ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΚΕΦ. 2

Σύνθετη Κεφαλαιοποίηση και Σειρές Πληρωμών

Ε.Φ. Μαγείρου

Επιμέλεια σημειώσεων: Δ. Κ. Βασιλάκης

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

2.1 Λογαριασμοί Σύνθετου Τόκου

2.1.1 Γενικά

Σε αυτούς:

- Καθορίζονται ημερομηνίες απόδοσης τόκων
- Οι τόκοι συμφωνείται να προστεθούν στο υπόλοιπο (αν δεν γίνει ανάληψη).
- Οι ημέρες απόδοσης τόκων λέγονται ημέρες κεφαλαιοποίησης ή κεφαλαιοποιήσεις.
- Οι κεφαλαιοποιήσεις γίνονται περιοδικά π.χ. ανά εξάμηνο, ανά μήνα αλλά και συνεχώς.
- Οι τόκοι μεταξύ κεφαλαιοποιήσεων υπολογίζονται κατά τη σύμβαση του λογαριασμού, θα θεωρήσουμε ότι υπολογίζονται όπως στους λογαριασμούς απλού τόκου που είπαμε προηγουμένως.

Οι λογαριασμοί αυτοί χαρακτηρίζονται συνήθως από:

1. Την συχνότητα κεφαλαιοποιήσεων που αναφέρεται ως αριθμός κεφαλαιοποιήσεων ανά έτος και συμβολίζεται με n ή m. Η περίοδος κεφαλαιοποίησης είναι επομένως $\frac{1}{n}$ σε έτη.
2. Το ονομαστικό επιτόκιο, έστω $a\%$, που δηλώνει το επιτόκιο απλού τόκου που χρησιμοποιείται μεταξύ κεφαλαιοποιήσεων. Θα θεωρήσουμε ονομαστικό επιτόκιο που ΔΕΝ μεταβάλλεται στον χρόνο.

Συμβολισμός ονομαστικού επιτοκίου $j_{(n)} = a\%$ (δεν πληροφορεί για τις ημέρες κεφαλαιοποίησης, μόνο για τη συχνότητά τους).

Γράφουμε π.χ. $j_{(12)} = 5\%$, $j_{(2)} = 3\%$, $j_{(1)} = 4\%$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μηνιαία κεφαλαιοποίηση, στην δεύτερη εξαμηνιαία, στην τελευταία ετήσια.

2.1.2 Κίνηση λογαριασμού σύνθετου τόκου

Έστω $j_{(2)} = 10\%$, με κεφαλαιοποιήσεις κάθε 1/1 και 1/7.

Κινήσεις: κατάθεση 100€ την 1/1 και 50€ την 1/4. Τι ποσό έχει την 1/1 του επόμενου έτους;

Το «βιβλιάριο» θα δείξει τα εξής:

Ημερομηνία	Κίνηση	Υπόλοιπο	Παρατήρηση
1/1	100	100	Άνοιγμα
1/4	50	150	
1/7	6,25	156,25	Τόκοι
1/1	7,81	164,1	Τόκοι

Αν την 1/10 είχαμε αποσύρει ποσό 6.25 € (τόκοι) θα είχαμε την εικόνα:

Ημερομηνία	**Κίνηση**	**Υπόλοιπο**
1/1	100	100
1/4	50	150
1/7	6,25	156,25
1/10	-6,25	150
1/1	7,66	157,66

Οι τελευταίοι τόκοι είναι όντως $156.25 \cdot \frac{3}{12} \cdot 10\% + 150 \cdot \frac{3}{12} \cdot 10\% = 7.66$

Παράδειγμα:
Σε λογαριασμό $j_{(2)}$=10%, τοποθετούμε ποσό Α, 3 μήνες πριν την κεφαλαιοποίηση. Χωρίς να κάνουμε άλλη κίνηση κλείνουμε έντοκα τον λογαριασμό 3 έτη και ένα μήνα μετά το άνοιγμά του. Τι ποσό θα έχει ο λογαριασμός; (έντοκα)

