ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΚΕΦ. 3

Αξιολόγηση Επένδυσης

Ε.Φ. Μαγείρου

Επιμέλεια σημειώσεων: Δ. Κ. Βασιλάκης

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

3.1 Αξιολόγηση Επένδυσης

3.1.1 Γενικά

Επένδυση: είναι μια χρηματοροή σε περιοδικά σημεία του χρόνου $t = 0,1,2,\ldots,N,\ldots$ που εμφανίζονται ποσά $-X_0, X_1,\ldots,X_N,\ldots$ αντίστοιχα, όπου τα X_j είναι μη αρνητικά, δηλαδή $X_j \geq 0$, $j = 0,1,\ldots,N,\ldots$. Κατά σύμβαση το αρχικό ποσό X_0 θεωρείται ότι καταβάλλεται, ενώ τα $X_1, X_2,\ldots$ αποτελούν εισπράξεις.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πότε είναι συμφέρουσα μία επένδυση σε σχέση με εναλλακτική τοποθέτηση σύνθετου τόκου. Δύο από τα απλούστερα κριτήρια είναι το κριτήριο της Καθαράς Παρούσας Αξίας (ΚΠΑ) και της Εσωτερικής Απόδοσης Επένδυσης (IRR).

3.1.2 Καθαρά Παρούσα Αξία

Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαθέσιμος ένα λογαριασμός σύνθετου τόκου $j_{(n)}$. Αν η περίοδος της επένδυσης είναι ίση με την περίοδο κεφαλαιοποίησης $1/n$, τότε έχουμε το εξής σκεπτικό:

Για να εξασφαλίσουμε ποσά X_j ($j = 1,\ldots,N$), πρέπει να τοποθετήσουμε στον λογαριασμό κεφάλαιο $\widehat{X}_0 = \sum_{j=1}^{N} X_j (1+p)^{-j}$, όπου $p = \dfrac{j_{(n)}}{n}$

Αν $\widehat{X}_0 > X_0$ τότε η επένδυση επιτυγχάνει τις εισπράξεις $X_1, X_2,\ldots$ με μικρότερο ποσό σε σχέση με την εναλλακτική τοποθέτηση, άρα είναι συμφέρουσα σε σχέση με τον σύνθετο τόκο!

Η συνθήκη γράφεται:

$$\widehat{X}_0 > X_0 \iff \sum_{j=1}^{N} \frac{X_j}{(1+p)^j} > X_0$$

$$\iff -X_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{X_j}{(1+p)^j} > 0$$

Η παράσταση $\boxed{-X_0 + \sum_{j=1}^{N} \dfrac{X_j}{(1+p)^j}}$ ονομάζεται Καθαρά Παρούσα Αξία (ΚΠΑ) της επένδυσης (Net Present Value, NPV). Εξαρτάται από τα X_j και το p.

Το κριτήριο αποδοχής επομένως γράφεται και ως:

$$\boxed{\textbf{ΚΠΑ(X,p)>0}}$$

Παράδειγμα 1:
Επένδυση αποδίδει 170 χιλ. € επί 10 έτη και απαιτεί αρχική δαπάνη 1 εκατ. €. Είναι συμφέρουσα σε σχέση με σύνθετο τόκο $j_{(1)} = 10\%$;

Είναι ΚΠΑ(Χ, 10%) = -1000+170$\cdot\alpha(10,10\%)$ = 44,5 χιλ € > 0
Άρα είναι συμφέρουσα η επένδυση.

□

Παράδειγμα 2: (Μετοχή-Ομολογία)
Μια μετοχή κοστίζει P € και θα αποδίδει ετήσιο μέρισμα E € επ' αόριστο. Αν $j_{(1)} = r$ δείξτε ότι θα πρέπει $\frac{P}{E} < \frac{1}{r}$ για να συμφέρει η αγορά της μετοχής.

Η ΚΠΑ είναι $-P + E \cdot \alpha(\infty, r) = -P + \frac{E}{r}$ που πρέπει να είναι θετική για να συμφέρει η αγορά της μετοχής. Δηλαδή, $-P + \frac{E}{r} > 0 \Rightarrow \frac{P}{E} < \frac{1}{r}$.

