ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΚΕΦ. 1

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Ε.Φ. Μαγείρου

Επιμέλεια σημειώσεων: Δ. Κ. Βασιλάκης

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

1.1 Γενικά

1.1.1 Βασικές έννοιες

<u>Επενδύσεις:</u>

- Βασική έννοια: κεφάλαιο
- Χαρακτηριστική έννοια: διάρκεια!
    - Κεφαλαιουχικά αγαθά
    - Διαρκή Καταναλωτικά

Έκφρασή τους σε χρήμα
<u>Κεφάλαιο</u>: ποσό ενός χρήματος διαθέσιμο για διάρκεια.

Ποιο χρήμα;
Αλλαγές χρηματικής αξίας ιδίου αγαθού έχουν σημασία
Αλλαγές αξίας νομισμάτων έχουν σημασία

Νεώτερες απόψεις: έλλειψη Arbitrage

Χαρακτηρισμός επενδύσεων

- Ως προς <u>στρατηγική:</u>
    - Παραγωγικές: κερδίζουν από έσοδα
    - Κερδοσκοπικές: κερδίζουν από "εμπόριο" κεφαλαιουχικού στοιχείου (παράδειγμα: γη, μεγάλα στοιχεία π.χ. πλοία)
- Ως προς κίνδυνο.

Συμμετοχή:

- Προσωπική εταιρία
- Μέτοχος
- Ομολογιούχος
- Χαρτοφυλάκιο μετοχών

Προσφορά Κεφαλαίου – Ζήτηση Κεφαλαίου

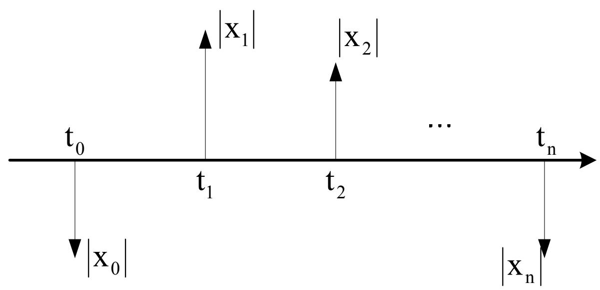
- Τιμή Κεφαλαίου: Τόκος
- Διαθέσιμο Εισόδημα
- Διαθέσιμες Ευκαιρίες

Αγορές Χρήματος και Κεφαλαίου

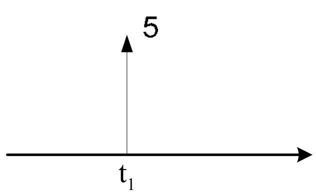
- Τράπεζες
- Χρηματιστήρια
- Εξειδικευμένες Αγορές

1.1.2 Χρονικά διαγράμματα

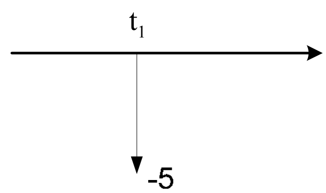
Πράξη παρίσταται από μία σειρά ποσών $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$ στον χρόνο ως προς κάποιο υποκείμενο.



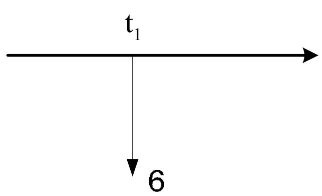
Έκφραση: αν π.χ. $x_1 = 5 \geq 0$ (εισπράττω ποσό 5 €)



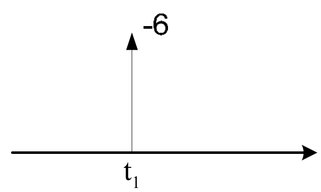
ή



αν π.χ. $x_1 = -6 \leq 0$ (πληρώνω ποσό 6 €)



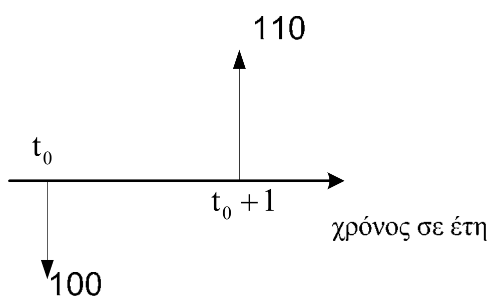
ή



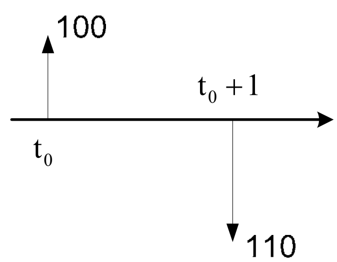
Αν έχουμε έναν αντισυμβαλλόμενο τότε το διάγραμμα (αντίστροφης) πράξης είναι ακριβώς το αντίθετο.

Παράδειγμα:

Δάνειο 100 χιλ.€ εξοφλείται σε 1 έτος με 10% επιτόκιο.



ΔΑΝΕΙΣΤΗΣ



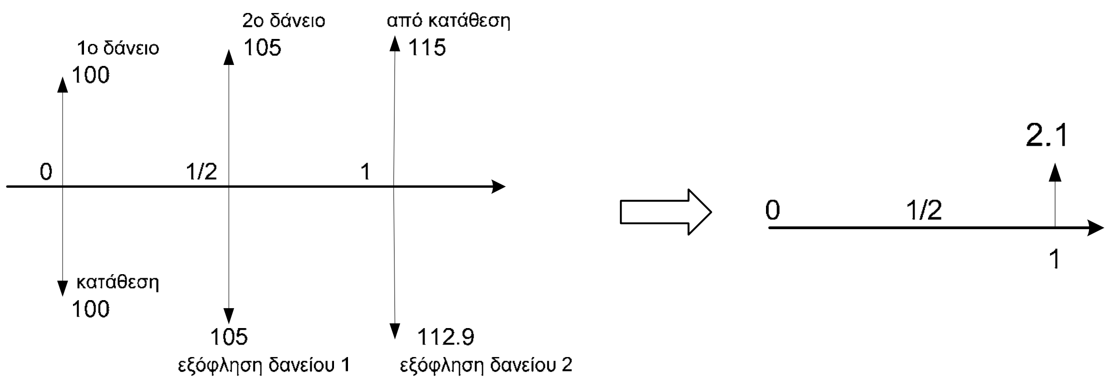
ΔΑΝΕΙΖΟΜΕΝΟΣ

1.1.3 Σύνθετες πράξεις

Γενικά, αν σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t γίνουν πράξεις $\Pi_{t1}, \Pi_{t2}, \ldots$, τότε το συνολικό ποσό: $\Pi_t = \Pi_{t1} + \Pi_{t2} + \ldots$, δηλαδή ισούται με το άθροισμα όλων των ποσών που προκύπτουν τη χρονική στιγμή t.

<u>Παράδειγμα:</u>

- Δανείζομαι 100 € προς 10% για μισό έτος.
- Τοποθετώ προς 15% για 1 έτος.
- Παίρνω ενδιάμεσο δάνειο ύψους 105 € προς 15% (για να εξοφλήσω το πρώτο δάνειο).



□

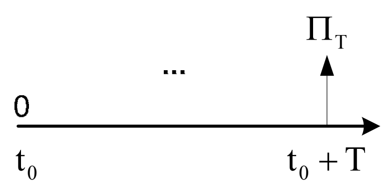
<u>Απλός Τόκος</u> (όπως θα δούμε στην συνέχεια):

$S = K + I$

$I = iKT$

1.1.4 Arbitrage

Δεν μπορεί να υπάρχουν στην αγορά πράξεις των οποίων το ισοδύναμο τελικό διάγραμμα χρόνου θα έχει τη μορφή:



Αυτή είναι μια περίπτωση Arbitrage (βλ. προηγούμενο παράδειγμα).

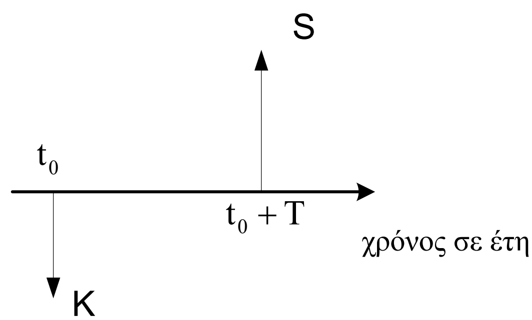
<u>Προσοχή:</u>

Ευκαιρίες μεμονωμένες φυσικά υπάρχουν αλλά ΔΕΝ διαρκούν.

Σε οργανωμένες αγορές, με καλά ενημερωμένους επενδυτές, οι ευκαιρίες εξαφανίζονται γρήγορα (π.χ. εισαγωγή καλού ασιατικού υπολογιστή).

1.2 Δομή του απλού τόκου

Απλός Τόκος: Πιο σημαντική μέθοδος χρηματοδότησης.



Πράξη τοποθέτησης (ή απλό δάνειο για τον δανειστή)

Το αρχικό κεφάλαιο είναι K.

- $S > K$: Παραδοχή οικονομικής φύσης (όχι πως δεν υπάρχουν εξαιρέσεις, π.χ. φύλαξη)
- Το τελικό κεφάλαιο είναι: $S = K + I$, όπου I: τόκος κεφαλαίου K για διάρκεια T και τοποθέτηση που έγινε στο t_0.
- $I = I(K, t_0, T)$

Γιατί είναι ενιαία η τιμή (για όλες τις ίδιες πράξεις);
Μόνο αν υπάρχει πληροφόρηση δηλ. αγορά.

Ένας τρόπος:
Δεχόμαστε ότι το επιτόκιο i_{t_0} την χρονική στιγμή t_0 είναι ανεξάρτητο του αρχικού κεφαλαίου K και της διάρκειας της πράξης T.
Δηλαδή όλες οι πράξεις που γίνονται στο t_0 έχουν αυτήν την σύμβαση. Δεν ισχύει πάντα!
(αν π.χ. το K είναι 10 εκατ. € το επιτόκιο είναι διαφορετικό από όταν K=1.000 €)

Θα δείξουμε ότι κάτω από κάποιες εύλογες βασικές παραδοχές καταλήγουμε στον τύπο απλού τόκου:

$$\boxed{I = i_{t_0} \cdot K \cdot T}$$

Παραδοχή 1
Για t_0, T σταθερά $I \sim K$

Δηλαδή: $$\boxed{\frac{I(K_1, t_0, T)}{I(K_2, t_0, T)} = \frac{K_1}{K_2} = \mu(t_0, T)}$$

Γιατί είναι εύλογη η παραδοχή;

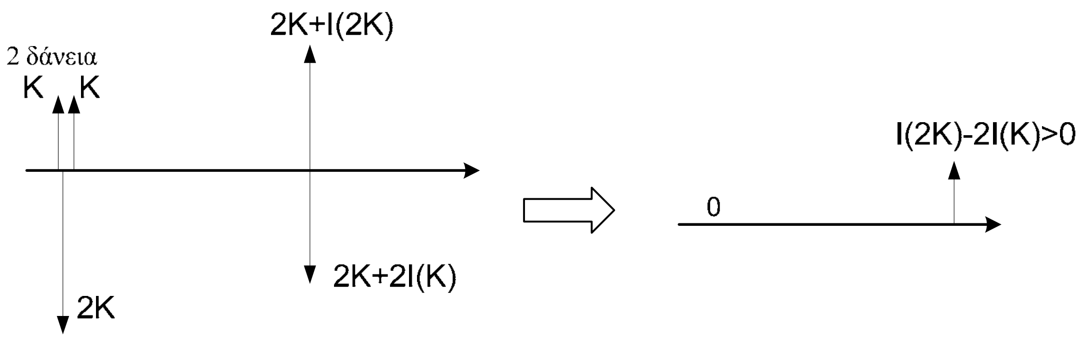
Εξετάζουμε $\mathrm{I}(\mathrm{K})$ και $\mathrm{I}(2\mathrm{K})$:

- Αν έχω $2\mathrm{K}$ και ισχύει ότι $\underline{2 \cdot \mathrm{I}(\mathrm{K}) > \mathrm{I}(2\mathrm{K})}$ τότε:

  με συμφέρει να επιμερίσω (κόστος επιμερισμού): 2 πράξεις αντί για μία.

- Αν $\underline{\mathrm{I}(2\mathrm{K}) > 2 \cdot \mathrm{I}(\mathrm{K})}$ τότε τι γίνεται;

  Μπορεί να ισχύσει. Αλλά, αν δάνειο = τοποθέτηση



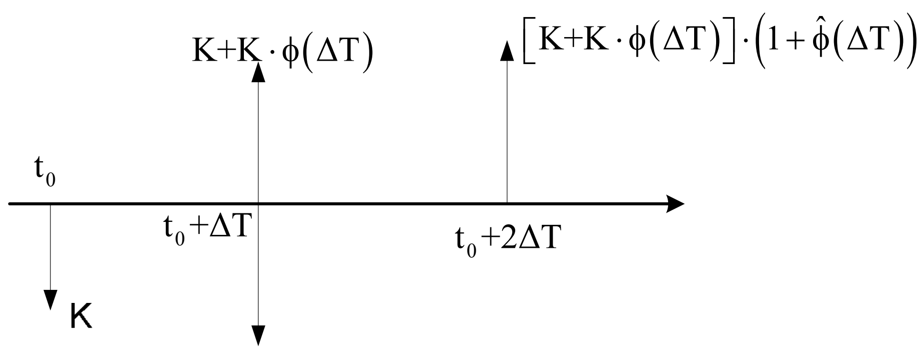
Δηλαδή υπάρχει Arbitrage!

Κόστη συγκέντρωσης ποσών.
Ποιος κερδίζει χρήματα έτσι; (οι τράπεζες!)

<u>Παραδοχή 2</u>
Για t_0, K σταθερά $\mathrm{I} \sim \mathrm{T}$
Δεν ισχύει για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Εξετάζουμε $\quad \mathrm{I}(t_0, \mathrm{K}, \Delta \mathrm{T}) = \mathrm{K} \cdot \phi(\Delta \mathrm{T})$
και το $\quad \mathrm{I}(t_0, \mathrm{K}, 2\Delta \mathrm{T}) = \mathrm{K} \cdot \phi(2\Delta \mathrm{T})$

- Έστω ότι ξεκινάμε με κεφάλαιο K και κάνουμε <u>διαδοχικές τοποθετήσεις</u>:



Όπου ο συντελεστής ϕ : ισχύει στο t_0

$\hat{\phi}$: ισχύει στο $t_0+\Delta T$

Το αποτέλεσμα στο τέλος είναι: $\left[K+K\cdot\phi(\Delta T)\right]\cdot\left(1+\hat{\phi}(\Delta T)\right)$

Αν $\underline{\phi(\Delta T)\cong\hat{\phi}(\Delta T)}$ (εφόσον είναι συντελεστές (επιτόκια) σε κοντινές χρονικές στιγμές), έχουμε τελικό αποτέλεσμα: $K\cdot\left[1+2\cdot\phi(\Delta T)+\phi^2(\Delta T)\right]$

Όμως ο όρος $\phi^2(\Delta T)$ είναι μικρός αν το ΔT είναι μικρό.

Άρα το αποτέλεσμα από τις διαδοχικές τοποθετήσεις είναι: $K\cdot\left[1+2\cdot\phi(\Delta T)\right]$.

- Η τοποθέτηση <u>για διάρκεια $2\Delta T$</u> δίνει τελικά: $K\cdot\left[1+\phi(2\Delta T)\right]$

Άρα προσεγγιστικά (και σύμφωνα με το επιχείρημα Arbitrage):

$$\phi(2\Delta T)\cong 2\cdot\phi(\Delta T)$$

Συνεπώς: $\dfrac{I(t_0,K,T_1)}{I(t_0,K,T_2)}=\dfrac{T_1}{T_2}$

<u>Πρόταση:</u>
Αν ισχύουν οι δύο παραδοχές, τότε:

$$\boxed{I(t_0,K,T)=i_{t_0}\cdot K\cdot T}$$

<u>Δικαιολόγηση:</u>
Σύμφωνα με τις δύο (εύλογες) παραδοχές έχουμε:

$$I=f(T)\cdot K\quad\left(=f(T,t_0)\cdot K\right)$$

$$I=g(K)\cdot T\quad\left(=g(K,t_0)\cdot T\right)$$

Δηλαδή:

$$f(T,t_0)\cdot K=g(K,t_0)\cdot T\quad\Rightarrow$$

$$\frac{f(T,t_0)}{T}=\frac{g(K,t_0)}{K}\quad\left(=i(t_0)\right)$$

Αλλά η συνάρτηση $i(t_0)$ είναι ανεξάρτητη των T και K.

Ονομάζεται επιτόκιο και εξαρτάται μόνον από την στιγμή t_0 της πράξης.

Τελικά έχουμε : $I=\underbrace{f(T,t_0)}_{T\cdot i(t_0)}\cdot K=i(t_0)\cdot K\cdot T$

□

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Μπορούμε τετριμμένα να γράψουμε:

  $$I\left(t,K,T\right) \equiv i\left(t,K,T\right) \cdot K \cdot T$$

  με ορισμό $i(t,K,T) = \dfrac{I(t,K,T)}{K \cdot T}$

  αλλά τότε πρέπει να προσδιορίσουμε το επιτόκιο συναρτήσει των T και K.

- Συνήθως το επιτόκιο είναι αναλογικό ως προς K για μεγάλο εύρος K οπότε:

  $$i(t,K,T) = \frac{\phi(T,t)K}{KT} = i(t,T)$$

  Άρα έχουμε επιτόκιο που εξαρτάται από διάρκεια. Πολύ σημαντικό όπως θα δούμε αργότερα.

1.3 Εφαρμογή τύπου απλού τόκου

$\mathrm{I} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{K} \cdot \mathrm{T}$

1.3.1 Θέμα χρόνου – διάρκειας

i= % / χρόνος (συνήθως σε έτος)

Παράδειγμα:
K =1 εκατ.€ i = 5%/έτος T = 1/2 έτους

I=0,05 / έτος · 1 εκατ.€ · 0.5 έτος = 0.025 εκατ.€

$\mathrm{S} = \mathrm{K} + \mathrm{I}$ = 1.025 εκατ.€

Είναι σωστό; Τι θα πει 1/2 έτους; 183 ή 182 μέρες; Θα μετρηθούν όλες οι μέρες;

Αλλό παράδειγμα:
T=3 μήνες i = 5%/έτος K =1 εκατ.€
I = 0.05/έτος · 1 εκατ. · 3/12 έτους=$\dfrac{0.05}{4}$ = 0.0125 εκατ.€
S=1.0125 εκατ.€

Είναι ΟΛΑ τα τρίμηνα ίδια;

Χειρότερα: αν T=1 μήνας
Τότε: I=0.05 · 1/12= 0.00417 εκατ.€
Αλλά όλοι οι μήνες ΔΕΝ είναι ίδιοι.

Τόκος ημέρας:
Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι το ίδιο για δίσεκτα και μη έτη;
Τότε το σωστότερο είναι ημερήσιο επιτόκιο, αλλά συμβατικά το έτος έχει μεγαλύτερη περιοδικότητα.
Άρα: τα πάντα είναι θέμα σύμβασης.

Θεωρήσεις έτους
Πολιτικό έτος – Αστρονομικό έτος (365 ή 366 ημέρες για δίσεκτα)
Εμπορικό έτος (360 ημέρες = 12 μήνες των 30 ημερών)

1. Σύμβαση ακριβούς υπολογισμού
Λέγεται και πολιτικός κανόνας
- Μόνο ημέρες
- Ακριβής μέτρηση ημερών (ημερολογιακά)
- Ακριβής μέτρηση έτους (πολιτικό έτος)

<u>2. Σύμβαση εμπορικού υπολογισμού</u>
Λέγεται και εμπορικός κανόνας.

- Εμπορικό έτος:1 έτος = 12 μήνες των 30 ημερών = 360 ημέρες
- Υπολογισμός ημερών σύμφωνα με την παραπάνω σύμβαση

π.χ. έστω, K=100 € , T= από 1/1/2005 έως 1/3/2005 και i= 12%

$$I=12\%\cdot 100\cdot\frac{2}{12}=2\ €$$

Με τον πολιτικό κανόνα θα ήταν: $I=12\%\cdot 100\cdot\frac{59}{365}=1.94\ €$

<u>Δυσκολία</u>: Υπολογισμός ημερών για συγκεκριμένες ημερομηνίες.

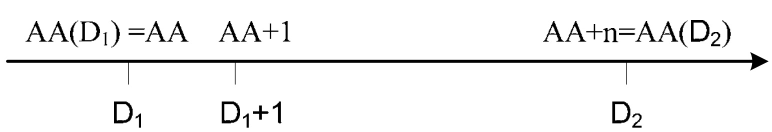
<u>3.Τραπεζική μέθοδος</u> (Banker's Rule)
Λέγεται και μικτός κανόνας.

- Ακριβής υπολογισμός ημερών (ημερολογιακά)
- Έτος με 360 ημέρες (εμπορικό έτος)

➢ Εφεξής θα χρησιμοποιούμε για απλούστευση τον <u>εμπορικό κανόνα</u>!

<u>Υπολογισμός ημερών (βλ. και ενότητα 1.5):</u>
Πόσες ημέρες μεσολάβησαν μεταξύ ημερομηνιών D_1 και D_2; Συμβατικά δεν μετράει η πρώτη ημέρα αλλά μετρά η τελευταία.

Έστω AA(D) ο αύξων αριθμός της ημέρας ως προς (σταθερή) βάση (βλ. διάγραμμα):



Είναι $AA(D_2) - AA(D_1) = n$

<u>Υλοποίηση σε Excel:</u> ενσωματωμένη συνάρτηση **Date (YR, MO, DAY)** επιστρέφει τον αύξοντα αριθμό της ημερομηνίας DAY/MO/YR με 1 την 1/1/1900

π.χ.

	A	B	C	D
1	1	3	1999	•
2	5	8	2003	•
3	Ημέρες που μεσολάβησαν			1618

=Date (C1;B1;A1)

=Date (C2;B2;A2)

=D2-D1

<u>Άσκηση:</u> Πώς γίνεται ο υπολογισμός των ημερών στον εμπορικό κανόνα στο Excel;

Εφαρμογή 1:
Τράπεζα Α χρησιμοποιεί την ακριβή μέθοδο (πολιτικός κανόνας) με επιτόκιο i_A, ενώ η τράπεζα Ε την τραπεζική μέθοδο (μικτός κανόνας) με επιτόκιο i_E. Ποια τράπεζα προτιμούν οι καταθέτες;

Είναι $I_A = i_A K \frac{d}{365}$ ενώ $I_E = i_E K \frac{d}{360}$

Για κατάθεση d ημερών (ίδια και στις δύο) ποσού Κ.

Για να προτιμάται η Α πρέπει:

$$I_A > I_E \Rightarrow i_A K \frac{d}{365} > i_E K \frac{d}{360} \Rightarrow i_A > i_E \left(1 + \frac{5}{360}\right) \cong i_E (1 + 1.5\%)$$

Άρα αν $i_E = 10\%$ η τράπεζα Α πρέπει να δώσει επιτόκια τουλάχιστον $10 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \cong 10,15\%$.

□

Εφαρμογή 2 (φορολόγηση τόκων):
Με την πληρωμή τόκων I, το δημόσιο παρακρατεί φόρο $\Phi = f \cdot I$ (f:σταθερός συντελεστής)

Άρα $I_{καθαρ.} = I - \Phi = (1 - f) \cdot I = (1 - f) i \cdot K \cdot T$

Ορίζοντας $i_{καθ.} = (1 - f) \cdot i$

Έχουμε $I_{καθαρ.} = i_{καθ.} \cdot K \cdot T$

Αν π.χ. $i = 5\%$ και $f = 15\%$, τότε:

$i_{καθ.} = (1 - 0.15) \cdot 5\% = 4.25\%$

□

1.3.2 Τύποι απλού τόκου

Τελική αξία:

$$S = K + I = K + iKT = K \cdot (1 + iT)$$

Λύνοντας τον παραπάνω έχουμε τον <u>τύπο αρχικής αξίας:</u>

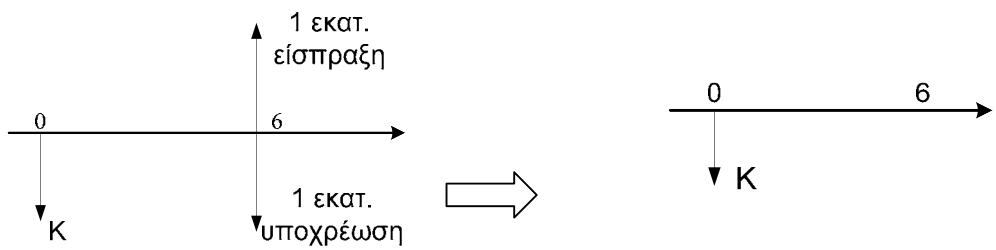
$\boxed{K = \frac{S}{1 + iT}}$ (γνωστός και ως τύπος αναγωγής σε παρούσα αξία)

καθώς και τον <u>τύπο απόδοσης πράξης</u>:

$$\boxed{i = \frac{1}{T} \cdot \frac{S - K}{K}}$$

<u>Αναγωγή σε παρούσα αξία:</u>
Χρήσιμη έννοια
Π.χ. έχω υποχρέωση 1 εκατ. € σε 6 μήνες. Μπορώ να τοποθετώ με απλό τόκο προς 10%. Τι ποσό χρειάζομαι <u>τώρα</u> για να αντιμετωπίσω την μελλοντική μου υποχρέωση;

Τοποθετώ ποσό K τέτοιο ώστε έντοκα να γίνει 1 εκατ. σε 6 μήνες.



Άρα μετέτρεψα την μελλοντική σε σημερινή υποχρέωση ύψους

$$K = \frac{1{,}000{,}000}{1 + 10\% \cdot \frac{6}{12}} = \frac{1{,}000{,}000}{1.05} = 952{,}381€ \quad (<1.000.000\ €)$$

Εξοικονομήσαμε περίπου τόκους 6 μηνών κεφαλαίου 1 εκατ. Για την ακρίβεια κάτι λιγότερο. Πόσο λιγότερο;

<u>Τύπος προσέγγισης:</u>

Εξετάζουμε την παράσταση $f(x) = \frac{1}{1+x} \quad |x| << 1$

Είναι $(1+x)\cdot(1-x) = 1 - x^2$

Διαιρώντας με $(1+x)$ και αναδιατάσσοντας:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \cong 1 - x \qquad \text{αφού } x^2 << |x| << 1$$

Επομένως, για $1 + x = 1 + iT \qquad \frac{1}{1+iT} \cong 1 - iT$

<u>Καλύτερη προσέγγιση:</u>

αντικαθιστούμε $\frac{1}{1+x}$ στο $\frac{x^2}{1+x}$ και έχουμε: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

γενικά: $\frac{1}{1+x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \cdot x^j \quad$ για $|x| < 1$.

1.4 Εφαρμογές Υφαίρεσης – τύπων αρχικής αξίας

1.4.1 Γραμμάτια δημοσίου – Zero Coupon Bonds

Είναι «τίτλος» χαρακτηριστικών:

- Ονομαστική αξία S
- Διάρκεια T
- Απόδοση i
- Τιμή διάθεσης $P = \dfrac{S}{1+iT}$

π.χ. γραμμάτιο 10 χιλ. € εξαμηνιαίο, απόδοση 5% τιμή διάθεσης;

$$P = \frac{10}{1+5\%\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{1+2.5\%} = 9.7561$$

Quotations: Δίνονται για $S = 100$ (θεωρούμε γραμμάτια ονομαστικής αξίας 100)

$$P = \frac{100}{1.025} = 97.561$$

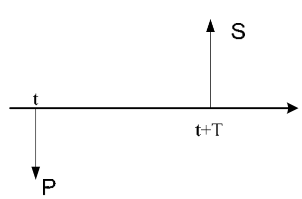
- Γρήγορος υπολογισμός

  Αν x μικρό τότε: $\dfrac{1}{1+x} \cong 1 - x$

<u>Δευτερογενής αγορά ομολόγων</u>
Στα ομόλογα ΔΕΝ υπάρχει εγγύηση για επαναγορά πριν τη λήξη τους. Έτσι έχει οργανωθεί αγορά αγοραπωλησιών για ομόλογα διαφόρων λήξεων (<u>δευτερογενής</u>).

Η απόδοση μιας πράξης αγοραπωλησίας θα εξαρτηθεί βέβαια από την τιμή πώλησής του στην δευτερογενή αγορά.

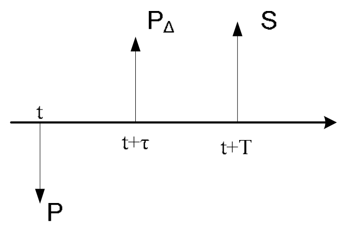
Στην αρχή του το γραμμάτιο έχει απόδοση απλού τόκου όσο και η ονομαστική του απόδοση:



<u>Γιατί;</u>

$$P = \frac{S}{1+iT} \quad \text{και άρα:} \quad i_{αποδ} = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{S}{P} - 1\right) = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{S}{\frac{S}{1+iT}} - 1\right) = i$$

Σε μεταπώληση αργότερα, ο υπολογισμός είναι:



Άρα: $\dot{i}_{\underset{t\to t+\tau}{\text{απόδοση}}} = \frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{P_\Delta}{P} - 1\right]$

Όπου P_Δ : τιμή πώλησης σε δευτερογενή.

Εφόσον $P = \frac{S}{1+iT}$ ο τύπος γράφεται: $\dot{i}_{\text{απόδ.}} = \frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{P_\Delta(1+iT)}{S} - 1\right]$

Αν τώρα ορίσουμε ένα $\widehat{i}$ τέτοιο ώστε $P_\Delta = \frac{S}{1+\widehat{i}(T-\tau)}$ ο τύπος γίνεται $\dot{i}_{\text{αποδ.}} = \frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{1+iT}{1+\widehat{i}(T-t)} - 1\right]$.

Στις οικονομικές στήλες αναφέρονται συχνά οι τιμές πωλήσεως γραμματίων διαφόρων λήξεων καθώς και τα επιτόκια που συνεπάγονται.

<u>Παράδειγμα:</u>
Την 1/12/03 τον εξής πίνακα τιμών ομολόγων Zero Coupon (Ονομαστική S=100)

1/12/03	
ΛΗΞΗ	ΤΙΜΗ
31/12/03	99.01
31/01/04	98.20
31/02/04	97.09
31/05/04	95.24

Αυτό συνεπάγεται τα εξής επιτόκια

ΔΙΑΡΚΕΙΑ (μήνες)	ΕΠΙΤΟΚΙΟ %
1	12
2	11
3	11.99
6	10

Εφαρμογή:

Ετήσιο γραμμάτιο απόδοσης 10% πωλείται μετά 3 μήνες προς 92,50. Αν ο επενδυτής μπορούσε να είχε τοποθετήσει τα χρήματά του σε τραπεζικό λογαριασμό ελεύθερης ανάληψης και επιτοκίου 8%, κέρδισε ή έχασε από την πράξη του γραμματίου;

Α' Λύση: (Εστιάζουμε στην κατάθεση)

Το γραμμάτιο αγοράστηκε προς $\frac{100}{1+10\% \cdot 1} = 90.909$. Αν τα χρήματα είχαν τοποθετηθεί στην κατάθεση, σε 3 μήνες θα είχαν γίνει $90.909\left(1+\frac{3}{12}8\%\right) = 92.727$ που είναι ανώτερο των 92.50 που εισπράξαμε από το γραμμάτιο.

Β' Λύση: (Εστιάζουμε στο γραμμάτιο)

Για το γραμμάτιο δώσαμε 90,909 και εισπράξαμε 92,50 σε 3 μήνες, έχοντας απόδοση $i = \frac{1}{\frac{3}{12}}\left(\frac{92.500}{90.909} - 1\right) = 7.00\%$ που είναι λιγότερο από ότι θα είχαμε από την τράπεζα (=8%).

□

Άλλη μορφή ίδιας άσκησης:

Σε 4 μήνες από αγορά ετήσιου γραμματίου απόδοσης 8% τα επιτόκια πέφτουν στο 4%. Αν ρευστοποιήσουμε το γραμμάτιο, τι απόδοση είχαμε στο τετράμηνο;

Τιμή αγοράς: $\frac{100}{1+8\%} = 92.593$

Τιμή πώλησης (Προσοχή!): $\frac{100}{1+4\%\frac{8}{12}} = 97.403$

Άρα η απόδοση είναι: $i_{αποδ.} = \frac{1}{\frac{4}{12}} \cdot \left(\frac{97.403}{92.593} - 1\right) = 15.584\%$

Αυτό δείχνει τα δυνητικά κέρδη (η ζημίες) από αλλαγές στα επιτόκια!

□

1.4.2 Προεξόφληση ιδιωτικών γραμματίων – εξωτερική προεξόφληση

Για λόγους απλούστευσης οι τράπεζες προεξοφλούν (αγοράζουν) γραμμάτια σε τιμή που προσδιορίζεται ως εξής:

Έστω γραμμάτιο που είναι υπόσχεση πληρωμής ποσού S μετά από χρόνο T.

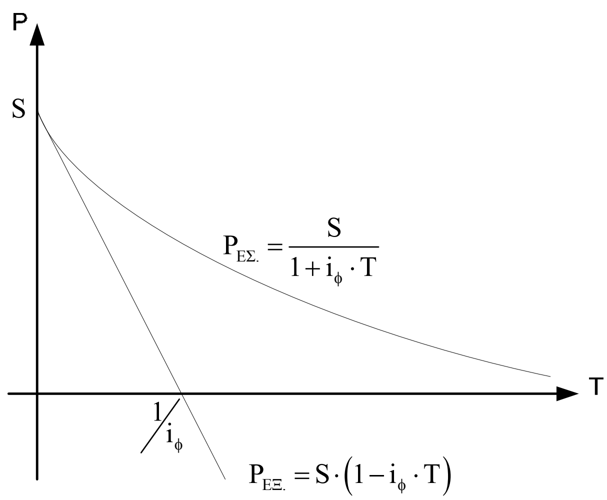
Ορίζεται από την τράπεζα Συντελεστής Προεξόφλησης i_ϕ και υπολογίζεται το Προεξόφλημα $E = i_\phi \cdot S \cdot T$. Το ποσό εξαγοράς του γραμματίου είναι $P = S - E$, δηλαδή:

$$P = S \cdot \left(1 - i_\phi \cdot T\right)$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Εξωτερική Προεξόφληση.

Για μικρά T ($i_\phi \cdot T$) ο τύπος δείχνει αντίστοιχα αποτελέσματα με τον $P \cong \dfrac{S}{1 + i_\phi \cdot T}$

Για μεγάλα T υπάρχει απόκλιση. (βλ. σχήμα)



Ισχύει πάντα $P_{ΕΞ.} \le P_{ΕΣ.}$ (Γιατί;)

Και ο τύπος $P_{ΕΞ.} = S \cdot \left(1 - i_\phi \cdot T\right)$ έχει νόημα μόνο για $T < \dfrac{1}{i_\phi}$.

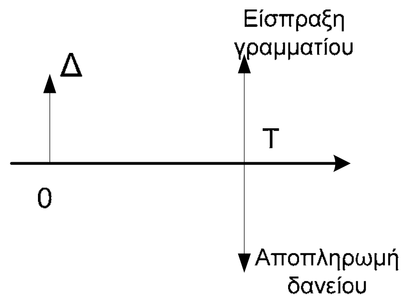
Ισοδυναμία Δανεισμού – Προεξόφλησης

Μια συνηθισμένη διαδικασία είναι μια τράπεζα να χορηγεί δάνεια με εγγύηση τα γραμμάτια. Αν το τελικό ποσό του γραμματίου είναι S σε χρόνο T και το επιτόκιο δανεισμού i_Δ, τότε η τράπεζα δανείζει ποσό τέτοιο ώστε η αποπληρωμή του δανείου να πραγματοποιείται με τα έσοδα του γραμματίου στο T.

Άρα το ποσό του δανείου Δ είναι τόσο ώστε:

$$\Delta \cdot \left(1 + i_\Delta \cdot T\right) = S \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{S}{1 + i_\Delta \cdot T}$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Εσωτερική Προεξόφληση.



Σε ορισμένες περιπτώσεις η τράπεζα δανείζει ποσό τέτοιο ώστε το S να υπερκαλύπτει (π.χ. κατά 50%) την αποπληρωμή τότε:

$$\Delta \cdot \left(1 + i_{\Delta} \cdot T\right) \cdot (1 + 50\%) = S$$

Και φυσικά: $\Delta = \dfrac{S}{1.5 \cdot \left(1 + i_{\Delta} \cdot T\right)}$.

Ερώτηση:

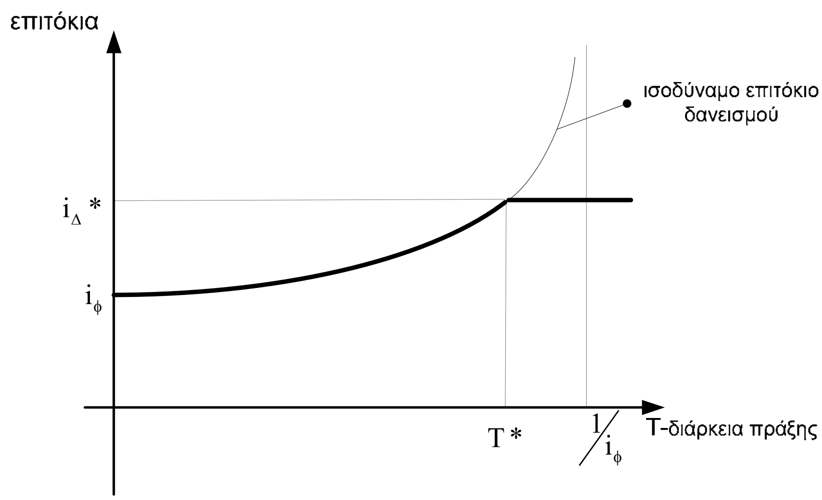
Ποιο επιτόκιο δανεισμού i_{Δ} και προεξόφλησης i_{ϕ} κάνουν αδιάφορη την απόφαση του επενδυτή μεταξύ δανεισμού (εσωτερικής) – προεξόφλησης (εξωτερικής);

Πρέπει: $\Delta = P \;\Rightarrow\; \dfrac{S}{1 + i_{\Delta} T} = S \cdot \left(1 - i_{\phi} T\right)$

ή $i_{\Delta} = \dfrac{1}{T} \cdot \left(\dfrac{1}{1 - i_{\phi} T} - 1 \right) = \dfrac{i_{\phi}}{1 - i_{\phi} T}$

και προτιμάται ο δανεισμός αν $i_{\Delta} < \dfrac{i_{\phi}}{1 - i_{\phi} T}$

Διαγραμματικά:



Αν η τράπεζα Ε προτείνει προεξόφληση με συντελεστή i_ϕ, ενώ μια άλλη τράπεζα Α προτείνει δανεισμό με επιτόκιο i_Δ *, προτιμάμε δανεισμό αν

$$i_\Delta^* < \frac{i_\phi}{1 - i_\phi T}$$

για δεδομένα $i_\Delta *, i_\phi$ αυτά εξισώνονται αν $T = T^* = \frac{1}{i_\phi} - \frac{1}{i_\Delta}$

Για γραμμάτια διάρκειας μικρότερης του T^* προτιμάμε προεξόφληση, διαφορετικά δανεισμό.

<u>Παράδειγμα:</u>
Γραμμάτιο 100 χιλ. €, διάρκειας 6 μηνών, προεξοφλείται με συντελεστή 20%. Σε σχέση με δανεισμό προς 23% πράξαμε καλά; Τι θα κάναμε αν είχαμε γραμμάτιο διάρκειας 8 μηνών; Αν το επιτόκιο δανεισμού ήταν 22%;

$$E = 100 \cdot 20\% \cdot \frac{1}{2} = 10 \qquad \text{άρα } P = 100 - 10 = 90$$

Ενώ $\Delta = \dfrac{100}{1 + 23\% \cdot \frac{1}{2}} = 89.7$, άρα καλά κάναμε.

Το ισοδύναμο επιτόκιο δανεισμού 6 μηνών είναι $i_\Delta = \dfrac{0.20}{1 - 0.20\frac{1}{2}} = 22.22\%$, οπότε επιτόκιο δανεισμού 22% θα ήταν προτιμότερο.

Εφόσον $T^* = \dfrac{1}{20\%} - \dfrac{1}{23\%} \cong 0.65$ ή 7.8 μήνες.
Προφανώς Τ=8 μήνες σημαίνει ότι πρέπει να προτιμήσουμε δανεισμό.
Όντως το ποσό δανεισμού είναι $\Delta = \dfrac{100}{1 + 23\%\frac{8}{12}} = 86.705$

ενώ η προεξόφληση δίνει $\Pi = 100\left(1 - 20\%\frac{8}{12}\right) = 86.667$

□

1.5 Λογαριασμοί απλού τόκου (αλληλόχρεοι τοκοφόροι λογαριασμοί)

Παραδοχές:

- Ελεύθερες καταθέσεις.
- Αναλήψεις μέχρι το υπόλοιπο, δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα προηγούμενων καταθέσεων, αναλήψεων – σε λογαριασμούς υπερανάληψης επιτρέπεται αρνητικό υπόλοιπο μέχρι ενός ορίου.

- Τοκοφορία: Οι τόκοι υπολογίζονται με συμφωνημένη μέθοδο αλλά ΔΕΝ αποδίδονται παρά μόνο σε συγκεκριμένες συμφωνημένες στιγμές. Αποδίδονται επίσης στο κλείσιμο λογαριασμού.

- Απλός τρόπος υπολογισμού τόκων (αρκετά κοντά στην πράξη).
  - Υπολογίζεται ημερήσιος απλός τόκος επί του υπολοίπου στην αρχή κάθε ημέρας.
  - Οι συνολικοί τόκοι μιας περιόδου [δηλαδή από την ημέρα απόδοσης τόκων μέχρι την επόμενη (ή την ημέρα κλεισίματος)] είναι το άθροισμα των τόκων των αντίστοιχων ημερών.

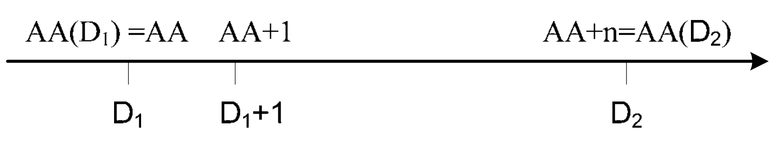
- Valeur: Η πρώτη τοκοφόρος ημέρα ενός ποσού που κατατίθεται (αποσύρεται).
  - Για καταθέσεις μετρητών Valeur είναι η πρώτη επόμενη εργάσιμος. Για αναλήψεις είναι η ίδια ημέρα.

1.5.1 Υπολογισμός τοκοφόρων ημερών απλής πράξης

Έστω ότι γίνεται κατάθεση την ημερομηνία D_1 και ανάληψη και κλείσιμο την επόμενη ημερομηνία D_2.
Εάν χρησιμοποιούμε τον μικτό ή τον πολιτικό κανόνα ο υπολογισμός τοκοφόρων ημερών συνιστά ένα σημαντικό πρακτικό πρόβλημα.

Λύνεται ως εξής:
Θεωρούμε ότι υπάρχει καταγεγραμμένη μια συνάρτηση (σε υπολογιστή ή σε πίνακα) που δίνει για ημερομηνία D τον αύξοντα αριθμό της σε σχέση με πάγια ημερομηνία D_0.
Συμβολίζουμε την συνάρτηση με AA(D).
Είναι $AA(D_0)=1$ εξ' ορισμού.
Συνήθως στα υπολ. Συστήματα (Excel) D_0=1/1/1900
οπότε: AA(2/1/1900)=2 AA(1/2/1900)=32

Οι ημέρες μεταξύ D_1 και D_2 είναι προφανώς ίσες με $AA(D_2)-AA(D_1)$ χωρίς να μετράμε την ημέρα D_1.



τοκοφόρες = $AA(D_2)-AA(D_1)$
Φυσικά η συμβατική D_0 δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα:

Στο Excel η συνάρτηση αυτή είναι η Date (Year, Month, Day)
π.χ. Date (1900; 1; 1) = 1
Date (2000; 5; 3) = 36649
Date (2000; 10; 15) = 368141
Άρα από 3/5/2000 έως 15/10/2000 μεσολάβησαν 36814 – 36649 = 165 ημέρες

Παλαιότερα οι υπολογισμοί γίνονταν με βάση τον πίνακα ημερών της, όπου δίνεται ο αύξων αριθμός κάθε ημέρας ενός έτους. Έτσι η 3/5/2000 είναι η $123^{η}$ ημέρα ενώ η 15/10/2000 είναι η $288^{η}$ ημέρα, οπότε οι ημέρες που μεσολάβησαν ήταν 288 – 123 = 165

Πίνακας Ημερών (για ΜΗ δίσεκτο έτος - αν το έτος είναι δίσεκτο θα προσθέσουμε 1 επιπλέον ημέρα)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

1.5.2 Υπολογισμός τόκου

Αν ένα ποσό (υπόλοιπο) μείνει σταθερό d ημέρες, θα έχει τόκους ίσους με $\frac{i \cdot K \cdot d}{360}$ που είναι και το άθροισμα ημερήσιων τόκων $\frac{i \cdot K \cdot 1}{360}$ για d ημέρες.

Για τραπεζικούς λογαριασμούς ο τύπος γράφεται πολλές φορές ως $\frac{K \cdot d}{\left(\frac{360}{i}\right)}$.

- Ο όρος $K \cdot d$ ονομάζεται <u>τοκάριθμος</u>.
- Ο όρος $D = \left(\frac{360}{i}\right)$ ονομάζεται <u>διαιρέτης</u>.

<u>Παράδειγμα:</u>
$K = 1000€$, $d = 10$ ημέρες $i = 3\%$

Τοκάριθμος = 10.000
Διαιρέτης $= \frac{360}{0.03} = 12{,}000$
άρα ο τόκος είναι: $\frac{10{,}000}{12{,}000} = 0.667$

□

Αν ένας λογαριασμός είχε υπόλοιπα K_j για d_j ημέρες, ο συνολικός τόκος θα ήταν

$$I = \frac{\left(\sum_{j=1}^{M} K_j d_j\right)}{D}$$

, δηλαδή το άθροισμα των τοκάριθμων δια τον διαιρέτη.

<u>Παράδειγμα Υπολογισμού Λογαριασμού:</u>

Έστω βιβλιάριο με τις εξής κινήσεις:

Ημερομηνία	Κίνηση	Υπόλοιπο	Ημέρες	Τοκάριθμος
1/1	100	100	30	3.000
31/1	100	200	15	3.000
15/2	-50	150	30	4.500
17/3	-50	100	60	6.000
16/5	150	250	45	11.250
30/6	Τόκοι;			

Αν ο λογαριασμός ανοίγει την 1/1 και οι τόκοι υπολογίζονται στις 30/6 ποιο είναι το ύψος των τόκων από 1/1 έως 30/6; Επιτόκιο 5%.

- Σε ένα βιβλιάριο αναφέρονται οι κινήσεις, οι ημερομηνίες και το υπόλοιπο. Οι τοκοφόρες ημέρες και οι τοκάριθμοι είναι εσωτερικοί υπολογισμοί της τράπεζας.
- Το άθροισμα των τοκάριθμων είναι 27.750 ενώ ο διαιρέτης $D = \frac{360}{0.05} = 7200$ άρα $I = \frac{27,750}{7,200} = 3.854$.
- Αν το επιτόκιο ήταν 5% μέχρι τις 17/3 και 10% εφεξής, οι υπολογισμοί θα ήταν προφανώς οι εξής: $D_{5\%} = 7200$ και $D_{10\%} = 3600$ ενώ από τους τοκάριθμους, 10.500 ήταν πριν τις 17/3 και οι υπόλοιποι (27.750-10.500)=17.250 μετά την 17/3. Άρα $I = \frac{10,500}{7,200} + \frac{17,250}{3,600} = 6.25$.
- Αντίστοιχη τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί σε λογαριασμούς υπερανάληψης (overdraft), όπου οι αρνητικοί τοκάριθμοι αντιστοιχούν σε διαφορετικό επιτόκιο (δανεισμού).

Παράδειγμα:
Ένας λογαριασμός έχει επιτόκιο κατάθεσης 5% και υπερανάληψης 10%. Ποιοι είναι οι τόκοι στις παρακάτω κινήσεις; (Ημερομηνία Τοκοφορίας 30/6).

Ημερομηνία	**Κίνηση**	**Υπόλοιπο**	**Ημέρες**	**Τοκάριθμοι**
1/1	100	100	60	6.000
1/3	-200	-100	60	-6.000
1/5	200	100	60	6.000
30/6	Τόκοι;			

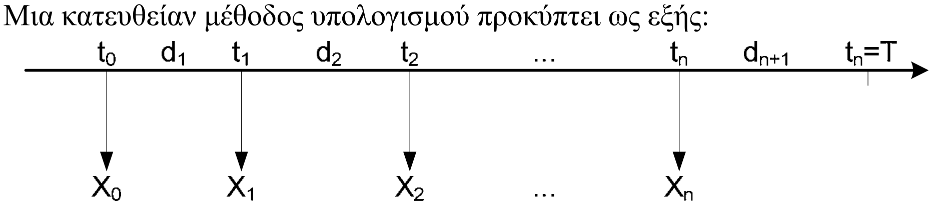
Είναι: $D_{5\%} = 7200$ και $D_{10\%} = 3600$
Θετικοί τοκάριθμοι: 12000, Αρνητικοί τοκάριθμοι: -6000

$$I = \frac{12000}{7200} - \frac{6000}{3600} = 0$$ μηδενικοί τόκοι!

□

Η παραπάνω μέθοδος (η οποία είναι γνωστή ως Αμβουργική Μέθοδος) δεν εκφράζει τόκους κατευθείαν από κινήσεις, αλλά είναι ιδιαίτερα εύχρηστη, καθώς προσαρμόζεται σε αλλαγές επιτοκίων, αρνητικούς τοκάριθμους κ.λ.π.

Μια κατευθείαν μέθοδος υπολογισμού προκύπτει ως εξής:



Υπολογισμοί Τόκων στο $t_{n+1} = T$:

Τοκάριθμοι: $X_0 d_1 + (X_0 + X_1) d_2 + (X_0 + X_1 + X_2) d_3 + \ldots =$

Υπόλοιπο στο t_0 Υπόλοιπο στο t_1 Υπόλοιπο στο t_2

$$= X_0\left(d_1 + \ldots + d_{n+1}\right) + X_1\left(d_2 + \ldots + d_{n+1}\right) + \ldots + X_n d_{n+1} =$$
$$= X_0\left(T - t_0\right) + X_1\left(T - t_1\right) + \ldots + X_k\left(T - t_k\right) + \ldots + X_n\left(T - t_n\right)$$

και οι τόκοι είναι (θεωρώντας ότι ο χρόνος είναι σε έτη): $I = \sum_{j=0}^{n} i \cdot X_j \cdot (T - t_j)$

Εφόσον το κεφάλαιο είναι απλώς $K = \sum_{j=0}^{n} X_j$, το κεφάλαιο συν τους τόκους είναι:

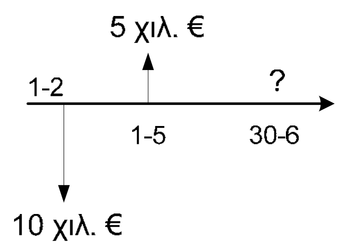
$$\boxed{S = I + K = \sum_{j=0}^{n} X_j \cdot \left[1 + i \cdot \left(T - t_j\right)\right]}$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται <u>Ευθεία Μέθοδος</u>.

Ερμηνεία του τύπου: Κάθε ποσό X_j που προκύπτει στον χρόνο t_j τοκίζεται με απλό τόκο μέχρι τον χρόνο υπολογισμού T, και τα τοκισμένα ποσά αθροίζονται.

1.5.3 Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 1:</u>
Καταθέτω την 1/2/03 10000€ και κάνω ανάληψη 5000€ την 1/5/03. Τι ποσό τόκων θα εισπράξω την 30/6;. Επιτόκιο 10%, άνοιγμα λογαριασμών την 1/2/03, εμπορικό έτος.



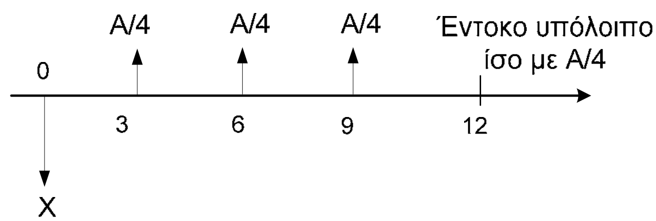
$$S_{30/6} = 10\left(1 + \frac{5}{12} \cdot 10\%\right) - 5\left(1 + \frac{2}{12} \cdot 10\%\right) = 5.333 \text{ χιλ. €}$$

<u>Εναλλακτικά</u> (Αμβουργική Μέθοδος), το υπόλοιπο των 10000€ για 3 μήνες αποδίδει τόκο $10 \cdot 0.10 \cdot \frac{3}{12} = 0.25$ χιλ. €, ενώ το υπόλοιπο των 5000 τόκους $5 \cdot 0.10 \cdot \frac{2}{12} = 0.083$ χιλ. €, δηλαδή συνολικά 0.250+0.083=0.333

Εφαρμογή 2:
Μια οφειλή ύψους A στην εφορία μπορεί να εξοφληθεί αμέσως οπότε θα δοθεί έκπτωση 6%. Αν δεν εξοφληθεί αμέσως, γίνεται διακανονισμός για πληρωμή σε 4 ίσες τριμηνιαίες δόσεις χωρίς έκπτωση. Τι συμφέρει να κάνουμε αν η εναλλακτική χρήση κεφαλαίου είναι λογαριασμός απλού τόκου με επιτόκιο i=12%, πρώτη δόση μετά από 3 μήνες.

Έστω ότι τοποθετούμε ποσό X στον λογαριασμό έτσι ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε αναλήψεις ισόποσες με τις δόσεις που οφείλουμε στον διακανονισμό. Αν το X είναι μικρότερο από το ποσό που θα πληρώσουμε με άμεση εξόφληση τότε συμφέρει η πληρωμή με δόσεις.

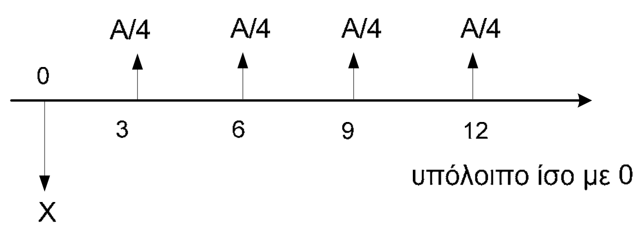
Για να υπολογίσουμε το X θεωρούμε λογαριασμό που θα έχει (έντοκο) υπόλοιπο στο κλείσιμο ίσο με την τελευταία δόση.



άρα

$$\text{Υπολ}_{\text{στο 12}} = X\left(1+12\%\cdot\frac{12}{12}\right)-\frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{9}{12}\right)-\frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{6}{12}\right)-\frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{3}{12}\right)=\frac{A}{4}$$

Εναλλακτικά: (όχι απόλυτα σωστά, γιατί[1];)
Θα μπορούσαμε να θέσουμε την συνθήκη το υπόλοιπο στο κλείσιμο να είναι μηδενικό, αφού γίνει και η τελευταία ανάληψη A/4 στο χρόνο 12.



Η εξίσωση που θα προκύψει είναι η ίδια.
Λύνοντας την σχέση παραπάνω έχουμε:

$$1.12\cdot X=\frac{A}{4}\left[4+\frac{12\%}{12}(9+6+3+0)\right]$$

[1] Δεν είναι απόλυτα σωστό γιατί πρώτα κλείνει ο λογαριασμός και μετά προσμετρώνται οι τόκοι. Βέβαια αυτή είναι λεπτομέρεια καθώς το ποσό είσπραξης – τόκων + υπολοίπου είναι το ίδιο.

$$X = A\frac{1}{1.12}\cdot\frac{1}{4}\left(4+12\%\cdot\frac{18}{12}\right)$$
$$X = 93.3\%\cdot A$$

άρα αφού η άμεση εξόφληση απαιτεί 100-6% του Α ή 94%Α, συμφέρει η εξόφληση με δόσεις και η εκμετάλλευση του ποσού άμεσης πληρωμής.

□

Εναλλακτική λύση:

Αν είχα τοποθετήσει το 94% του Α (0.94 Α) σε λογαριασμό και έκανα 3 αναλήψεις ύψους $\frac{A}{4}$ ανά τρίμηνο, το έντοκο υπόλοιπο θα είναι στον μήνα 12:

$$S_{12} = 0.94A(1+12\%) - 0.25A\left(1+12\%\cdot\frac{9}{12}\right) - 0.25A\left(1+12\%\cdot\frac{6}{12}\right) - 0.25A\left(1+12\%\cdot\frac{3}{12}\right)$$
$$= A\left[0.94\cdot 1.12 - 0.25(1.09+1.06+1.03)\right] = 0.2578A$$

Από το υπόλοιπο, πληρώνω την τελευταία δόση ύψους $0.25A$ και μου περισσεύουν χρήματα $0.0078A > 0$. Άρα συμφέρει η χρησιμοποίηση των χρημάτων σε εναλλακτικές τοποθετήσεις.

□

Εφαρμογή 3:
(Παράδοξο ενός – πολλών λογαριασμών)

Οφείλω 10 εκατ. € σε 6 μήνες και 5 εκατ. € σε 12 μήνες από τώρα. Σκοπεύω να καλύψω τις υποχρεώσεις με σημερινή τοποθέτηση σε λογαριασμό απλού τόκου i=24%. Τι ποσό χρειάζομαι;

Αν τοποθετήσω τώρα ποσό Χ και κάνω ανάληψη 10 εκατ. € μετά από 6 μήνες, θέλω το έντοκο υπόλοιπο στο κλείσιμο του λογαριασμού να είναι 5, δηλαδή:
$S_{12} = X\cdot 1.24 - 10\cdot 1.12 = 5$ εκατ.€
Άρα $X = 13.065$ εκατ.€

Αλλά αν είχα ανοίξει ένα λογαριασμό για να καλύψω τα 10 εκατ.€ θα χρειαζόταν ποσό X_1 με $X_1\cdot 1.12 = 10$ (Γιατί;), δηλαδή $X_1 = 8.929$ εκατ.€
Αντίστοιχα για τα 5 εκατ.€, ποσό X_2 τέτοιο ώστε $X_2\cdot 1.24 = 5 \Rightarrow X_2 = 4.032$ εκατ.€
Συνολικά δηλαδή θα πρέπει να τοποθετήσω και στους δύο λογαριασμούς:
$X_1 + X_2 = 12.961$ εκατ.€ δηλαδή λιγότερο κατά 104 χιλ.€ από την πρώτη περίπτωση (ενός ενιαίου λογαριασμού)!

<u>Ερμηνεία:</u> Οι πολλοί λογαριασμοί μας συμφέρουν πιο πολύ, καθώς έχουμε ταχύτερη είσπραξη τόκων (μην ξεχνάτε ότι η είσπραξη των τόκων γίνεται ΜΟΝΟ με το κλείσιμο ενός λογαριασμού!). Αλλά υπάρχουν και μειονεκτήματα. Ποια;

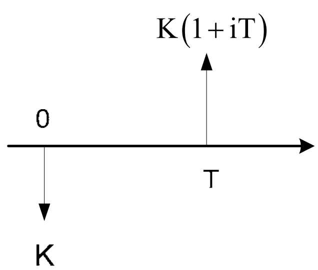
□

1.6 Ιδανικό ταμιευτήριο - Συνεχής ανατοκισμός

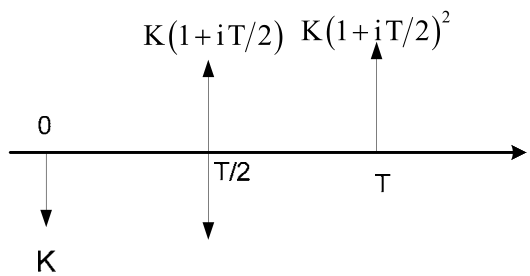
1.6.1 Ιδανικό ταμιευτήριο

Ιδανικό Ταμιευτήριο: Μας επιτρέπει να κλείσουμε ένα λογαριασμό κατά βούληση και να εισπράξουμε όλους τους αναλογούντες τόκους. Στην πράξη κάθε κλείσιμο έχει κόστος (διαδικαστικό) αλλά καμιά φορά και επιβαρύνσεις.

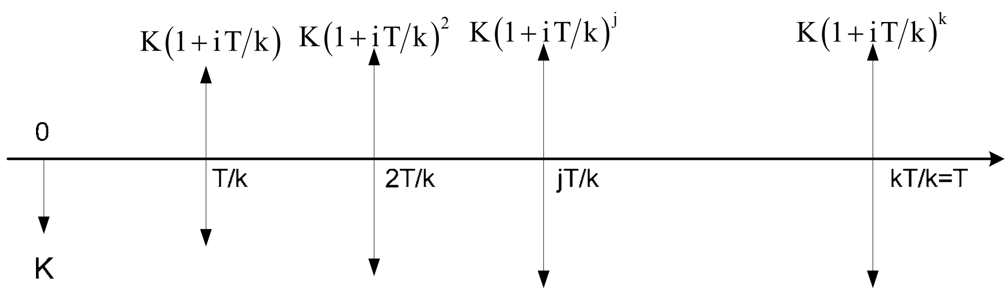
Σε ιδανικό ταμιευτήριο με επιτόκιο απλού τόκου i έστω ότι χειριζόμαστε κεφάλαιο K για χρόνο T. Έστω ότι κάνουμε χρονικά ισαπέχουσες κινήσεις όπως φαίνονται στα διαγράμματα.



1 κίνηση



2 κινήσεις



k κινήσεις

Με μια κίνηση, το τελικό υπόλοιπο είναι: $S^1(T) = K\left(1+i\dfrac{T}{1}\right)^1$

Με δύο κινήσεις: $S^2(T) = K\left(1+i\dfrac{T}{2}\right)^2$

Με k κινήσεις: $S^k(T) = K\left(1+i\dfrac{T}{k}\right)^k$

Η συνάρτηση $S^k(T)$ για σταθερά K, T, i είναι ακολουθία ως προς τους ακέραιους $k = 1, 2, \dots$

Αποδεικνύεται ότι:

- Η ακολουθία $S^k \left[= S^k(T)\right]$ είναι αύξουσα.

Προφανώς: $S^2 = K\left(1 + iT + \frac{i^2T^2}{4}\right) > S^1 = K(i + iT)$

Και $S^{2k} > S^k$. Γενικά η απόδειξη είναι δύσκολη.

- Η ακολουθία S^k είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει αριθμός μ με $\mu > S^k \ \forall k$.

Και αυτή η απόδειξη είναι δύσκολη.

Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{k \to \infty} S^k$

Που σημαίνει ότι δεν απειρίζεται το κέρδος με αυξανόμενη συχνότητα κινήσεων.

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα:</u>

Για $K = 100$, $T = 1$, $i = 20\%$ έχουμε:

k	S^k
0	100.00
1	120.00
2	121.00
4	121.55
10	121.90
100	122.12
1000	122.14
∞	122.14

□

Από την άλγεβρα: το όριο της ακολουθίας $S^k = K\left(1 + \frac{iT}{k}\right)^k$ ανάγεται στη μελέτη του ορίου της γενικής ακολουθίας $q_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ που είναι αύξουσα και φραγμένη.

Πρόταση

Υπάρχει αριθμός e τέτοιος, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Απόδειξη:

Θέτουμε $m = \frac{n}{x}$ (όχι ακέραιος απαραίτητα)

Οπότε: $q_n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x$

Αν αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$

Τότε θα είναι: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x = \left[\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x = e^x$

(χρησιμοποιούμε ιδιότητες ορίων).

□

Υπολογισμός του e:

Από το διωνυμικό θεώρημα

$$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j \text{ όπου } \binom{m}{j} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-j+1)}{j!}$$

Άρα: $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum\limits_{j=o}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!\underbrace{m\ldots\ mm}_{\text{j φορές}}} =$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{m}\right) \qquad \text{για } m\to\infty \quad \text{ο j-όρος γίνεται } \frac{1}{j!}$$

Άρα «εκτιμούμε» ότι:

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{j=\infty}^{\infty}\frac{1}{j!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}}_{2.7186}+\ldots$$

για πολλούς όρους: $e = 2.718281828\ldots$

με τον ίδιο τρόπο συνάγεται ότι:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_{j=\infty}^{\infty}\frac{x^j}{j!} = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$

έτσι: $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0.2}{m}\right)^m = 1+0.2+\frac{0.2^2}{2}+\frac{0.2^3}{6}+\frac{0.2^4}{24}+\ldots \cong 1.2214$

Εναλλακτικά αυτό υπολογίζεται και ως:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0.2}{m}\right)^m = e^{0.2} = 1.2214$$

1.6.2 Συνεχής Ανατοκισμός

Ονομάζουμε Συνεχή Ανατοκισμό μια διαδικασία τοποθέτησης που αποδίδει για χρόνο T, κεφάλαιο K και παράμετρο επιτοκίου συνεχούς ανατοκισμού i, ποσό:

$$\boxed{S = K\cdot e^{iT}}$$

Θεωρητικά, προκύπτει από εκμετάλλευση ιδανικού ταμιευτηρίου.

Εφαρμογή 1:
Μια τράπεζα δίνει επιτόκιο απλού τόκου 10%. Αν κάνουμε κλείσιμο σε χρόνο λιγότερο από εξάμηνο το επιτόκιο μειώνεται στο 9%. Τι συμφέρει αν θέλω να τοποθετήσω κεφάλαια για (α): 1 εξάμηνο (β): 1 έτος (γ): 1.5 έτος

(α) για ένα εξάμηνο, μια κίνηση η απόδοση είναι 5%. Αν όμως κάνουμε πολύ συχνές κινήσεις θα έχουμε ποσό $K\left(1+9\%\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^n$ για n μεγάλο ή $K\cdot e^{0.09\cdot\frac{1}{2}} = K\cdot 1.0460$ δηλαδή απόδοση 4.6% (λιγότερη από 5%).

(β) για 1 έτος η αξία είναι $K\left(1+\frac{0.09}{n}\right)^n$

ή $K\cdot e^{0.09} = K\cdot 1.0942$ απόδοση πάλι μικρότερη από 10%.

(γ) Αν εξετάζαμε περίοδο 1.5 ετών η απόδοση στον απλό τόκο θα ήταν 15%, ενώ με συνεχή κεφαλαιοποίηση η τελική αξία θα είναι $K\cdot e^{0.09\cdot 1.5} = 1.144\cdot K$ και απόδοση 14.4%.

□

Εφαρμογή 2:
Αν η επιβάρυνση για κάθε κλείσιμο ήταν 0.10%, αναλύστε λογαριασμό απλού τόκου με επιτόκιο i=10%.

Για n κινήσεις σε χρόνο T το τελικό ποσό είναι $K\left[1+\frac{iT}{n}-0.1\%\right]^n$

Για n μεγάλο ο όρος $1+\frac{iT}{n}-0.1\%$ είναι μικρότερος του 1 και γίνεται τελικά 0.999^n που τείνει στο 0.

Ενδεικτικά για i=10% και T=1 έχουμε:

n	Απόδοση	n	Απόδοση
1	9.9%	4	9.95%
2	10.04%	5	9.87%
3	10.02%		

Βέλτιστο για n=2.

Βλέπουμε λοιπόν ότι και η παραμικρή επιβάρυνση κλεισίματος καθιστά ασύμφορες τις πολλές πράξεις.