατά τον χωρισμό του έτους σε ν ίσα διαστήματα ανατοκισμών, το κέρδος που αποκομίζαμε ήταν:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \times 10,$$

και ότι, καθώς το ν παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, η ποσότητα $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ προσεγγίζει τον αριθμό e. Θα προσπαθήσουμε, τώρα, να «ορίσουμε» την εκθετική συνάρτηση e^x όχι με τον τρόπο που ορίσαμε τις άλλες εκθετικές συναρτήσεις (προσεγγίζοντας τις τιμές τους από γνωστές ρητές δυνάμεις), αλλά χωρίς να μπλέξουμε καθόλου με αυτά τα πράγματα.

   (α΄) Σαν ένα ενδιάμεσο βήμα, ας παρατηρήσουμε το εξής: αφού, καθώς το ν παίρνει μεγάλες τιμές, το $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ προσεγγίζει το e, δηλαδή, για μεγάλα ν:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \approx e,$$

   θα πρέπει να έχουμε και ότι:

$$\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right)^{x} \approx e^{x}.$$

   Επαληθεύστε το χρησιμοποιώντας το GeoGebra: Ορίστε έναν δρομέα ν που να παίρνει τιμές από 1 μέχρι 10 (ή 100 ή όσο θέλετε) και σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των δύο παραπάνω συναρτήσεων. Στη συνέχεια, αφήστε τον δρομέα να τρέξει. Παρατηρήστε ότι κι εδώ αφήσαμε το x να είναι στον εκθέτη, οπότε δεν πετύχαμε αυτό που θέλαμε (να ορίσουμε την εκθετική χωρίς να έχουμε άρρητους εκθέτες).

   (β΄) Τώρα, ας σκεφτούμε ως εξής. Αν, ο κάθε τραπεζίτης, αντί να μας δίνει σε κάθε ανατοκισμό ποσό ίσο με το 1/ν των καταθέσεών μας, αλλά επέλεγε έναν παράγοντα x και μας έδινε το x/ν, τι θα άλλαζε; Πόσα θα κερδίζαμε στο τέλος του έτους αν, χωρίζοντας το έτος σε ν ίσες περιόδους, έπαιρνε σε κάθε περίοδο το x/ν των καταθέσεών του; Μπορείτε να εργαστείτε όπως και στο αρχικό πρόβλημα με τους τραπεζίτες, παίρνοντας πρώτα διάφορες μικρές τιμές του ν (1,2,3) για να δείτε πώς πάει το μοτίβο και μετά να γενικεύσετε. *Μη δείτε την απάντηση αν δεν το προσπαθήσετε πρώτα!*

   $\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}$

   (γ΄) Με έναν τρόπο παρόμοιο με αυτόν του προηγούμενου ερωτήματος, προσπαθήστε, χρησιμοποιώντας το GeoGebra να εξετάσετε αν αυτό που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα προσεγγίζει την τιμή e^x, για τις διάφορες τιμές του x.

   (δ΄) Τι σχέση έχουν οι παραστάσεις:

$$\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}, \ \left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right)^{x};$$

   (ε΄) Υπάρχει, άραγε, κάποια σταθερά σ, ανεξάρτητη του x, έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$2^{x} = e^{\sigma x};$$

   Αν υπάρχει, πόσο θα είναι περίπου ή, εναλλακτικά, μπορείτε να βρείτε μία σχέση που θα ικανοποιεί;

4. Έχουμε ένα αρχικό κεφάλαιο, ας πούμε 10.000 ευρώ και αποφασίζουμε να το καταθέσουμε σε μία τράπεζα με ένα μηνιαίο επιτόκιο i. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε μήνα το ποσό που έχουμε στην τράπεζα θα ανατοκίζεται, αποφέροντας σε εμάς κάποιο κέρδος.

   (α΄) Να βρείτε το κέρδος μας μετά από 2 μήνες.

   (β΄) Να βρείτε το ποσό που θα έχουμε στην τράπεζα μετά από 8 μήνες.

(γ΄) Να δείξετε ότι μετά από ν μήνες, το ποσό P που θα έχουμε στην τράπεζα θα είναι ίσο με:

$$P = 10.000(1+i)^{\nu}.$$

(δ΄) Αν υποθέσουμε ότι η τράπεζα μας προσφέρει ένα μηνιαίο επιτόκιο της τάξης του 2%, οπότε $i = 0,02$, Να βρείτε το ποσό που θα έχουμε στην τράπεζα μετά από δύο (2) χρόνια.