Η πρώτη κεφαλαιοποίηση θα γίνει μετά 3 μήνες (από άνοιγμα) και το υπόλοιπο θα είναι $A \cdot (1 + 10\% \cdot \frac{3}{12})$.
Κεφαλαιοποιήσεις θα γίνουν σε 3+6, 3+12, 3+18 μήνες και πριν τον μήνα 31. Άρα η τελευταία θα γίνει για ακέραιο x ώστε $3 + 6x \leq 37$. Άρα $6x \leq 34 \Rightarrow x \leq \frac{34}{6}$. Άρα $x = 5$. Επομένως θα γίνουν άλλες 5 κεφαλαιοποιήσεις και το ποσό μετά $3 + 5 \cdot 6$ μήνες θα είναι:

$$A\left(1 + 10\% \cdot \frac{3}{12}\right)\left(1 + 10\% \cdot \frac{6}{12}\right)^5$$

θα αποσύρουμε τα χρήματα μετά άλλους $37 - 33 = 4$ μήνες και το τελικό ποσό θα είναι:

$$A\left(1 + 10\% \cdot \frac{3}{12}\right) \cdot \left(1 + 10\% \cdot \frac{6}{12}\right) \cdot \left(1 + 10\% \cdot \frac{4}{12}\right) = 1.2874A.$$

□

Ερώτηση:
Πότε θα πρέπει να κλείσω τον λογαριασμό του προηγούμενου παραδείγματος ώστε να εισπράξω Α+50%;

Συμβολικά, έστω T_1 ο χρόνος πριν την $1^η$ κεφαλαιοποίηση, K ακέραιος αριθμός κεφαλαιοποιήσεων και T_2 ο χρόνος μετά την τελευταία.

Προφανώς, για τη γενική περίπτωση που έχουμε κάποιο $j_{(n)}$: $0 \le T_1, T_2 \le \frac{1}{n}$ έτη. Αν ο λογαριασμός έχει ονομαστικό $j_{(n)}$, το τελικό ποσό θα είναι:

$$A \cdot \left(1 + j_{(n)} T_1\right) \cdot \left(1 + j_{(n)} \frac{1}{n}\right)^K \cdot (1 + j_{(n)} T_2)$$

και πρέπει να εξισωθεί με το ζητούμενο ποσό.

Στην ερώτησή μας είναι: $A\left(1 + 10\% \cdot \frac{3}{12}\right)\left(1 + 10\% \cdot \frac{1}{2}\right)^K \left(1 + 10\% \cdot T_2\right) = 1.5A$

ή $\quad 1.05^K \cdot \left(1 + 0.10 \cdot T_2\right) = 1.463$

Όπου K ακέραιος $0 \le T_2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \le 1 + 0.10T_2 \le 1.05$

Προφανώς λοιπόν: $1.05^K \le 1.05^K \cdot \left(1 + 0.10 \cdot T_2\right) = 1.463 \le 1.05^{K+1}$

Άρα: $1.05^K \le 1.463 \le 1.05^{K+1}$

Παίρνοντας λογάριθμους και διαιρώντας $K \le \frac{\log 1.463}{\log 1.05} \le K + 1$

Άρα: $K = \left\lfloor \frac{\log 1.463}{\log 1.05} \right\rfloor = \lfloor 7.8 \rfloor = 7$

$\lfloor x \rfloor$: ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του x.

Βρίσκουμε το T_2 θέτοντας:

$1.05^7 \left(1 + 0.1 \cdot T_2\right) = 1.463$

$1.407 \cdot \left(1 + 0.1 \cdot T_2\right) = 1.463 \Rightarrow T_2 = 0.40$ έτη

□

Ο τύπος του υπολοίπου $\boxed{\left(1 + j_{(n)} T_1\right) \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K \cdot \left(1 + j_{(n)} T_2\right)}$

ονομάζεται τύπος Μεικτού Τόκου, ακριβής αλλά δύσχρηστος.

2.1.3 Τύποι Αριθμού Κεφαλαιοποιήσεων – Χρόνου

Για $T_1 = T_2 = 0$, το υπόλοιπο μετά από K κεφαλαιοποιήσεις είναι $S_K = A \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K$.

Ο χρόνος που θα έχει μεσολαβήσει είναι $T = K \cdot \frac{1}{n}$ έτη (γιατί;).

Γράφοντας $K = T \cdot n$ ο τύπος γίνεται $S_K = S_T = A \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^{nT}$

ή $\quad S_T = A \cdot \left[\left(1 + \frac{j(n)}{n}\right)^n\right]^T$

Ο όρος $\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^n$ είναι η συσσώρευση μοναδιαίου ποσού σε 1 έτος. Η πράξη της συσσώρευσης έχει απόδοση <u>απλού τόκου</u> που ονομάζεται <u>πραγματικό επιτόκιο</u> $i_{\pi\rho}$

Είναι προφανώς (θυμηθείτε τον τύπο της απόδοσης απλού τόκου):

$$\boxed{i_{\pi\rho} = \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^n - 1}$$

<u>Παράδειγμα:</u>
Ποια τα αντίστοιχα πραγματικά επιτόκια για $j_{(2)} = 10\%$, $j_{(12)} = 5\%$, $j_{(1)} = 8\%$;

Είναι:

$$i_{\pi\rho}\left(j_{(2)} = 10\%\right) = 1.05^2 - 1 = 10.25\%$$

$$i_{\pi\rho}\left(j_{(12)} = 5\%\right) = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1 = 5.12\%$$

$i_{\pi\rho}\left(j_{(1)} = 8\%\right) = 8\%$ <u>αλλά</u> $j_{(1)}$ ΟΧΙ απλός τόκος!

□

Προφανώς για n μεγάλο:

$$i_{\pi\rho}\left(j(n) = a\right) = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - 1 \cong e^a - 1$$

Π.χ. για $a = 5\%$: $\quad i_{\pi\rho}\left(j_{(\infty)} = 5\%\right) = e^{0.05} - 1 = 5.13\%$

που είναι πιο κοντά στο $i_{\pi\rho}$ του $j_{(12)}$!

Σύμφωνα με όσα είπαμε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{S_T = A \cdot \left(1 + i_{\pi\rho}\right)^T}$$

Ο τύπος ισχύει όταν έχουμε κίνηση που αρχίζει και τελειώνει σε κεφαλαιοποίηση.
Για μικρά επιτόκια είναι πολύ ακριβής ακόμα και αν το T δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου κεφαλαιοποίησης.

Παράδειγμα:
Έστω λογαριασμός με $j_{(1)} = 10\%$. Κάνουμε τοποθέτηση για δυόμισι έτη. Ποιο το υπόλοιπο για $A = 1$;

Ακριβής Υπολογισμός: $1 \cdot 1.10^2 \cdot 1.05 = 1.2705$ (τύπος μεικτού τόκου)
Προσεγγιστικός: $1.10^{2.5} = 1.2691$

□

Αιτιολόγηση:

$$\left(1 + j_{(n)} T_1\right) \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K = \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n} \cdot n \cdot T_1\right) \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K$$

Αλλά για **x** μικρό: $\left(1 + x\right)^T \cong 1 + Tx$

Και $\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n} n T_1\right) \cong \left[\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^n\right]^{T_1}$

Επίσης: $\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K = \left[\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^n\right]^{T'}$ όπου $T' = K \cdot \frac{1}{n}$ (ο χρόνος που αντιστοιχεί σε K περιόδους κεφαλαιοποίησης).

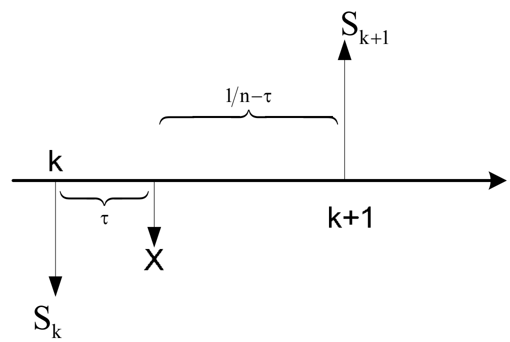
Άρα τελικά: $\left(1 + j_{(n)} T_1\right) \cdot \left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^K \cong \left[\left(1 + \frac{j_{(n)}}{n}\right)^n\right]^{T_1 + T'} = \left(1 + i_{\pi\rho}\right)^{T_1 + T'}$

Όπου $T = T' + T_1$ ο συνολικός χρόνος.

Δηλαδή: $S_T \cong A \cdot \left(1 + i_{\pi\rho}\right)^T$

2.2 Αλγεβρική Παρουσίαση Λογαριασμών Σύνθετου Τόκου

Προσπάθεια εύρεσης τύπου αντίστοιχου της ευθείας μεθόδου.
Αρκεί να υπολογίσουμε τα S_K, δηλαδή τα υπόλοιπα σε (ακέραιες) στιγμές κεφαλαιοποίησης $K = 0,1,2,\dots$



Έστω ότι ο λογαριασμός άνοιξε την K στιγμή κεφαλαιοποίησης με ποσό S_K και έγινε κατάθεση ποσού X, χρόνο τ μετά την κεφαλαιοποίηση.

Από την ευθεία μέθοδο του απλού τόκου είναι:

$$S_{K+1} = S_K \cdot \left(1 + j_{(n)} \cdot \frac{1}{n}\right) + X\left[1 + j_{(n)} \cdot \left(\frac{1}{n} - \tau\right)\right] \text{ ή}$$

$$S_{K+1} = S_K \cdot (1+p) + \widehat{X}_{K+1} \qquad K = 0,1,2,\dots$$

όπου $p = \dfrac{j_{(n)}}{n}$ (αριθμός, ΟΧΙ επιτόκιο!) και $\widehat{X}_{K+1}$, τα έντοκα αποτελέσματα των κινήσεων μεταξύ της K και της $K+1$ κεφαλαιοποίησης.

Η προηγούμενη σχέση είναι μία <u>εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης</u>! (σταθεροί συντελεστές)

Η λύση της δίνει το S_K κατευθείαν για οποιοδήποτε K συναρτήσει των $\widehat{X}_K$ χωρίς λύση των αναδρομικών.

Εξετάζοντας την εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$S_1 = S_0(1+p) + \widehat{X}_1$$

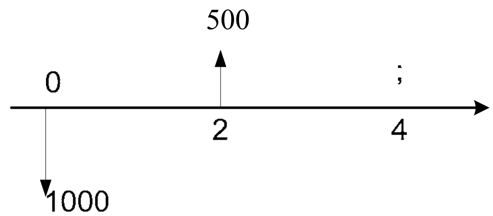
$$S_2 = S_1(1+p) + \widehat{X}_2 \;\Rightarrow\; S_2 = S_0(1+p)^2 + \widehat{X}_1(1+p) + \widehat{X}_2$$

$$S_3 = S_2(1+p) + \widehat{X}_3 \;\Rightarrow\; S_3 = S_0(1+p)^3 + \widehat{X}_1(1+p)^2 + \widehat{X}_2(1+p) + \widehat{X}_3$$

και γενικά: $\boxed{S_K = S_0(1+p)^K + \sum_{j=1}^{K} \widehat{X}j \cdot (1+p)^{K-j}}$

<u>Παράδειγμα 1:</u>

$j_{(1)} = 10\%$. Τοποθετώ σε στιγμή κεφαλαιοποίησης 1.000 €, μετά από 2 χρόνια κάνω ανάληψη 500 €, κλείνω τον λογαριασμό σε άλλα 2 χρόνια. Ποιο το υπόλοιπο;



$S_4 = 1000 \cdot 1.10^4 - 500 \cdot 1.10^2 = 859.1$ €

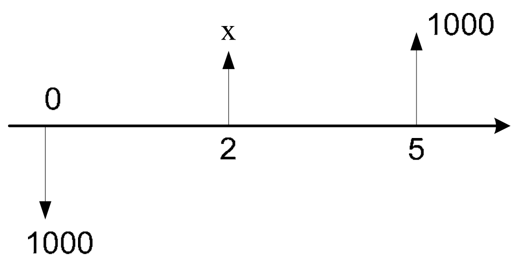
Όντως σε 2 χρόνια έχω υπόλοιπο $S_2 = 1000 \cdot 1.10^2 - 500 = 710$ €

Στο 4^o έτος έχω $S_4 = 710 \cdot 1.10^2 = 859.1$ €

□

<u>Παράδειγμα 2:</u>

Σε ένα λογαριασμό $j_{(2)} = 10\%$. τοποθετώ 1.000 €. Ποια ανάληψη μπορώ να κάνω σε 2 έτη ώστε σε 5 έτη να κλείσω εισπράττοντας πάλι 1.000 €;



Πρέπει $1000 \cdot 1.05^{10} - x \cdot 1.05^6 = 1000$ ή διαιρώντας δια 1.05^6

$$1000 \cdot 1.05^4 - x - \frac{1000}{1.05^6} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 469.3€$$

□

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει το εξής:

Αν σε ένα πρόβλημα <u>κλείνουμε</u> τον λογαριασμό σε χρόνο (κεφαλαιοποίηση) K θα είναι: $-X_K = S_K$ (όπου X_K ύψος ανάληψης).

Και ο τύπος γράφεται αν επιπλέον $S_0 = \widehat{X}_0$:

$$S_K = \widehat{X}_0(1+p)^K + \sum_{j=1}^{K} \widehat{X}j \cdot (1+p)^{K-j} - X_K \text{ δηλαδή } \sum_{j=0}^{K} \widehat{X}_j (1+p)^{K-j} = 0$$

που είναι ισοδύναμος με τον

$$\boxed{\sum_{j=0}^{K} \widehat{X}_j (1+p)^{m-j} = 0}$$ (όπου m αυθαίρετο)

Ο όρος $(1+p)^{m-j}$ φέρνει το ποσό $\widehat{X}_j$ «έντοκα» στο m - δίνει ένα <u>ισοδύναμο</u> στο m.
Η εξίσωση αυτή λέει ότι το άθροισμα των ισοδύναμων πρέπει να μηδενίζεται.

Στο προηγούμενο παράδειγμα (παρ. 2) διαλέγουμε χρόνο ισοδυναμίας τα 2 έτη.
Το αρχικό ποσό των 1000 € γίνεται $1000 \cdot 1.05^4$ (γιατί;),
ενώ το τελικό -1000 γίνεται $\dfrac{-1000}{1.05^6}$ (γιατί;).
Ενώ το άγνωστο ποσό παραμένει X.
Άρα η σχέση ισοδυναμίας γράφεται $1000 \cdot 1.05^4 - X - \dfrac{1000}{1.05^6} = 0$
που είναι ίδια όπως προηγουμένως.

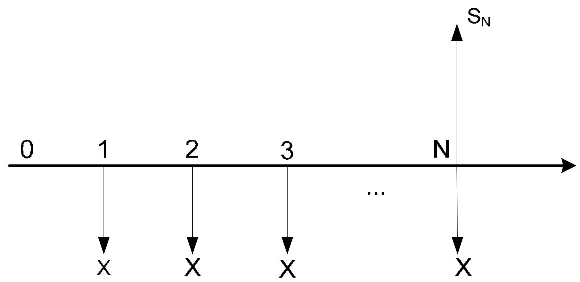
2.3 Σειρές Πληρωμών

Μία Σειρά Πληρωμών (ΣΠ) αναφέρεται σε ποσά $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ που ανακύπτουν σε <u>ισαπέχουσες</u> χρονικές στιγμές. Λέγεται εναλλακτικά και ράντα ή annuity.

Αν $X_j = X \ \forall j$, τότε έχουμε <u>Ομοιόμορφη Σειρά Πληρωμών</u>.

2.3.1 Τελική Αξία Ομοιόμορφης Σειράς Πληρωμών

Έστω ότι τα $X_k\left(=X\right)$ ανακύπτουν σε στιγμές κεφαλαιοποίησης λογαριασμού $j_{(n)}$ $k = 1, 2, \ldots, N$. Τι ποσό θα έχει συσσωρευθεί στο N;



Με βάση την ισοδυναμία στο N είναι:

$$S_N = X\left(1+p\right)^{N-1} + X\left(1+p\right)^{N-2} + \ldots + X =$$
$$= X\left[\left(1+p\right)^{N-1} + \left(1+p\right)^{N-2} + \ldots + 1\right]$$

Όπου $p = \dfrac{j_{(n)}}{n}$

<u>Παρένθεση</u>: Άθροιση Όρων Γεωμετρικής Προόδου:

Έστω $Q_n = \alpha + \alpha\lambda + \ldots + \alpha\lambda^n$

Είναι $\lambda Q_n = \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \ldots + \alpha\lambda^n + \alpha\lambda^{n+1}$

Άρα $Q_n - \lambda Q_n = \alpha - \alpha\lambda^{n+1}$

ή $Q_n = \dfrac{\alpha\lambda^{n+1} - \alpha}{\lambda - 1}$

Αν $\left|\lambda\right| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \dfrac{\alpha}{1-\lambda}$

Αν $\left|\lambda\right| \geq 1$: το όριο αποκλίνει.

□

Άρα: $S_N = X\dfrac{(1+p)^N - 1}{1+p-1} = X\dfrac{(1+p)^N - 1}{p}$

Ο συντελεστής του X γράφεται:

$\boxed{S(N,p) = \dfrac{(1+p)^N - 1}{p}}$ (τελική αξία μίας ομοιόμορφης Σ.Π. που πληρώνει μία μονάδα σε κάθε στιγμή κεφαλαιοποίησης, ξεκινώντας από την επόμενη στιγμή)

<u>Παράδειγμα:</u>

Τοποθετούμε σε τέλος εξαμήνου ποσό 100 € σε λογαριασμό με $j_{(2)} = 5\%$. Τι ποσό έχουμε μετά από 5 έτη;

Είναι $N = 2 \cdot 5 = 10$ κεφαλαιοποιήσεις

$$p = \frac{j_{(n)}}{n} = \frac{5\%}{2} = 2.5\%$$

Άρα: $S = 100 \cdot S(10, 2.5\%) = 100 \cdot \dfrac{1.025^{10} - 1}{0.025} = 1120.3€$

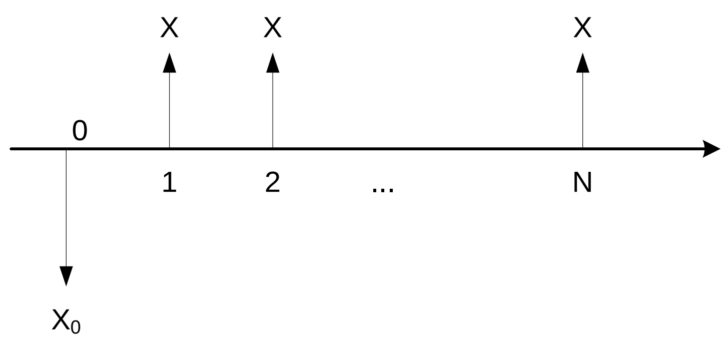
□

<u>Προφανώς:</u>

- $S(N,p) \geq N$ με ισότητα για $p = 0$
- $S(N,p)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του p.

2.3.2 Παρούσα Αξία Ομοιόμορφης Σειράς Πληρωμών

Θέλω να κάνω αναλήψεις ποσού X σε κεφαλαιοποιήσεις λογαριασμού με $j_{(n)}$ γνωστό, N φορές, ξεκινώντας από μία κεφαλαιοποίηση μετά. Τι ποσό πρέπει να καταθέσω αρχικά;



Με ισοδυναμία πάλι στο N:

$$X_0 \cdot (1+p)^N - \left[X \cdot (1+p)^{N-1} + X \cdot (1+p)^{N-2} + \ldots + X\right] = 0$$

ή $\quad X_0 \cdot (1+p)^N - X \cdot S(N,p) = 0$

ή $\quad X_0 = X \cdot \dfrac{S(N,p)}{(1+p)^N} = X \cdot \dfrac{1-(1+p)^{-N}}{p}$

ο συντελεστής του X συμβολίζεται με $\boxed{\alpha(N,p) = \dfrac{1-(1+p)^{-N}}{p}}$

<u>Προφανώς:</u>

- $\alpha(N,p) \le N$ με ισότητα για $p=0$
- $\alpha(N,p)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του p.

Αν $p>0$ τότε $\lim\limits_{N\to\infty} \alpha(N,p) = \alpha(\infty, p) = \dfrac{1}{p}$

Δηλαδή έχουμε μία άπειρη σειρά πληρωμών (ράντα στο διηνεκές).

2.3.3 Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 1:</u>

Τι ποσό πρέπει να καταθέσω για να εισπράττω από λογαριασμό, 1000€ τον μήνα για 10 χρόνια με $j_{(12)} = 5\%$;

Είναι $N = 10 \cdot 12 = 120 \qquad p = \dfrac{j_{(12)}}{12} = \dfrac{0.05}{12} = 0.416\%$

Άρα $X_0 = 1000 \cdot \alpha(120, 0.416\%) = 1000 \cdot 94.316 = 94316$ €

Για άπειρα χρόνια το ποσό είναι

$X_0 = 1000 \cdot \alpha(\infty, 0.416) = \dfrac{1000}{0.00416} = 240,384.6$€

□

<u>Εφαρμογή 2:</u>

Μια ομολογία δίνει τοκομερίδιο 1€ ανά μήνα. Ποια η αξία της αν $j_{(12)} = 6\%$; Θεωρήστε απεριόριστη τη ζωή της.

Είναι: $p = \dfrac{6\%}{12} = 0.005$ και η αξία της είναι $P = 1 \cdot \alpha(\infty, 0.5\%) = \dfrac{1}{0.005} = 200$€

□

<u>Εφαρμογή 3:</u>

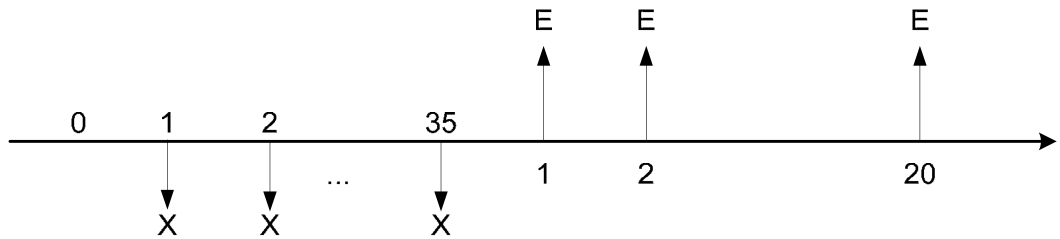
Μια ομολογία δίνει 1€ ετησίως και υπάρχει $j_{(1)} = 5\%$. Ποια η αξία της; (απεριόριστη ζωή)

Είναι $p = 5\%$ και η αξία είναι $P = 1 \cdot \alpha\left(\infty, 5\%\right) = \dfrac{1}{0.05} = 20\,€$

□

Εφαρμογή 4:

Εργαζόμενος θέλει να δημιουργήσει ένα κεφάλαιο καταθέτοντας ποσό Χ ετησίως επί 35 έτη ώστε να μπορεί να εισπράττει ετησίως ποσό Ε επί 20 έτη μετά την 35ετία (σύνταξη). Ποιο το Χ αν ισχύει $j_{(1)} = 5\%$;



Θεωρούμε στιγμή ισοδυναμίας το έτος 35. Θα πρέπει η αξία (τελική) των εισφορών στο 35 να ισούται με την (παρούσα) αξία των Ε στο 35, δηλαδή:

$$X \cdot S\left(35, 5\%\right) - E \cdot \alpha\left(20, 5\%\right) = 0$$

ή

$$X = \frac{E \cdot \alpha(20, 5\%)}{S(35, 5\%)} = 0.138 \cdot E$$

Ερμηνεύετε το αποτέλεσμα.

Επαναλάβετε το πρόβλημα, αλλά με τέτοιο $j_{(12)}$ που να δίνει $i_{\pi\rho}\left(j_{(12)}\right) = 5\%$.

Απάντηση: Πάλι $X = 0.138 \cdot E$.

□