Έτσι αν τα επιτόκια είναι π.χ. 5% οι τιμές μετοχών που δεν έχουν προοπτικές αλλαγών στα κέρδη των δεν μπορούν να είναι περισσότερο από 20 φορές τα κέρδη ανά μετοχή!

□

3.1.3 Εσωτερική Απόδοση Επένδυσης (IRR)

3.1.3.1 Γενικά

Στην πράξη δεν είναι σαφές στην αξιολόγηση μιας επένδυσης ποια είναι η εναλλακτική απόδοση, δηλαδή το εναλλακτικό ονομαστικό επιτόκιο. Εύλογο είναι μια υποψήφια επένδυση να συγκριθεί με τις εναλλακτικές επενδύσεις που εξετάζουμε ή έχουμε αναλάβει, και η σύγκριση αυτή δεν είναι σαφής.

Μια χρήσιμη πληροφορία είναι η εξής:
Για ποια εναλλακτικά επιτόκια παραμένει συμφέρουσα η επένδυση; Αν αυτά αποτελούν ευρύ φάσμα, η επένδυση είναι ελκυστική!

Μια επένδυση συμφέρει για p τέτοια ώστε $\text{ΚΠΑ}(X,p)>0$ (X: δεδομένο)

Προφανώς (αν $X_0, X_1, X_2, \ldots > 0$ <u>και μόνο τότε</u>):

- $\text{ΚΠΑ}(X,\infty) = -X_0 < 0$ (άπειρο εναλλακτικό επιτόκιο)
- $\text{ΚΠΑ}(X,p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p

Αν ισχύει $\quad X_0 < \sum_{K=1}^{\infty} X_K$ (εύλογη παραδοχή)

Τότε $\text{ΚΠΑ}(X,0)>0$.

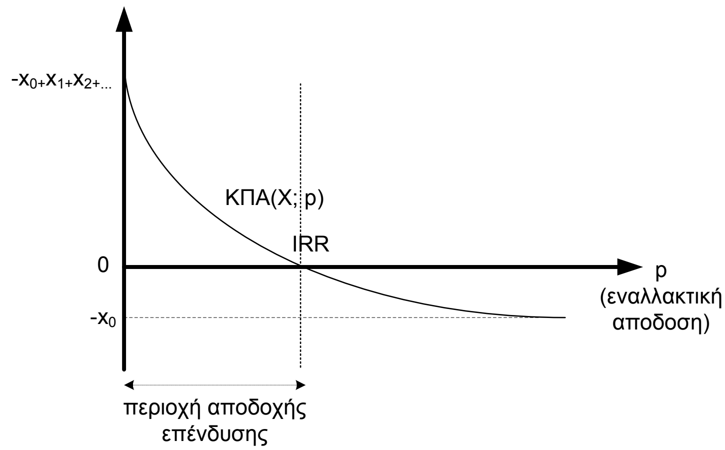
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει <u>μοναδική</u> ρίζα της εξίσωσης $\text{ΚΠΑ}(X,p)=0$ που ονομάζουμε <u>Εσωτερική Απόδοση Επένδυσης</u>, IRR (Internal Rate of Return).

Δηλαδή $\quad \text{ΚΠΑ}(X,\text{IRR})=0$

<u>Επιπλέον:</u>

- Αν $p < \text{IRR}$ τότε $\text{ΚΠΑ}(X,p)>0$
- Αν $p > \text{IRR}$ τότε $\text{ΚΠΑ}(X,p)<0$

Άρα η επένδυση συμφέρει εφόσον οι εναλλακτικές επενδύσεις έχουν απόδοση μικρότερη από IRR. (Η πρόταση αυτή θέλει προσοχή. Ισχύει <u>μόνο</u> όταν εξετάζουμε την υιοθέτηση ή απόρριψη μιας μεμονωμένης επένδυσης)



3.1.3.2 Εύρεση του IRR

Δεν υπάρχει τύπος που δίνει το IRR.

<u>Γενικά</u>, η εξίσωση $-X_0 + \frac{X_1}{(1+\mathrm{IRR})^1} + \ldots + \frac{X_K}{(1+\mathrm{IRR})^K} = 0$ γράφεται ως πολυωνυμική εξίσωση αν θέσουμε $Z = \frac{1}{(1+\mathrm{IRR})}$, οπότε:

$$0 = -X_0 + X_1 Z + X_2 Z^2 + \ldots + X_K Z^K$$

Δυστυχώς, δεν υπάρχει τύπος για υπολογισμό ριζών πολυώνυμου βαθμού 5 και άνω με ριζικά (θεώρημα Abel – Galois – η βάση της σύγχρονης άλγεβρας!). Ωστόσο, για επενδύσεις βραχείας διάρκειας η αναλυτική λύση είναι εφικτή.

<u>Παράδειγμα:</u>
Επένδυση έχει δαπάνη 100.000€ και θα αποδώσει 70.000€ ετησίως για δύο έτη. Ποιο το IRR της επένδυσης;

Εξετάζουμε την $-100+70z+70z^2=0$ ή $7z^2+7z-10=0$

Που έχει ρίζες: $z = \frac{-7 \pm \sqrt{49+4\cdot 10\cdot 7}}{14}$

Εφόσον όμως $0 \le \mathrm{IRR} \le \infty$ για εύλογες περιπτώσεις, είναι $0 < z \le 1$ άρα εξετάζουμε <u>μόνο</u> τη θετική ρίζα $z = \frac{-7+\sqrt{49+\ldots}}{14} = 0.796$, οπότε $\mathrm{IRR} = \frac{1}{z} - 1 = 25.69\%$

□

Για γενικές επενδύσεις το IRR βρίσκεται με αριθμητικές μεθόδους όπως αυτή της <u>διχοτόμησης</u>.

Παράδειγμα:
Έστω επένδυση με δαπάνη 1 εκατ.€ και σταθερά έσοδα 170 χιλ.€ επί δεκαετία.

Τότε είναι:
ΚΠΑ(p)=-1000+170 α(10,p)

Είδαμε από προηγούμενο παράδειγμα ότι ΚΠΑ(10%)=44.5>0
Επίσης υπολογίζουμε: $\text{ΚΠΑ}(15\%) \cong -147 < 0 \Rightarrow 10\% < \text{IRR} < 15\%$

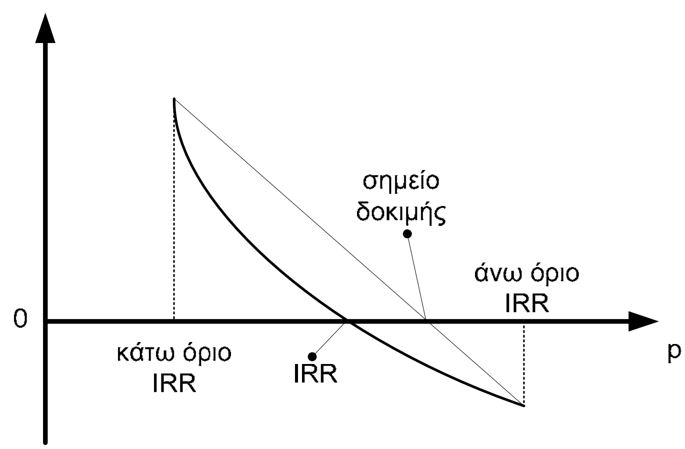
Δοκιμάζουμε στο μέσο του διαστήματος αβεβαιότητας, $\frac{10+15}{2} = 12.5\%$

Είναι $\text{ΚΠΑ}(12.5\%) \cong -60 < 0$
Άρα: 10%<IRR<12.5% και η αβεβαιότητα στο IRR υποδιπλασιάστηκε.

Δοκιμάζουμε πάλι στο μέσο: $\frac{10+12.5}{2} = 11.25\%$

Και ΚΠΑ(11.25%) = -10 < 0
Άρα, 10%<IRR<11.25% κ.λ.π.

Ταχύτερες μέθοδοι εκμεταλλεύονται την σκέψη ότι εφόσον ΚΠΑ(10%) = 44.5 και ΚΠΑ(11.25%)=-10, το IRR είναι πιο κοντά στο 11.25%. Μία τέτοια μέθοδος είναι γνωστή ως μέθοδος τέμνουσας. Βλέπε σχήμα.



Στα συστήματα λογισμικού (π.χ. Excel) υπολογίζονται αντίστοιχες μέθοδοι αναζήτησης για τον εντοπισμό του IRR σε ενσωματωμένες συναρτήσεις.

3.2 Ειδικές περιπτώσεις Σειρών Πληρωμών

3.2.1 Σειρές Πληρωμών κατά γεωμετρική πρόοδο

Πολύ σημαντικές στις εφαρμογές

Έστω επένδυση σε έργο που σήμερα αποδίδει ποσό $\bar{X}$ ετησίως. Προβλέπουμε ότι τα κέρδη θα αυξάνονται κατά g ετησίως, θα είναι δηλαδή:

$$X_1 = \bar{X}(1+g),\ X_2 = \bar{X}(1+g)^2, \dots,\ X_K = \bar{X}(1+g)^K$$

Η <u>παρούσα αξία</u> των εσόδων θα είναι:

$$\sum_{j=1}^{K} \bar{X} \frac{(1+g)^j}{(1+p)^j} = \bar{X} \cdot \sum_{j=1}^{K} \left[\frac{1+g}{1+p}\right]^j$$

Πλέον, έχουμε άθροισμα όρων Γεωμετρικής Προόδου με λόγο $\frac{1+g}{1+p}$ αντί για $\frac{1}{1+p}$ όπως προηγουμένως (στις ομοιόμορφες Σειρές Πληρωμών).

Άρα αν θέσουμε $\frac{1}{1+\hat{\rho}} \overset{\text{ορισμός}}{\equiv} \frac{1+g}{1+p}$, τότε η παράσταση γίνεται:

$$\bar{X} \cdot \sum_{j=1}^{K} \left(\frac{1+g}{1+p}\right)^j = \bar{X} \cdot \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{(1+\hat{\rho})^j} = \bar{X} \cdot \alpha\left(K, \hat{\rho}\right)$$

είναι $\hat{\rho} = \frac{1+p}{1+g} - 1 = \frac{p-g}{1+g}$, που σε εφαρμογές με $g << 1$ απλοποιείται σε $p - g$.

Αν $\frac{1+g}{1+p} < 1 \Rightarrow g < p$, τότε για άπειρους όρους το άθροισμα είναι πεπερασμένο και είναι:

$$\alpha\left(\infty, \hat{\rho}\right) = \frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{1+g}{p-g}.$$

Για $g > p$ η παράσταση είναι αρνητική και φυσικά δεν έχει νόημα καθώς ΔΕΝ ισχύει όταν $g > p$.

Η <u>τελική αξία</u> υπολογίζεται αντίστοιχα:

$$\text{T.A.} = \sum_{j=1}^{K} \bar{X} \cdot \left(1+g\right)^j \left(1+p\right)^{K-j} = \left(1+p\right)^K \cdot \sum_{j=1}^{N} \bar{X} \cdot \left(\frac{1+g}{1+p}\right)^j = \bar{X} \cdot \left(1+p\right)^K \cdot \alpha(K, \hat{\rho})$$

(ισούται και με $\left(\frac{1+p}{1+\hat{\rho}}\right)^K \cdot S\left(K, \hat{\rho}\right) \equiv \left(1+g\right)^K \cdot S\left(K, \hat{\rho}\right)$)

Εφαρμογή 1: (Αξιολόγηση Μετοχής)
Αναπτυξιακή δυναμική μετοχή έχει τιμή P και (ετήσια) κέρδη ανά μετοχή E, ενώ προβλέπεται επ' αόριστο ετήσια αύξηση κερδών κατά g. Τι πρέπει να ισχύει μεταξύ P,E για να συμφέρει η αγορά της μετοχής;

Για να συμφέρει η αγορά της πρέπει $-\mathrm{P}+\mathrm{E}\cdot\frac{1+g}{1+p}+\mathrm{E}\left(\frac{1+g}{1+p}\right)^2+\ldots>0$

ή $\quad -\mathrm{P}+\mathrm{E}\cdot\frac{1+g}{p-g}>0$ (Π.Α. άπειρης Σ.Π. αν $g<p$)

ή $\quad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}<\frac{1+g}{p-g}$

Ενώ: $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}<\infty$ αν $g>p$.

π.χ. για p=5%, g=2% $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}<\frac{1.02}{0.03}=34$

αλλά για g=5% ή 6% <u>δεν</u> υπάρχει άνω όριο στο $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}$. Αυτό εξηγεί τα τεράστια $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}}$ που παρατηρήθηκαν στα χρηματιστήρια.

□

Εφαρμογή 2:
Επένδυση έχει δαπάνη 1 εκατ.€ και έσοδα που αν λειτουργούσε σήμερα θα ήταν 120 χιλ.€ και αυξάνονται κατά 5% ετησίως επί 10ετία. Συμφέρει η επένδυση για $j_{(1)}$=10%;

Είναι: $\text{ΚΠΑ}=-1000+120\cdot\alpha\left(10,\hat{\rho}\right)$ με $\hat{\rho}=\frac{0.05}{1.05}=4.76\%$

Άρα $\text{ΚΠΑ}\left(\mathrm{X},10\%\right)=-1000+120\cdot\alpha\left(10,4.76\%\right)=-1000+120\cdot 7.812=-62.5$
Επομένως η επένδυση απορρίπτεται.

Ποιο το IRR της επένδυσης;

Το IRR ορίζεται ως το p για το όποιο ΚΠΑ=0, δηλαδή $-1000+120\cdot\alpha\left(10,\frac{\mathrm{IRR}-g}{1+g}\right)$

Όπου g=5%.
Η σχέση $-1000+120\cdot\alpha\left(10,z\right)=0$ δίνει μετά από αριθμητική επίλυση z=3.46%

και άρα $0.0346=\frac{\mathrm{IRR}-0.05}{1.05}$ ή IRR=8.633%.

□

Γενικά αν προβλέπουμε πληθωρισμό g% είθισται να μην αναπροσαρμόζουμε τα έσοδα ως προς τον πληθωρισμό, αλλά να υπολογίζουμε την ΚΠΑ με επιτόκιο μειωμένο κατά g (θυμηθείτε προσεγγιστικό τύπο για $g<<1$)

Παράδειγμα:
Έστω επιτόκια αγοράς 5% και πληθωρισμός g=2%. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδύσεις αξιολογούνται ως προς $\hat{\rho} = 5\% - 2\% = 3\%$, χωρίς αναπροσαρμογή των μελλοντικών εσόδων.

□

3.2.2 Σειρές Πληρωμών κατά αριθμητική πρόοδο

Σε περίπτωση αυξήσεως εσόδων κατά σταθερό ποσό B,
π.χ. $X_K = P + K \cdot B$ (K,B σταθερά) πως υπολογίζεται η Π.Α.;

$$\Pi A = \sum_{j=1}^{N} \frac{(A + jB)}{(1+p)^j} = A \cdot \alpha(N,p) + B \cdot \sum_{j=1}^{N} j \cdot (1+p)^{-j}$$

Η παράσταση $I_N = \sum_{j=1}^{N} j(1+p)^{-j}$ υπολογίζεται όπως το άθροισμα όρων Γ.Π. και είναι:

$$I_N = \frac{1}{1+p} + \frac{2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{N}{(1+p)^N}$$

$$\frac{I_N}{1+p} = \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{2}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{N-1}{(1+p)^N} + \frac{N}{(1+p)^{N+1}}$$

ή αφαιρώντας:

$$I_N\left(1 - \frac{1}{1+p}\right) = \frac{I}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^N} - \frac{N}{(1+p)^{N+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_N \frac{p}{1+p} = \alpha(N,p) - N(1+p)^{-(N+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_N = \frac{1+p}{p}\left[\alpha(N,p) - \frac{N}{(1+p)^{N+1}}\right]$$

3.2.3 Γενικές Σειρές Πληρωμών

Έστω σύνθετη κεφαλαιοποίηση με συχνότητα n και σειρά πληρωμών που προκύπτει ανά K κεφαλαιοποιήσεις. Ποια η παρούσα αξία;

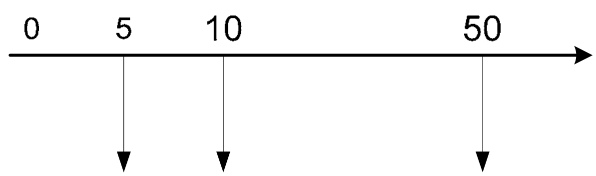
Αν X_m η m-στη χρηματορoή που προκύπτει την $m \cdot K$ κεφαλαιοποίηση με παρούσα αξία $\frac{X_m}{(1+p)^{mK}}$ όπου $p = \frac{j_{(n)}}{n}$.

Θέτοντας $1+\widehat{p} \equiv \left(1+\frac{j_{(n)}}{n}\right)^K$ (συσσώρευση μίας μονάδας έπειτα από K κεφ/σεις) η παρούσα αξία γίνεται $\frac{X_m}{(1+\widehat{p})^m}$

Δηλαδή αλλάζουμε το p από $\frac{j_{(n)}}{n}$ σε $\left(1+\frac{j(n)}{n}\right)^K - 1$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Τοποθέτηση ποσού A ανά 5 μήνες σε λογαριασμό με $j_{(12)}$=6%. Γίνονται 10 τοποθετήσεις. Ποια η παρούσα αξία;



$$\widehat{p} = \left(1+\frac{6\%}{12}\right)^5 - 1 = 2.525\%$$

$$\Pi.A. = A \cdot \alpha\left(10, 2.525\%\right) = 8.741 \cdot A$$

Ποια η τελική αξία;

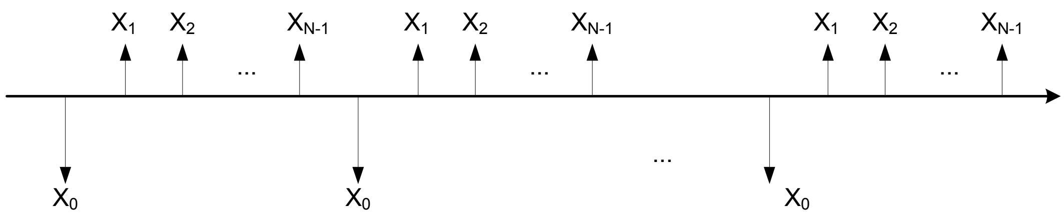
$T.A._N = \Pi.A._0 \cdot (1+p)^N$, όπου $p = \frac{j_{(12)}}{12} = 0.5\%$ και $N = 50$.

Άρα: $T.A._{50} = 8.741A \cdot 1.005^{50} = 11.216$

3.3 Επαναλαμβανόμενες Επενδύσεις

3.3.1 Γενικά

Έστω επένδυση με περίοδο N που επαναλαμβάνεται για άλλες M φορές (M+1 φορές συνολικά), σύμφωνα με το διάγραμμα:



Η Π.Α. της επένδυσης είναι:

$$-X_0+\frac{X_1}{(1+p)}+\ldots+\frac{X_{N-1}}{(1+p)^{N-1}}-\frac{X_0}{(1+p)^{N}}+\frac{X_1}{(1+p)^{N+1}}+\ldots-$$

$$-\frac{X_0}{(1+p)^{MN}}+\frac{X_1}{(1+p)^{MN+1}}+\ldots+\frac{X_{N-1}}{(1+p)^{MN+N-1}}=$$

$$=\text{ΚΠΑ}(X,p)+\frac{1}{(1+p)^{N}}\text{ΚΠΑ}(X,p)+\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N\cdot M}}\text{ΚΠΑ}(X,p)$$

όπου $\text{ΚΠΑ}(X,p)=-X_0+\dfrac{X_1}{1+p}+\ldots+\dfrac{X_{N-1}}{(1+p)^{N-1}}$

άρα:

$$\text{Π.Α.}=\text{ΚΠΑ}(X,p)\left(1+\frac{1}{(1+p)^{N}}+\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N\cdot M}}\right)=\text{ΚΠΑ}(X,p)\cdot\left[1+\alpha\left(M,\widehat{p}\right)\right]$$

όπου $1+\widehat{p}\equiv\left(1+p\right)^{N}$

<u>Εφαρμογή:</u>

Επένδυση με X_0=-1000, X_1=…=X_{10}=170 και $j_{(1)}$=10%, επαναλαμβάνεται άλλες 4 φορές. Χρειάζεται γι' αυτό ένα πρόσθετο ποσό 80 χιλ.€. Είναι σκόπιμη η επένδυση;

Η Π.Α. είναι $\text{ΚΠΑ}\left(X,10\%\right)\cdot\left[1+\alpha\left(4,\widehat{p}\right)\right]$. Το $\widehat{p}$ είναι $\widehat{p}=1.10^{11}-1=1.853$

Άρα $\widehat{p}=185.3\%$!

Για μία επανάληψη ΚΠΑ=44.5 χιλ.€ από προηγούμενο παράδειγμα και:

$$\alpha\left(4,1.853\right)=\frac{1-\left(1+1.853\right)^{-4}}{1.853}=0.532.$$

Άρα $\text{Π.Α.}=44.5\cdot1.532=68.17$ χιλ.€

Εφόσον η δαπάνη επιπλέον είναι 80 χιλ., δεν συμφέρει η επαναλαμβανόμενη επένδυση.

□

3.3.2 Αξιολόγηση – Επιλογή Μηχανημάτων

Έστω δαπάνη για αγορά μηχανήματος ποσού K που επαναλαμβάνεται ανά N έτη.
Η Παρούσα Αξία για M επιπλέον επαναλήψεις είναι:
$\Pi.\mathrm{A}._{\mathrm{M}} = \mathrm{K}\cdot[1+\alpha(\mathrm{M},\hat{\mathrm{p}})]$ όπου $\hat{\mathrm{p}} = (1+\mathrm{p})^{\mathrm{N}} - 1$ αν $j_{(1)} = \mathrm{p}$.

Για $\mathrm{M} \to \infty$:

$$\Pi.\mathrm{A}.\infty = \mathrm{K}\left(1+\frac{1}{\hat{\mathrm{p}}}\right) = \mathrm{K}\left(1+\frac{1}{(1+\mathrm{p})^{\mathrm{N}}-1}\right) = \mathrm{K}\frac{(1+\mathrm{p})^{\mathrm{N}}}{(1+\mathrm{p})^{\mathrm{N}}-1} = \mathrm{K}\frac{1}{1-(1+\mathrm{p})^{-\mathrm{N}}}$$

$$\left[\acute{\eta} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{p}}{1-(1+\mathrm{p})^{-\mathrm{N}}}\cdot\frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{K}\alpha^{-1}(\mathrm{N},\mathrm{p})}{\mathrm{p}}\right]$$

Αν υπάρχει σταθερό κόστος Λ ετήσιο λειτουργίας είναι παρούσα αξία $\Lambda\cdot\alpha(\infty,\mathrm{p}) = \dfrac{\Lambda}{\mathrm{p}}$

Το συνολικό κόστος είναι: $\dfrac{\mathrm{K}\cdot\alpha^{-1}(\mathrm{N},\mathrm{p})+\Lambda}{\mathrm{p}}$

Ο τύπος είναι και κριτήριο επιλογής κεφαλαιουχικού εξοπλισμού, όπου οι τύποι διαφέρουν κατά το κόστος αγοράς, την διάρκεια ζωής και τα λειτουργικά έξοδα.

Παρατήρηση:

Για $\mathrm{N} = \infty$, αιώνια μηχανή, το κόστος είναι $\mathrm{K}+\dfrac{\Lambda}{\mathrm{p}}$. Προφανώς και προκύπτει και από τον τύπο με $\dfrac{\alpha^{-1}(\infty,\mathrm{p})}{\mathrm{p}} = \mathrm{p}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{p}} = 1$

Παράδειγμα:

Ποια μηχανή επιλέγεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κόστους, ορίζοντα άπειρης διάρκειας και $j_{(1)}$=3%;

Τύποι Μηχανών	**Διάρκεια Ζωής**	**Κόστος Αγοράς (χιλ. €)**	**Ετήσια Λειτ. Έξοδα (χιλ. €)**	**α^{-1}(N,3%)**	**$\mathrm{K}\alpha^{-1}+\Lambda$**
Α	5	50	0.9	0.218	11.8
Β	7	70	1.0	0.161	12.3
Γ	10	90	1.2	0.117	11.7

Προφανώς η κατάταξη μπορεί να γίνει με κριτήριο το $K\alpha^{-1}+\Lambda$ (όχι το $\frac{K\alpha^{-1}+\Lambda}{p}$)

Περιθωριακά καλύτερος είναι ο τύπος μηχανής Γ!

□