(ε΄) Αν υποθέσουμε ξανά ότι μας προσφέρεται μηνιαίο επιτόκιο 2%, να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας και αριθμομηχανή όπου χρειάζεται, μετά από πόσους μήνες θα έχει διπλασιαστεί το αρχικό ποσό των 10.000 που καταθέσαμε στην τράπεζα;

(ϛ΄) Αν, και πάλι με μηνιαίο επιτόκιο 2%, είχαμε καταθέσει ένα αρχικό κεφάλαιο της τάξης των 200.000 ευρώ[10], σε πόσους μήνες θα διπλασιαζόταν αυτό το ποσό; Αν, γενικά, είχαμε ένα αρχικό ποσό Q, σε πόσους μήνες αυτό θα διπλασιαζόταν; Μπορείτε να ερμηνεύσετε τα παραπάνω αποτελέσματα;

(ζ΄) Αν έχουμε καταθέσει σε μία τράπεζα ένα ποσό Q και N είναι οι μήνες που χρειάζονται για να διπλασιαστεί αυτό το ποσό με μηνιαίο επιτόκιο i, μπορείτε να εξηγήσετε αν το N είναι συνάρτηση του i και, αν είναι, να μελετήσετε αυτή τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία; *Ίσως σας φανεί χρήσιμο το GeoGebra, μαζί με κάποιον δρομέα ή κάτι παρόμοιο.*

(η΄) Ας δούμε τώρα κι ένα ιστορικό πρόβλημα[11]. Το 1626 (μ.Χ.), οι Ολλανδοί άποικοι αγόρασαν ένα νησάκι και τη γύρω περιοχή από τους Ινδιάνους στην ανατολική ακτή της Αμερικανικής Ηπείρου, έναντι 24\$. Το μέρος αυτό τους άρεσε τόσο πολύ (φυσικό λιμάνι, γαρ, και μάλιστα προστατευμένο από ανέμους και τα συναφή) που το ονόμασαν Νέο Άμστερνταμ[12]. Οι Ινδιάννοι μη γνωρίζοντας από επενδύσεις δε γνωρίζουμε πού επένδυσαν αυτό το κεφάλαιο, σίγουρα, όμως, δεν το κατέθεσαν σε κάποια από τις τράπεζες της εποχής. Αν, αντ¨ αυτού, είχαν καταθέσει το ποσό των 24\$ που εισέπραξαν για την έκταση του Νέου Άμστερνταμ, με ένα μηνιαίο επιτόκιο της τάξης του 1%, πόσα λεφτά θα είχαν σήμερα στην άκρη;

5. Οι λογάριθμοι αποτέλεσαν ένα μεγάλο εργαλείο στα χέρια των μαθηματικών της εποχής του Napier, του Briggs και, λίγο αργότερα, του Newton. Όσο και αν μας φαίνονται στριφνοί, σε μία εποχής που δεν υπήρχαν αριθμομηχανές ακριβείας δεκάδων δεκαδικών ψηφίων, οι λογαριθμικοί πίνακες και ο λογαριθμικός κανόνας ήταν από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για να κάνει κανείς πολύπλοκους υπολογισμούς. Προφανώς, σε όλη αυτή τη διαδικασία, έπαιζαν σημαντικότατο ρόλο και οι ιδιότητες των λογαρίθμων που «μετατρέπουν» την ύψωση σε δύναμη σε πολλαπλασιασμό, τον πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση και τη διαίρεση σε αφαίρεση.

   (α΄) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε κάποια οντότητα που κάνει πράξεις πέρα από τον εαυτό σας και με δεδομένα μόνο ότι:

   i. $\ln 2 \approx 0.69$,
   ii. $\ln 3 \approx 1.01$,
   iii. $\ln 5 \approx 1.61$,

   να υπολογίσετε τους αριθμούς:

[10] Διότι, ναι, έχουμε αυτήν την οικονομική επιφάνεια…

[11] Πηγή: Θ. Ν. Κάκουλλος (1995), *Αναλογισμός, Τόμος Ι: Θεωρία Κινδύνου και πιθανότητες*, Εκδ. Συμμετρία, σελ. 66-67

[12] Έμελλε να το πάρουν οι Βρεταννοί το 1664, ανταλλάσοντάς το για κάποιες άλλες αποικίες στη Νότια Αμερική και την Ινδονησία και να το μετονομάσουν σε Νέα Υόρκη. Το μικρό νησάκι, είναι, όπως φαντάζεστε, το γνωστό Μανχάτταν. Αφού πιάσαμε την ψιλή κουβέντα, να πούμε κι ότι η λέξη Μανχάτταν, στη διάλεκτο των Lenape σημαίνει «το νησί των πολλών λόφων» (Μάννα-χάτα).

- $\ln 4 + \ln 9 + \ln 25$,
- $\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{1}{5}$,
- $\ln 6 + \ln 12 + \ln 10$,
- $\ln 60$.

(β′) Με τις ίδιες υποθέσεις, να υπολογίσετε τους αριθμούς:

- $\ln 1.2 + \ln 0.6$,
- $\ln 0.72$,
- $\ln 0.024$,
- $\ln 1.44$.

(γ′) Να γράψετε τους αριθμούς σαν δυνάμεις του e:

- $\sqrt{2}$,
- $\sqrt{3} + \sqrt{5}$,
- $2^{\sqrt{2}}$,
- $\sqrt{5}^{0.5}$.

Θα σας φανεί χρήσιμη η σχέση $x = e^{\ln x}$.

6. Είδαμε ότι η εκθετική συνάρτηση a^x ορίζεται για κάθε $0 < a \neq 1$ (και για $a = 1$, χωρίς όμως να έχει ενδιαφέρον). Στην πραγματικότητα, όμως, μας αρκεί μόνο μία βάση για να περιγράψουμε όλες τις εκθετικές συναρτήσεις και, μάλιστα, μπορούμε να διαλέξουμε όποια θέλουμε!

(α′) Να βρείτε έναν σταθερό αριθμό k τέτοιον ώστε:

$$2^x = e^{kx}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

(β′) Ανάλογα, να βρείτε έναν άλλο σταθερό αριθμό k τέτοιον ώστε:

$$3^x = e^{kx}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

(γ′) Να βρείτε έναν σταθερό αριθμό k τέτοιον ώστε:

$$a^x = e^{kx}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < a \neq 1.$$

Προφανώς, ο αριθμός k, *θα μεταβάλλεται καθώς το* a *μεταβάλλεται.*

(δ′) Ανάλογα, μας αρκεί μόνον ένας λογάριθμος για να υπολογίζουμε όλους τους άλλους λογαρίθμους, με οποιαδήποτε βάση. Μπορείτε, αξιοποιώντας και τα προηγούμενα, να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τον λογάριθμο του x με βάση a, $\log_a x$, για $0 < a \neq 1$, με τον φυσικό λογάριθμο $\ln x$;

6

Παράρτημα – όλες οι αποδείξεις που παραλείψαμε

6.1 Απόδειξη του τύπου των οριζουσών για γραμμικό 2×2 σύστημα

Θεωρούμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή ότι καμία από τις δύο εξισώσεις δεν είναι ούτε αδύνατη ούτε ταυτότητα, επομένως κάθε εξίσωση έχει τουλάχιστον έναν μη μηδενικό συντελεστή ενός αγνώστου. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για την πρώτη εξίσωση αυτός είναι ο a. Λύνοντας ως προς x λοιπόν την πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$$x = \frac{e - by}{a} \tag{6.1}$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} c\frac{e - by}{a} + dy = f \Leftrightarrow ce - bcy + ady = af \Leftrightarrow (ad - bc)y = af - ce \\ \Leftrightarrow Dy = D_y \end{aligned} \tag{6.2}$$

Τώρα, αν $D = 0$ η (6.2) γράφεται $0y = D_y$, επομένως είτε είναι αδύνατη είτε έχει άπειρες λύσεις, άρα σε καμία περίπτωση το y δεν καθορίζεται μονοσήμαντα. Συνεπώς, υπό την υπόθεσή μας – ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση – πρέπει να ισχύει ότι $D \neq 0$, οπότε $y = \frac{D_y}{D}$. Τώρα, από την (6.1) έχουμε:

$$x = \frac{e - by}{a} = \frac{e - b\frac{D_y}{D}}{a} = \frac{eD - bD_y}{aD} = \frac{\frac{eD - bD_y}{a}}{D} = \frac{D_x}{D},$$

διότι:

$$\frac{eD - bD_y}{a} = \frac{e(ad - bc) - b(af - ce)}{a} = \frac{ade - abf}{a} = de - bf = D_x.$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $D \neq 0$ και θα αποδείξουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με d και τη δεύτερη με b οπότε παίρνουμε:

$$\begin{cases} adx + bdy &= de \\ bcx + bdy &= bf \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} (ad - bc)x = de - bf \Leftrightarrow Dx = D_x \Leftrightarrow x = \frac{D_x}{D}.$$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με c και τη δεύτερη με a οπότε ομοίως παίρνουμε:

$$y = \frac{D_y}{D}.$$

Έτσι, το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

□

6.2 Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

Η απόδειξη αυτή θα έχει δύο σκέλη: το πρώτο θα αφορά την ύπαρξη πηλίκου και υπολοίπου και το δεύτερο τη μοναδικότητά τους.

Ύπαρξη: Έστω $p(x), q(x)$ δύο πολυώνυμα με βαθμούς n, m αντίστοιχα. Αν $n < m$ τότε παρατηρούμε ότι:

$$p(x) = 0q(x) + p(x),$$

οπότε $\pi(x) = 0$ και $\upsilon(x) = p(x)$ οπότε δεν έχουμε κάτι περαιτέρω να αποδείξουμε. Στην περίπτωση που $n \geq m$ θα αποδείξουμε την ύπαρξη του πηλίκου και του υπολοίπου με μαθηματική επαγωγή στον βαθμό, n, του $p(x)$.

- Για $n = 0$, αφού $n \geq m$ έπεται ότι $m = 0$, άρα τα $p(x), q(x)$ είναι σταθερά πολυώνυμα, δηλαδή $p(x) = a$ και $q(x) = b$ για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a, b \neq 0$. Για $\pi(x) = \frac{a}{b}$ και $\upsilon(x) = 0$ έχουμε:

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x).$$

- Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 0$ ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή ότι υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x), \upsilon(x)$ με $\upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon(x)) < n$ τέτοια ώστε:

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x).$$

- Υποθέτουμε ότι το $p(x)$ έχει βαθμό $n+1$ και το $q(x)$ βαθμό $m \leq n+1$. Έστω, επίσης, ότι:

$$p(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n + p_{n+1}x^{n+1},\ p_{n+1} \neq 0,$$
$$q(x) = q_0 + q_1x + \ldots + q_{m-1}x^{m-1} + q_mx^m,\ q_m \neq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, αν:

$$P(x) = p(x) - \frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}q(x),$$

Σχόλιο

Η μαθηματική επαγωγή είναι μία μέθοδος απόδειξης με τρία διακριτά στάδια:

- Πρώτα αποδεικνύουμε το ζητούμενο για $n = 0$.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο $n \geq 0$.
- Αξιοποιώντας την παραπάνω υπόθεση, αποδεικνύουμε το ζητούμενο για το $n + 1$.

τότε $\deg(P(x)) \leq n$, αφού ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}q(x)$ είναι $p_{n+1}x^{n+1}$. Τώρα, αν $m > n$ τότε $P(x) = 0q(x) + P(x)$ ενώ αν $m \leq n$ τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $a(x), b(x)$ τέτοια ώστε:

$$P(x) = a(x)q(x) + b(x),$$

με $b(x) = 0$ ή $\deg(b(x)) < m$. Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμα $\Pi(x), \Upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

$$P(x) = \Pi(x)q(x) + \Upsilon(x),$$

με $\Upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\Upsilon(x)) < m$. Τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &= P(x) + \frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}q(x) = \\ &= \Pi(x)q(x) + \Upsilon(x) + \frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}q(x) = \\ &= \left(\Pi(x) + \frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}\right)q(x) + \Upsilon(x). \end{aligned}$$

Επομένως, για $\upsilon(x) = \Upsilon(x)$ και $\pi(x) = \Pi(x) + \frac{p_{n+1}}{q_m}x^{n+1-m}$ έχουμε:

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x),$$

όπου $\upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon(x)) < m$, που ήταν το ζητούμενο.

Μοναδικότητα: Έστω δύο πολυώνυμα $p(x), q(x)$ με βαθμούς n, m αντίστοιχα και έστω ότι ισχύει:

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x) = \pi'(x)q(x) + \upsilon'(x),$$

για κάποια πολυώνυμα $\pi(x), \pi'(x), \upsilon(x), \upsilon'(x)$ με $\upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon(x)) < m$ και $\upsilon'(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon'(x)) < m$. Τότε έχουμε:

$$\pi(x)q(x) + \upsilon(x) = \pi'(x)q(x) + \upsilon'(x) \Leftrightarrow (\pi(x) - \pi'(x))q(x) = \upsilon'(x) - \upsilon(x).$$

Το αριστερό μέλος είτε είναι μηδενικό (αν $\pi(x) = \pi'(x)$) είτε τουλάχιστον m (αν $\pi(x) \neq \pi'(x)$). Το δεξί, αντιθέτως, είτε έχει βαθμό το πολύ $m-1$ είτε είναι μηδενικό. Επειδή τα δύο μέλη είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι και τα δύο είναι μηδενικά, επομένως:

$$\pi(x) = \pi'(x), \ \upsilon(x) = \upsilon'(x),$$

άρα το πηλίκο και το υπόλοιπο της Ευκλείδειας Διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι μοναδικά.

□

6.3 Το σχήμα Horner

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x)$ όπου:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k, \ a_k \neq 0, \ k \geq 1.$$

Μπορούμε να γράψουμε το p ως εξής:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k = \\
&= a_0 + x(a_1 + a_2 x + \ldots + a_k x^{k-1}) = \\
&= a_0 + x\left(a_1 + x(a_2 + a_3 x + \ldots + a_k x^{k-2})\right) = \ldots = \\
&= a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x(a_3 + \ldots + x(a_{k-1} + a_k x)\ldots)\right)\right). \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

Για παράδειγμα, αν $p(x) = 1 + 2x + x^2 - 3x^3$ τότε έχουμε, τελικά:

$$p(x) = 1 + x(2 + x(1 - 3x)).$$

Τώρα, αν θέλουμε, για παράδειγμα, να υπολογίσουμε το $p(\rho)$ αντικαθιστώντας στην (6.3) παίρνουμε:

$$p(\rho) = a_0 + \rho\left(a_1 + \rho\left(a_2 + \rho(a_3 + \ldots + \rho(a_{k-1} + a_k \rho)\ldots)\right)\right).$$

Δηλαδή, ξεκινώντας από την εσωτερική παρένθεση και προχωρώντας προς τα έξω:

- πολλαπλασιάζουμε το ρ με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, a_k,
- προσθέτουμε τον συντελεστή a_{k-1},
- πολλαπλασιάζουμε αυτό που βρήκαμε με το ρ,
- προσθέτουμε τον συντελεστή a_{k-2},
- πολλαπλασιάζουμε αυτό που βρήκαμε με το ρ κ.ο.κ.

Όλη αυτή τη διαδικασία την αναπαριστούμε σχηματικά με το γνωστό μας σχήμα Horner (βλ. σχήμα 6.1).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_k & & a_{k-1} & & a_{k-2} & & \cdots & & a_0 \\
 & & a_k\rho & & \rho(a_{k-1} + a_k\rho) & & \cdots & & \rho(a_1 + \ldots) \\
\downarrow & \cdot\rho & + & \cdot\rho & + & \cdot\rho & & \cdot\rho & + \\
a_k & & a_{k-1} + a_k\rho & & a_{k-2} + \rho(a_{k-1} + a_k\rho) & & \cdots & & \boxed{\mathbf{p}(\rho)}
\end{array}
$$

Σχήμα 6.1: Το σχήμα Horner.

□

6.4 Ιδιότητες λογαρίθμων και τύπος αλλαγής βάσης

Θα ξεκινήσουμε με την ιδιότητα:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

$$[\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \Leftrightarrow a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y}\\&\Leftrightarrow xy = xy,\end{aligned}$$

που ισχύει.

Αναλόγως, έχουμε:

$$\begin{aligned}\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y &\Leftrightarrow a^{\log_a \frac{x}{y}} = a^{\log_a x - \log_a y}\\&\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}\\&\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{x}{y},\end{aligned}$$

που ισχύει.

Επίσης:

$$\begin{aligned}\log_a x^s = s \log_a x &\Leftrightarrow a^{\log_a x^s} = a^{s \log_a x}\\&\Leftrightarrow x^s = (a^{\log_a x})^s\\&\Leftrightarrow x^s = x^s,\end{aligned}$$

που ισχύει.

Τέλος, για τον τύπο αλλαγής βάσης παραρτηρούμε αρχικά ότι:

$$x = a^{\log_a x} \text{ και } x = b^{\log_b x}.$$

Συνεπώς:

$$a^{\log_a x} = b^{\log_b x} \Leftrightarrow \log_b a^{\log_a x} = \log_b b^{\log_b x} \Leftrightarrow \log_a x \log_b a = \log_b x,$$

οπότε έχουμε:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

που ήταν το ζητούμενο.

$\square$

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων