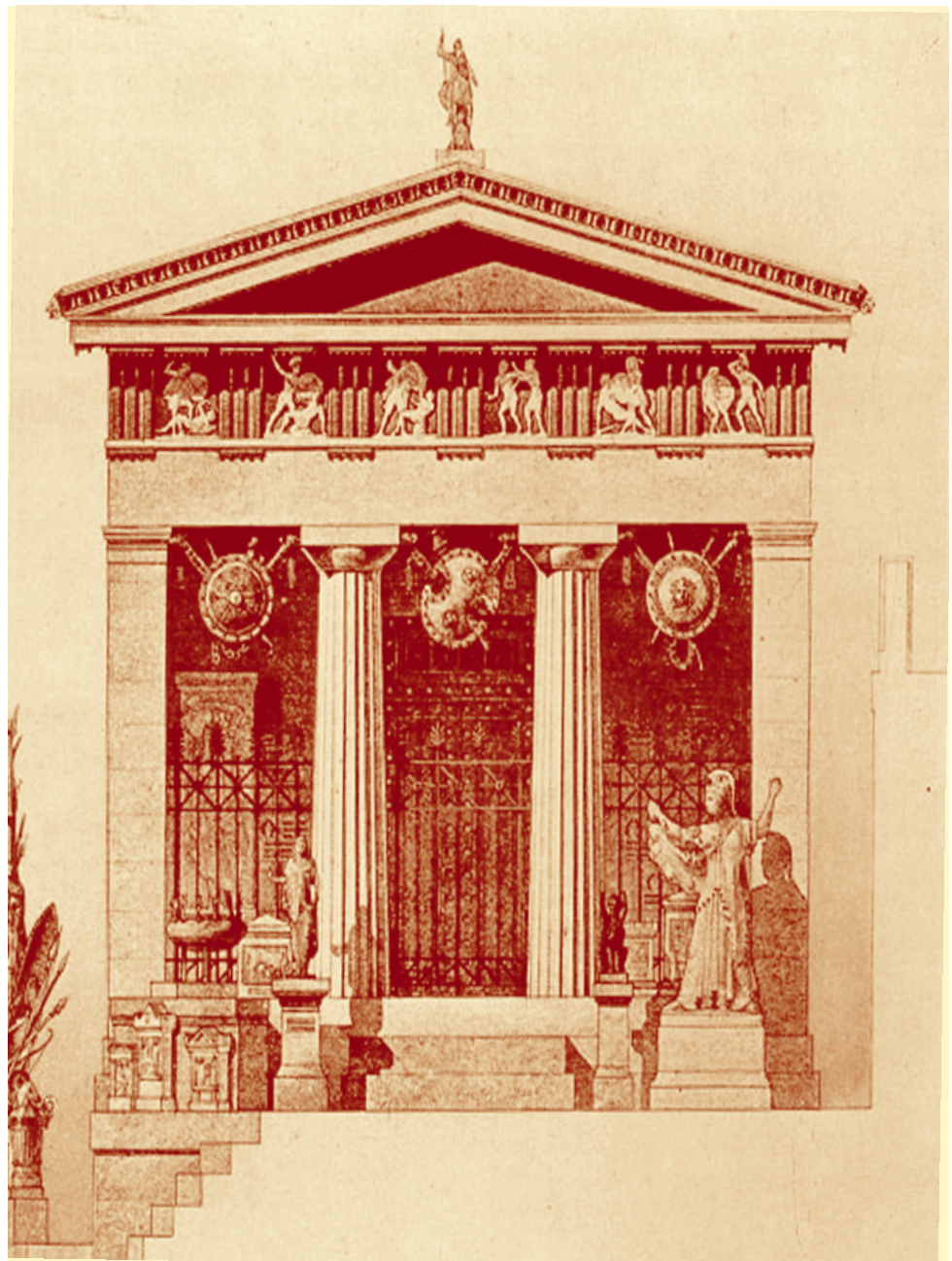


Τρίγωνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσοκάθετου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσοκάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.



Ο Θησαυρός των Αθηναίων στους Δελφούς, 508 π.Χ.
Αναπαράσταση Α. Tournaire

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές A, B, Γ , τρεις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ και τρεις γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}, \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$. Για ευκολία οι πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}, \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$ με \hat{A}, \hat{B} και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ . Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

- **σκαληνό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- **ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά $B\Gamma$ λέγεται **βάση** του και το A **κορυφή** του,
- **ισόπλευρο**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

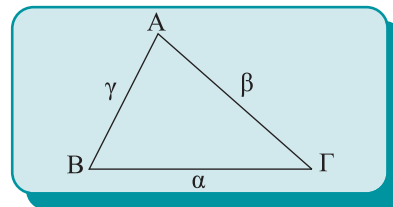
Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- **οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- **ορθογώνιο**, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου,
- **αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

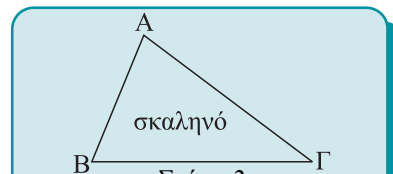
• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου $AB\Gamma$ και συμβολίζεται με μ_α . Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

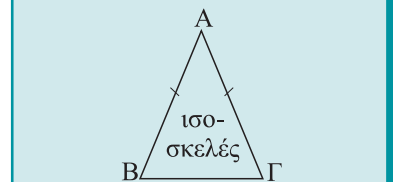
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα AD είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α . Οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



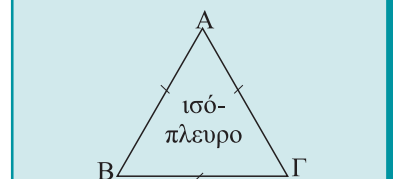
Σχήμα 1



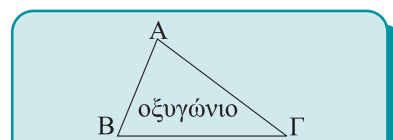
Σχήμα 2



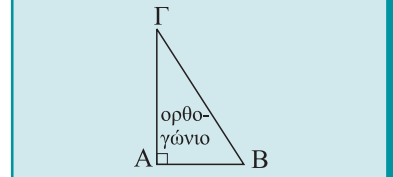
Σχήμα 3



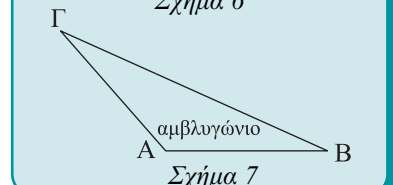
Σχήμα 4



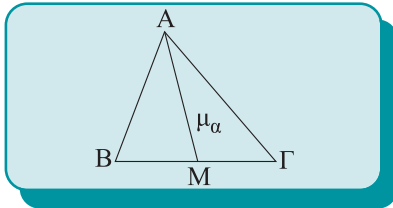
Σχήμα 5



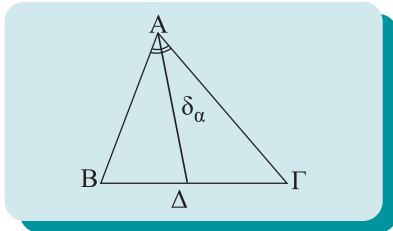
Σχήμα 6



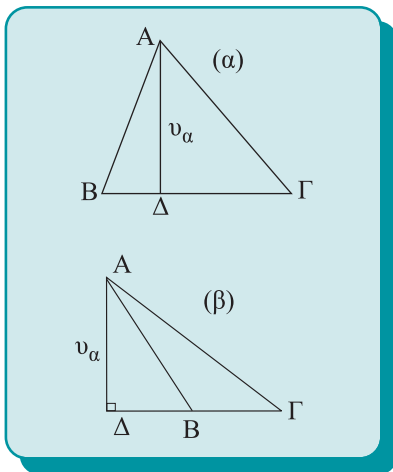
Σχήμα 7



Σχήμα 8



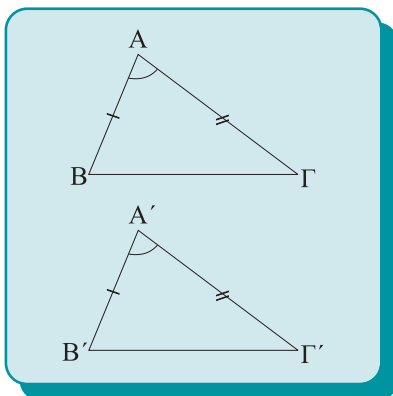
Σχήμα 9



Σχήμα 10

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.



Σχήμα 11

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με v_a , v_b και v_c .

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται **προβολή** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και **ίχνος** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $AB = A'B'$, $AG = A'G'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α'Β'Γ', ώστε το σημείο Α' να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α'Β' να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α'Γ' θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού $AB = A'B'$ και $AG = A'G'$, το σημείο Β' ταυτίζεται με το Β και το Γ' με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

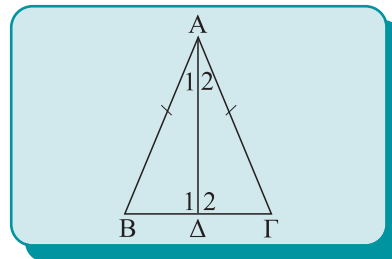
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ (σχ.12). Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν $AB = AG$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

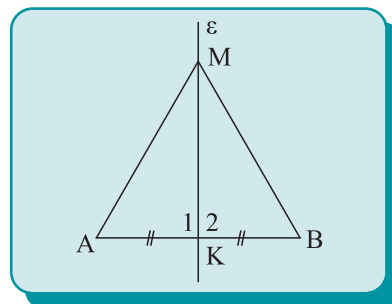
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB (σχ.13) και M ένα σημείο της. Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν $KA=KB$, MK κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $MA = MB$.



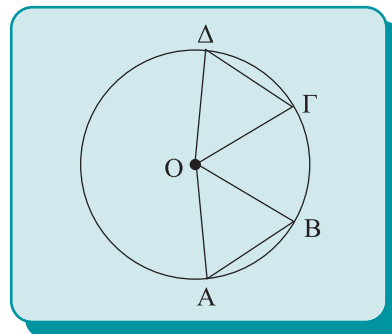
Σχήμα 13

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) (σχ.14). Τότε είναι $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.



Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB , η μεσοκάθετός του ε και σημείο M της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των AM και BM προς το M παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ , ώστε $M\Gamma = M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

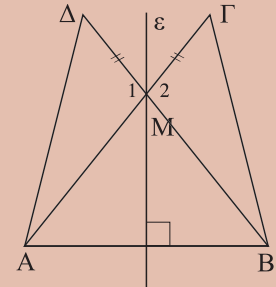
(i) $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{M}\hat{B}\hat{A}$,

(ii) $A\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(i) Επειδή το M είναι σημείο της μεσοκάθετου ε του AB είναι $MA = MB$, επομένως το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{M}\hat{B}\hat{A}$.

(ii) Τα τρίγωνα $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ έχουν $MA = MB$, $M\Gamma = M\Delta$ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $A\Delta = B\Gamma$.



Σχήμα 15

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εξωτερικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$, ώστε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{A}\hat{E}$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.
2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAM είναι ισόπλευρο.
3. Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.
4. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της \hat{A} στην οποία θεωρούμε τμήματα $AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των $AK, BK, \Gamma K$ θεωρήσουμε τμήματα $K\Delta = AK, KE = BK, KZ = \Gamma K$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\hat{\Gamma}$.
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του $BA, \Gamma A$ θεωρούμε ίσα τμήματα $A\Delta, AE$ αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.



3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Με τη βοήθεια του 1^{ου} κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2^ο και 3^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.16) έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και $AB = A'B'$. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην AB , ώστε να είναι $B\Delta = B'A'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}'$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$, άρα $AB = A'B'$. Τα τρίγωνα, λοιπόν, $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $AB = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.

* Σημείωση: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα I (σελ. 36).

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

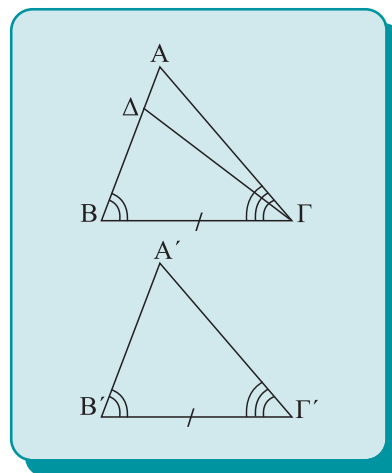
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Gamma A = \Gamma'A'$ (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.

Θεωρούμε την ημιευθεία Bx , ώστε $\hat{B}\hat{\Gamma}x = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = A'B'$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'A'$ και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.

ΣΧΟΛΙΟ

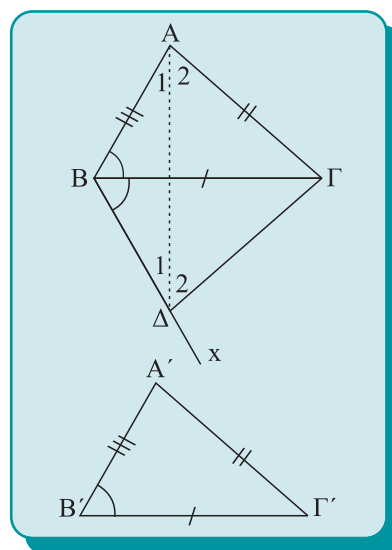
Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.



Σχήμα 16

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.



Σχήμα 17

Επειδή $BD = A'B'$ και $A'B' = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού $\Gamma\Delta = A'\Gamma'$ και $A'\Gamma' = A\Gamma$, προκύπτει ότι

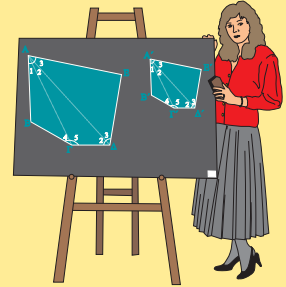
$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα $A\Delta$ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών \hat{A} και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3^{ου} Κριτηρίου:

- i) $\hat{B} > 90^\circ$ και $\hat{B}' > 90^\circ$.
- ii) $\hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{B}' = 90^\circ$.



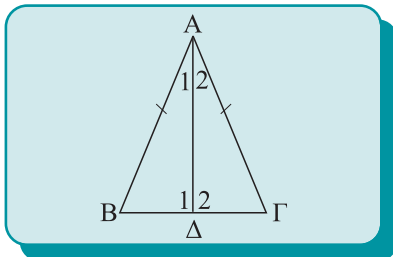
Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta$ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν $AB = A\Gamma$, $A\Delta$ κοινή και $BD = \Delta\Gamma$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.



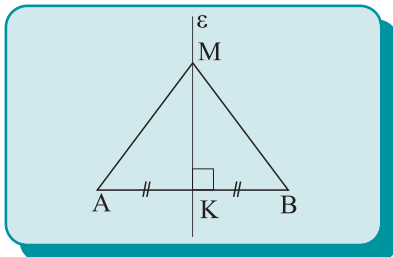
Σχήμα 18

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ.19), M ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB .

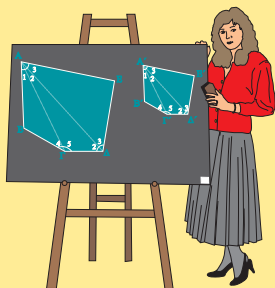


Σχήμα 19

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα III του θεωρήματος I (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.**

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.

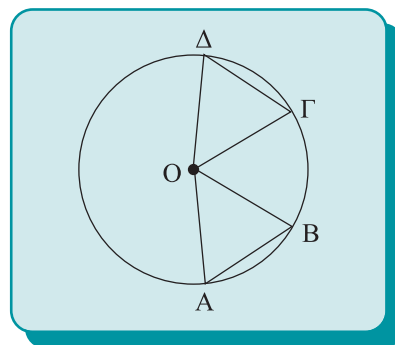


ΠΟΡΙΣΜΑ III

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με $AB = \Gamma\Delta$. Τότε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ (σχ.20) έχουν: $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $AB = \Gamma\Delta$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, οπότε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 20

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα III και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

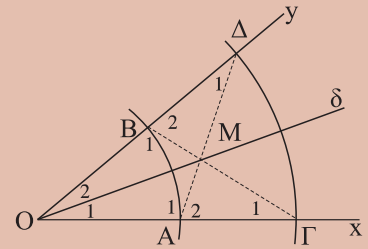
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:
Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),
- μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),
- και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε γωνία \hat{xOy} και δύο κύκλους (O, ρ) , (O, R) με $\rho < R$ (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox , Oy στα A , B , ο δεύτερος στα Γ , Δ και M είναι το σημείο τομής των $A\Delta$, $B\Gamma$, να αποδειχθεί ότι:

- (i) τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα,
- (ii) τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ είναι ίσα,
- (iii) τα τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα,
- (iv) η OM είναι η διχοτόμος της \hat{xOy} .



Σχήμα 21

Απόδειξη

- (i) Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ έχουν $OA = OB (= \rho)$, $OG = OD (= R)$ και \hat{O} κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.
- (ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180^\circ - \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Επομένως, τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ έχουν $A\Gamma = B\Delta$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.
- (iii) Από το (ii) προκύπτει ότι $MA = MB$, οπότε τα τρίγωνα OAM και OBM έχουν $OA = OB$, $MA = MB$ και OM κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.
- (iv) Επειδή τα τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η OM είναι η διχοτόμος της \hat{xOy} .

ΣΧΟΛΙΟ

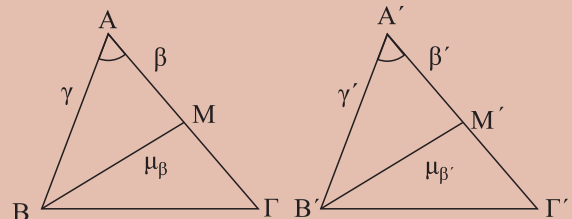
Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ (σχ.22). Αυτά έχουν $AB = A'B'$, $BM = B'M'$ (από την υπόθεση) και $AM = A'M'$, ως μισά των ίσων πλευρών $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$. Άρα, τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.



Σχήμα 22

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι скаληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3. Συμπληρώστε τα κενά:

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι

iii) Ένα σημείο M βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος AB , όταν

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δύο τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν I είναι το σημείο τομής των διχοτόμων AD και BE του τριγώνου $ABΓ$ και I' το σημείο τομής των διχοτόμων $A'D'$ και $B'E'$ του $A'B'Γ'$ να αποδείξετε ότι:

i) $AD = A'D'$ και $BE = B'E'$

ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$.

2. Δύο τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_a = \delta_{a'}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

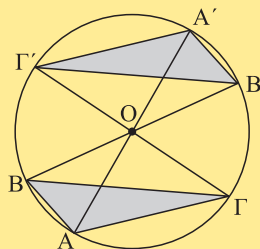
ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. Σε τρίγωνο $ABΓ$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα MD . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $BΓD$ είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Αν AA' , BB' και $ΓΓ'$ είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ είναι ίσα.



3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι $AB = ΓΔ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{Δ}$.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$. Η διάμεσος AM και η διχοτόμος BD του $ABΓ$ τέμνονται στο Θ , ενώ η αντίστοιχη διάμεσος $A'M'$ και η αντίστοιχη διχοτόμος $B'D'$ του $A'B'Γ'$ τέμνονται στο Θ' . Να αποδείξετε ότι: i) $BD = B'D'$, ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$, iii) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A'B'\Theta'$ είναι ίσα, iv) $A\Theta = A'\Theta'$ και $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$.

2. Δύο τμήματα AB και $ΓΔ$ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ϵ . Αν η ϵ και η μεσοκάθετος του $ΑΓ$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του BD .

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = ΑΓ$). Η μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΓ$ τέμνει την προέκταση της $ΓB$ στο Δ . Προεκτείνουμε τη ΔA κατά τμήμα $AE = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $\Delta AΓ$ είναι ισοσκελές,

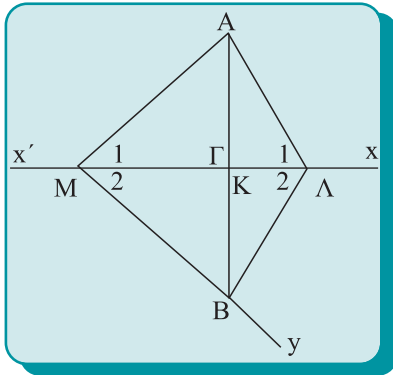
ii) το τρίγωνο $ΓΔE$ είναι επίσης ισοσκελές.

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα κάθετου

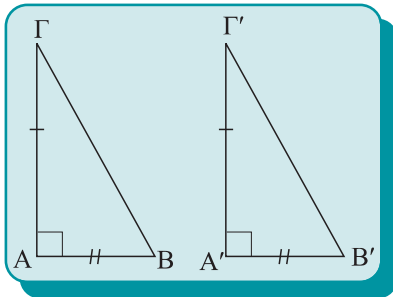
Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

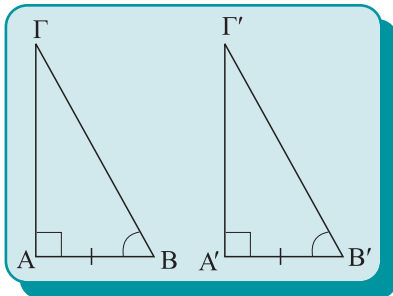
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.



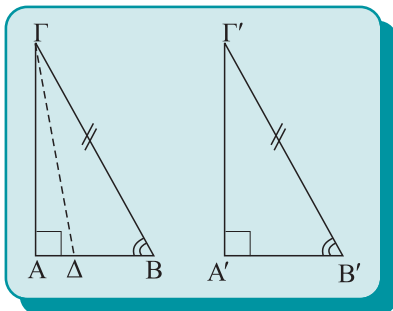
Σχήμα 23



Σχήμα 24



Σχήμα 25



Σχήμα 26

Απόδειξη

Έστω ευθεία $x'x$, σημείο A εκτός αυτής και σημείο M της $x'x$ (σχ.23). Αν η AM είναι κάθετη στην $x'x$, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η AM δεν είναι κάθετη στην $x'x$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η $x'x$ και δεν περιέχει το A θεωρούμε την ημιευθεία My , ώστε να είναι $\hat{xMy} = \hat{AMx}$ και πάνω σε αυτή σημείο B , ώστε $MA = MB$. Επειδή τα σημεία A, B είναι εκατέρωθεν της $x'x$, η $x'x$ τέμνει την AB σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω K . Αφού $MA = MB$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η MK είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο MAB , άρα είναι και ύψος και επομένως $AB \perp x'x$.

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία AL κάθετη στην $x'x$. Τότε τα τρίγωνα $AM\Lambda$ και $BM\Lambda$ είναι ίσα, γιατί έχουν $M\Lambda$ κοινή, $MA = MB$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90^\circ$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90^\circ$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180^\circ$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία A, Λ, B είναι συνευθειακά, δηλαδή η AL ταυτίζεται με την AK , που είναι άτοπο.



3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΠΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24).
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα (σχ.25).

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα I

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και $AB = A'B'$. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε στην πλευρά BA υπάρχει σημείο Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$.

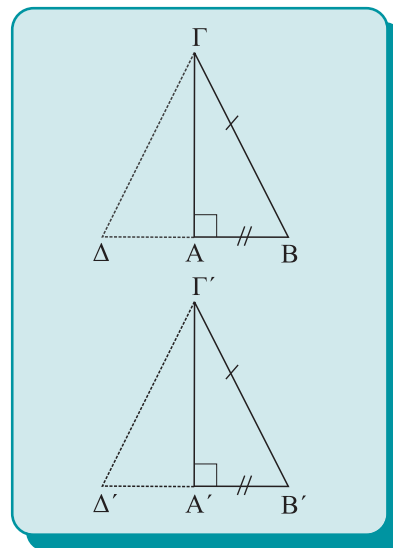
Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Delta B = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90^\circ$, δηλαδή $\Gamma\Delta \perp AB$. Έτσι έχουμε $\Gamma A \perp AB$ και $\Gamma\Delta \perp AB$ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$. Άρα $AB = A'B'$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $BA = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).

Θεώρημα II

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των BA και $B'A'$ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ' , ώστε να είναι $A\Delta = AB$ και $A'\Delta' = A'B'$. Τότε η ΓA είναι μεσοκάθετος του ΔB και η $\Gamma'A'$ μεσοκάθετος του $\Delta'B'$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $\Gamma'\Delta' = \Gamma'B'$. Από τις τελευταίες ισότητες και την $B\Gamma = B'\Gamma'$ προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$. Έτσι τα τρίγωνα $\Gamma\Delta B$ και $\Gamma'\Delta'B'$ έχουν $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\Delta B = \Delta'B'$ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων AB και $A'B'$), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Σχήμα 27

ΠΟΡΙΣΜΑ I

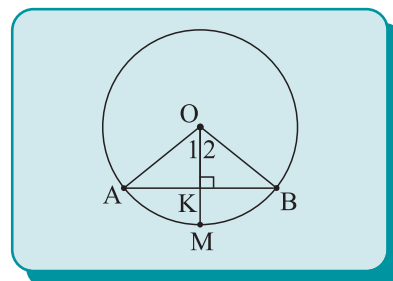
Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια χορδή του AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M (σχ.28). Επειδή το τμήμα OK είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα



Σχήμα 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το K είναι μέσο του AB και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Θεώρημα III

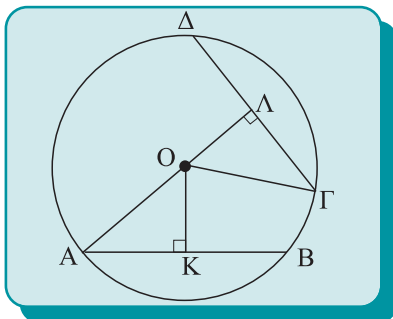
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) και OK , OL τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$, έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma (= \rho)$ και $AK = \Gamma L$ (αφού $AB = \Gamma\Delta$). Επομένως είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$ έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma$ και $OK = OL$, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma L \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$



Σχήμα 29

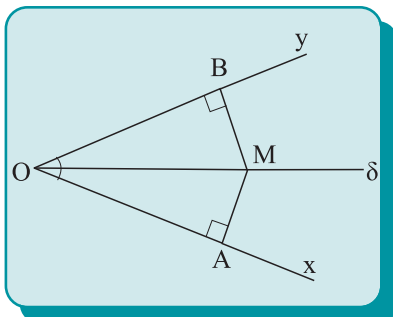
Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $\chi\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα AOM και BOM είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.



Σχήμα 30

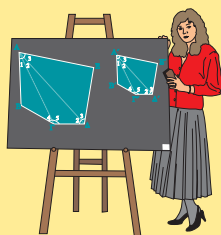
Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

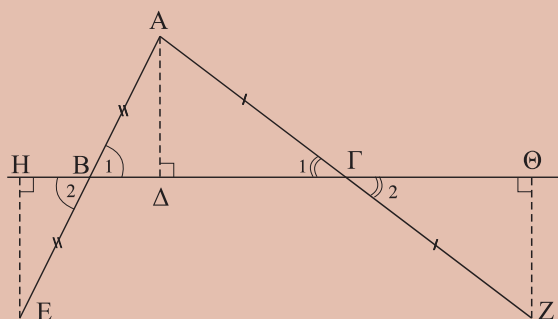
Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς AB (σχ.31) παίρνουμε σημείο E , ώστε $BE=AB$ και στην προέκταση της $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , ώστε $\Gamma Z=A\Gamma$. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου και $EH, Z\Theta$ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία $B\Gamma$, τότε:

- (i) να συγκριθούν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και EBH , καθώς και τα $A\Gamma\Delta$ και $Z\Gamma\Theta$,
- (ii) να αποδειχθεί ότι $EH = Z\Theta$.



Σχήμα 31

Λύση

(i) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και EBH είναι ορθογώνια ($\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$) και έχουν $AB = BE$ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $Z\Gamma\Theta$ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{\Theta} = 90^\circ$, $A\Gamma = \Gamma Z$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.

(ii) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και EBH προκύπτει ότι $EH=A\Delta$. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει $Z\Theta = A\Delta$. Επομένως $EH = Z\Theta$.

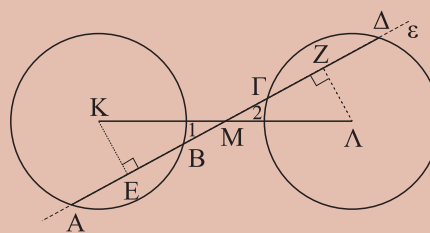
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα K, Λ και από το μέσο M του $K\Lambda$ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι $AB = \Gamma\Delta$ αρκεί τα αποστήματά τους KE και ΛZ , αντίστοιχα, να είναι ίσα.

Τα τρίγωνα EMK και ZML είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$) και έχουν $KM = ML$, γιατί το M είναι μέσο του $K\Lambda$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε $KE = \Lambda Z$.



Σχήμα 32

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Έστω ευθεία ε και σημείο A εκτός αυτής. Αν $AB \perp \varepsilon$ και $AG \perp \varepsilon$ (B, G σημεία της ε) τότε:

- | | | |
|-----------------|----------|-----------|
| i) $B \equiv G$ | Σ | Λ |
| ii) $B \neq G$ | Σ | Λ |
| iii) $AB = AG$ | Σ | Λ |

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

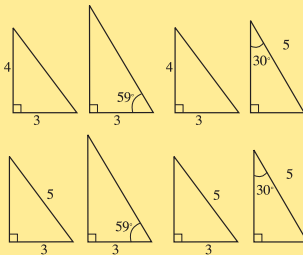
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:

- π_1 : Το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.
 π_2 : Το $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου.
 π_3 : Το $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

Αν για το $A\Delta$ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3 , τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.



5. Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:

Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της και διχοτομεί

6. Αν $AB, \Gamma\Delta$ είναι χορδές ενός κύκλου (K) και KE, KZ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:

- α. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2} KZ$,
 β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$,
 γ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$,
 δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2} KE = \frac{1}{3} KZ$,
 ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

8. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

2. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

- i) από τη βάση,
 ii) από τις ίσες πλευρές.

3. Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.

4. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- i) το M ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
 ii) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του M από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha', \nu_\alpha = \nu_{\alpha'}, \mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha', \nu_\beta = \nu_{\beta'}, \nu_\gamma = \nu_{\gamma'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = I^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

5. Δίνεται κύκλος (O, R), οι ίσες χορδές του $AB, \Gamma\Delta$ και τα αποστήματά τους OK και OL αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα MOK και MOL είναι ίσα,
 ii) $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$.

Σύνθετα Θέματα

1. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω E και Z οι προβολές του Δ στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBE και $\Delta \Gamma Z$.
 ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της \hat{A} , η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ' , με προβολές τα σημεία E', Z' στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 iii) Να αποδείξετε ότι $EE' = A\Gamma$ και $ZZ' = AB$.

2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$ έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

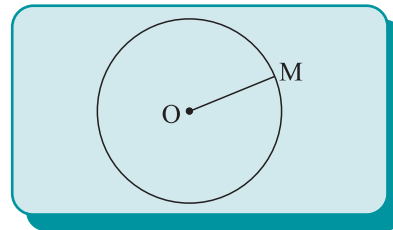
3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

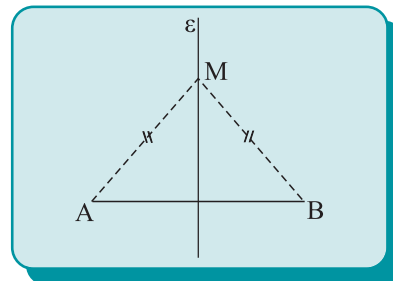
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

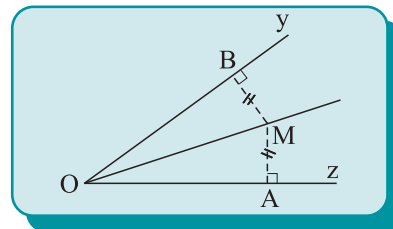
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 33



Σχήμα 34



Σχήμα 35

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

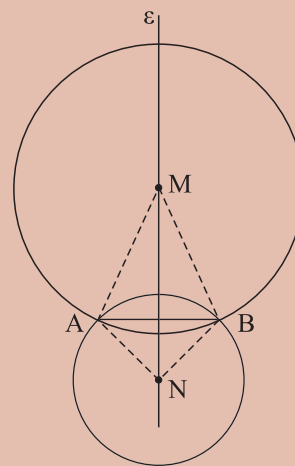
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B.

Λύση

Έστω M ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A, B (σχ.36). Τότε $MA=MB$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το M ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος AB.

Αντίστροφα. Έστω N ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του AB. Τότε θα είναι $NA=NB$, οπότε ο κύκλος (N,NA) διέρχεται και από το B. Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα A, B.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος AB.



Σχήμα 36

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ πάνω στην οποία βρίσκεται.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο N της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

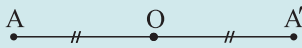
Ερωτήσεις Κατανόησης

Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.

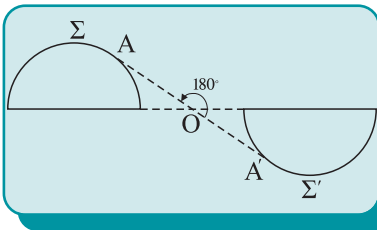
- Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι

Ασκήσεις Εμπέδωσης

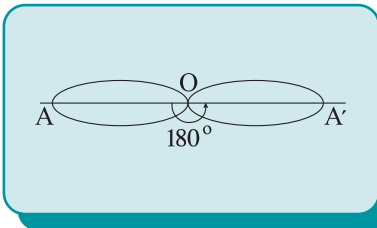
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών A των τριγώνων $AB\Gamma$, που έχουν σταθερή την πλευρά $B\Gamma = a$ και τη διάμεσο AM με γνωστό μήκος.
- Δίνεται κύκλος (O, R) . Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ON , ώστε $ON = NM$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M , όταν το N διαγράφει τον κύκλο.



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

Συμμετρικά σχήματα

3.8 Κεντρική συμμετρία

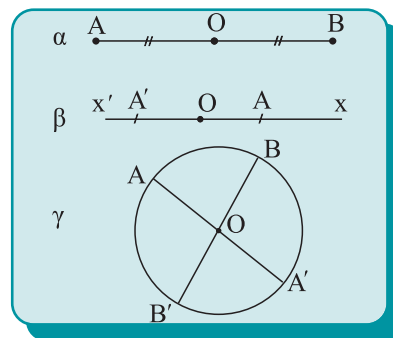
Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο O (σχ.37).

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα. Το σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το O σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή ένα σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς το O , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία**.

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ , με κέντρο συμμετρίας το O (σχ.39), κατά 180° γύρω από το O , θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).



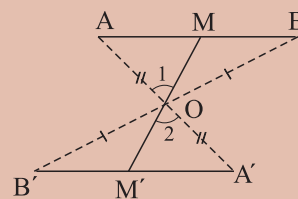
Σχήμα 40

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα τμήμα AB (σχ.41), σημείο O που δεν ανήκει στην ευθεία AB και A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς το O αντίστοιχα. Επειδή $OA' = OA$, $OB' = OB$ και $\hat{A'OB'} = \hat{AOB}$, τα τρίγωνα AOB και $A'OB'$ είναι ίσα, οπότε $A'B' = AB$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα AB και $A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O . Έστω σημείο M του AB και M' η τομή της MO με το $A'B'$. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A'}$, οπότε τα τρίγωνα AOM και $A'OM'$ είναι ίσα γιατί έχουν $OA' = OA$, $\hat{A} = \hat{A'}$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως $OM' = OM$, που σημαίνει ότι το M' είναι συμμετρικό του M .



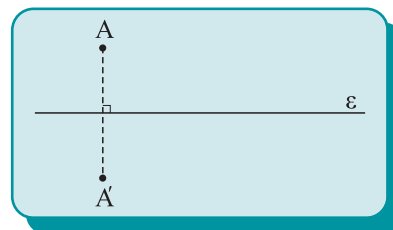
Σχήμα 41

Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου M' του $A'B'$ είναι σημείο του AB . Άρα τα $AB, A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O .

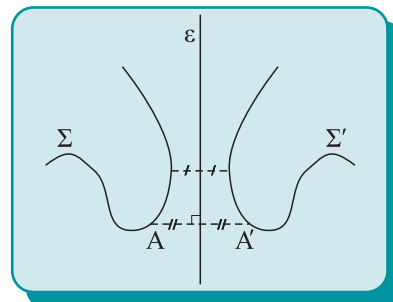
3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).

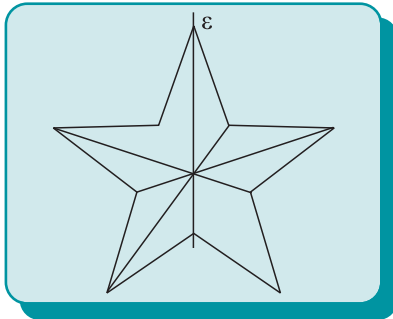
Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε , αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς την ε , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία**. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε , τότε η ε χωρίζει



Σχήμα 42



Σχήμα 43

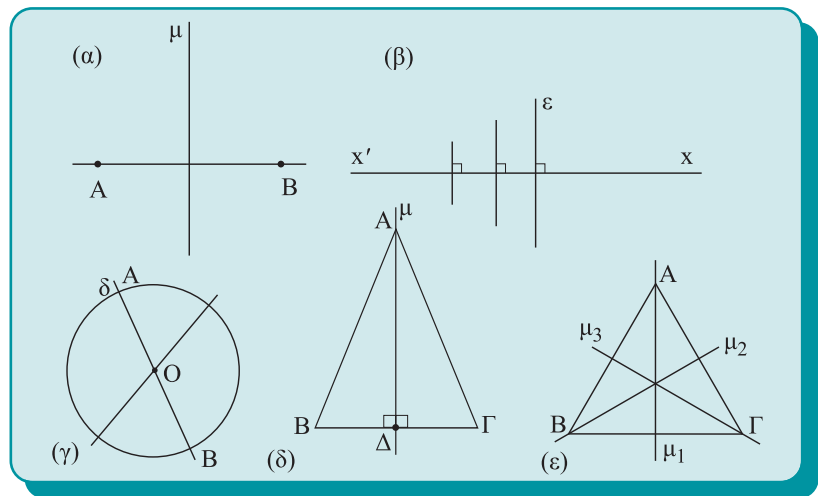


Σχήμα 44

το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ϵ , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Από τα γνωστά μας σχήματα

- Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ϵ (σχ.45α).
- Η ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία $\epsilon \perp x'x$ και την ίδια τη $x'x$ (σχ.45β).
- Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του AB (σχ.45γ).
- Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους $A\Delta$ (σχ.45δ).
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



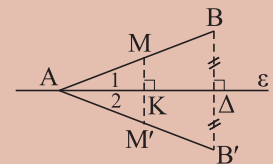
Σχήμα 45

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ϵ και ένα τμήμα AB του οποίου το ένα άκρο A είναι σημείο της ϵ . Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του AB ως προς την ϵ είναι το τμήμα AB' ίσο με το AB , όπου B' το συμμετρικό του B ως προς την ϵ .

Απόδειξη

Το συμμετρικό του A ως προς την ϵ είναι το ίδιο το A , αφού το A είναι σημείο της ϵ . Επειδή η ϵ είναι μεσοκάθετος του BB' , είναι $AB' = AB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABB' η $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Έστω σημείο M του AB . Φέρουμε $MK \perp \epsilon$ η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το AB' στο M' . Στο τρίγωνο AMM' η AK είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KM' = KM$, οπότε το M' είναι συμμετρικό του M . Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του AB' είναι σημείο του AB . Άρα τα AB , AB' είναι συμμετρικά ως προς την ϵ .



Σχήμα 46

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων: Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.
2. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και σημείο O . Αν A' , B' , $Γ'$ είναι τα συμμετρικά των A , B , $Γ$ ως προς το κέντρο O αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ABΓ$, $A'B'Γ'$ είναι συμμετρικά ως προς το O και ίσα.
3. Αν $x'A'y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο O , εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'A'y' = x\hat{A}y$.

4. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου $ABΓ$ ως προς την ευθεία $BΓ$ είναι τρίγωνο ίσο με το $ABΓ$.
5. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.
6. Έστω ε , ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο O και ένα τυχαίο σημείο M . Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως προς ε και M'' το συμμετρικό του M' ως προς ε' , τότε να αποδείξετε ότι:
i) $OM = OM''$,
ii) τα σημεία M , O , M'' είναι συνευθειακά.



Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

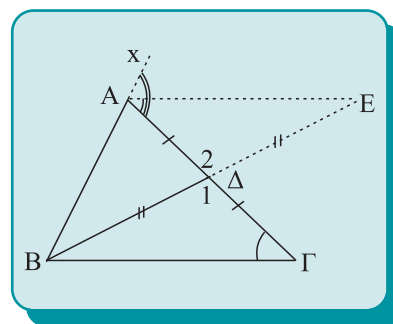
3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $ABΓ$. Φέρουμε τη διάμεσο $BΔ$ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ , θεωρούμε σημείο E , ώστε $\Delta E = B\Delta$. Επειδή το E βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$. Όμως τα τρίγωνα $BΔΓ$ και $EΔA$ είναι ίσα γιατί έχουν: $B\Delta = \Delta E$, $A\Delta = \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon\xi}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

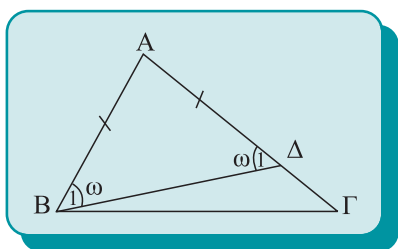
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- (ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.



Σχήμα 48

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της $A\Gamma$, ώστε $A\Delta=AB$. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Delta$ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η $B\Delta$ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας \hat{B} , είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- (ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- (iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

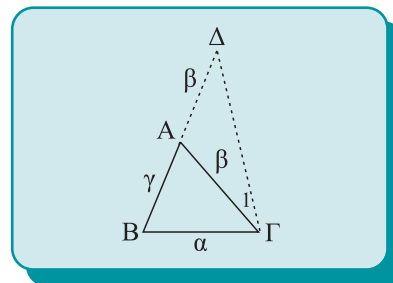
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά BA , προς το A , κατά τμήμα $A\Delta = A\Gamma$. Τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η ΓA εσωτερική ημιευθεία της $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι $B\Gamma < B\Delta$ ή $\alpha < \beta + \gamma$.

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \quad \beta \geq \gamma$$



Σχήμα 49

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδειχθεί ότι:

(i) $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$

(ii) $MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$.

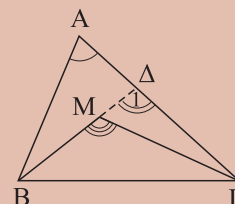
Απόδειξη

(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του BM με την $A\Gamma$. Η γωνία $B\hat{M}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ και επομένως $B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$. Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$. Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.
(ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $M\Gamma\Delta$ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$MB + M\Delta < AB + A\Delta \quad \text{και} \quad M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$MB + M\Delta + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) + M\Delta \quad \text{ή} \quad MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$



Σχήμα 50

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα $A\Delta$ είναι διάμεσος,

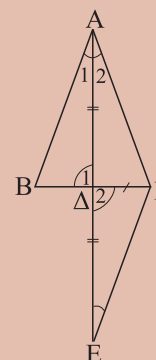
(ii) το τμήμα $A\Delta$ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα $A\Delta$ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$.

Λύση

Έστω $A\Delta$ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ.51). Προ-



Σχήμα 51

εκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα ($ΒΔ = ΔΓ$, $ΑΔ = ΔΕ$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα $ΑΒ = ΓΕ$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$. Από την $\hat{A}_1 = \hat{E}$ προκύπτει $ΑΓ = ΓΕ$ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΑΒ = ΑΓ$. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε $ΑΒ = ΑΓ$.

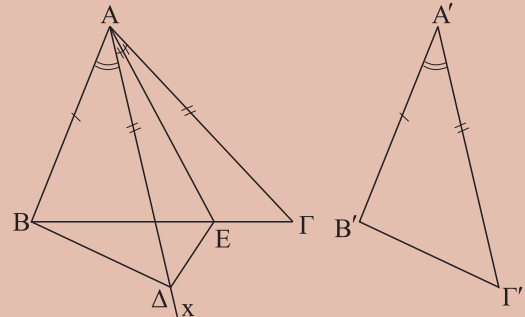
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{A} > \hat{A}'$ (σχ.55).

Θα αποδείξουμε ότι $ΒΓ > Β'Γ'$. Αφού $\hat{A} > \hat{A}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αχ της \hat{A} τέτοια, ώστε $Β\hat{A}χ = \hat{A}'$. Πάνω στην Αχ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $ΑΔ = Α'Γ'$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, $ΒΔ = Β'Γ'$. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας Δ\hat{A}Γ, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα $ΕΔ = ΕΓ$. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι $ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ$ ή $ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ$ ή $Β'Γ' < ΒΓ$.



Σχήμα 52

Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι $ΑΒ = Α'Γ'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $ΒΓ > Β'Γ'$. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι $ΒΓ = Β'Γ'$, ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι $Β'Γ' < ΒΓ$, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

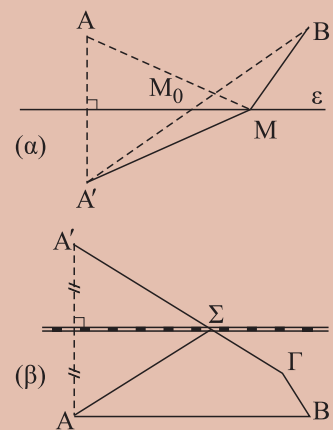
Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε (Σχ.53α).

(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι $ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ \geq Α'Β$. Πότε το άθροισμα $ΜΑ + ΜΒ$ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;

Λύση

(i) Επειδή το Α' είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ', οπότε $ΜΑ = ΜΑ'$ και επομένως $ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ$ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α'Β από το τρίγωνο ΜΑ'Β, έχουμε $ΜΑ' + ΜΒ > Α'Β$ (2), ενώ αν το Μ είναι



Σχήμα 53

σημείο του Α'Β' έχουμε $MA' + MB = A'B$ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ και ότι το $MA + MB$ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α'Β, όταν $M = M_0$, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α'Β.

(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

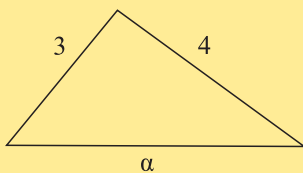
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

- i) Η εξωτερική γωνία \hat{A}_{ε} τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη \hat{A} . Σ Λ
- ii) Η εξωτερική γωνία \hat{B}_{ε} τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη \hat{B} . Σ Λ
- iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Σ Λ
- iv) Αν $\beta > \gamma$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα. Σ Λ
- v) Αν $\beta = \gamma$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:

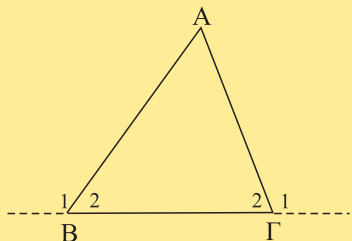
α. $\alpha = 7$ β. $\alpha = 1$ γ. $1 < \alpha < 7$ δ. $\alpha > 7$ ε. $0 < \alpha < 1$
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90^\circ$.



2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν $AB = BG$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $AD = GD$. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. i) Τι είδους γωνία είναι η \hat{B} ; ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.

5. Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $AM < AB$.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $AD < DB$.

7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι $BO = GO$ και $OL = OM$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

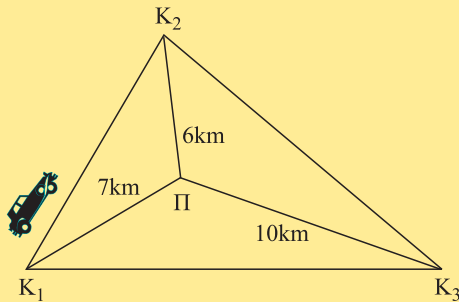
9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών \hat{B} , $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της \hat{A} .

10. Οι κωμοπόλεις K_1 , K_2 , K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1K_2K_3K_1$ επιστρέφει στην K_1 . Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή

τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\mu_a < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_a = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_a > \frac{\alpha}{2}$;
2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}M\Gamma > \hat{A}MB$.
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος AM . Να αποδείξετε ότι:
 - i) $\hat{M}AB > \hat{M}A\Gamma$,
 - ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_a < \frac{\beta + \gamma}{2}$,
 - iii) $\mu_a + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.
4. Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA . Για κάθε σημείο M του κύκλου να αποδειχθεί ότι $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$. (Το τμήμα ΣA λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).
5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν η διχοτόμος δ_a τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β , να αποδείξετε ότι:
 - i) $A\Gamma = 2AB$,
 - ii) $AB < B\Gamma$.

6. Έστω κύκλος (O, R) και δύο τόξα \widehat{AB} , $\widehat{\Gamma\Delta}$. Αν $\widehat{AB} = 2\widehat{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι $AB < 2\Gamma\Delta$.

7. Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και O εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + OG + OD > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του O το άθροισμα

$$OA + OB + OG + OD \text{ γίνεται ελάχιστο;}$$

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $A\epsilon = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία $\Delta\epsilon$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $MB\epsilon$ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}\epsilon$ διέρχεται από το σημείο A .

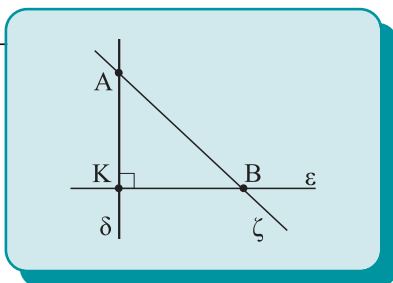
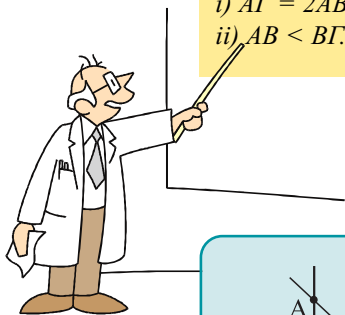
3. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) $A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta$ και $A\Gamma + B\Delta > A\Delta + B\Gamma$,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox , Oy τα σημεία A , B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από $2OG$.



Σχήμα 54

3.13 Κάθετες και πλάγιες

Έστω μια ευθεία ϵ (σχ.54) και ένα σημείο A εκτός αυτής. Από το A φέρουμε προς την ϵ την κάθετο δ και μια πλάγια ζ . Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ϵ στα K και B αντίστοιχα. Το K , όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του A πάνω στην ϵ ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ϵ . Το B λέγεται **ίχνος** της ευθείας ζ ή του τμήματος AB πάνω στην ϵ .

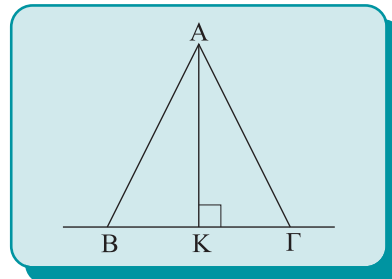
Θεώρημα I

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω AB και AG δύο ίσα πλάγια τμήματα και AK το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το AK ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KB = K\Gamma$.

Αντίστροφα. Έστω ότι $KB = K\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το AK είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή $AB = AG$.



Σχήμα 55

Θεώρημα II

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

- (i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
- (ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB (σχ.56), η γωνία \hat{K} είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά AB είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, $AB > AK$.

(ii) Έστω ευθεία ϵ και σημείο A εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο AK στην ϵ και δύο πλάγια τμήματα AB , AG , όπου B , Γ σημεία της ϵ (σχ.57).

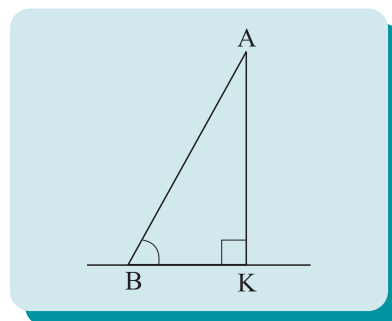
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη B , Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο K .

Ας υποθέσουμε ότι $K\Gamma > KB$ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι $AG > AB$. Αφού το B είναι μεταξύ των K , Γ , η $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου KAB , επομένως $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} > \hat{K} = 1\text{L}$, δηλαδή η $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά AG βρίσκεται απέναντι από την $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $AG > AB$.

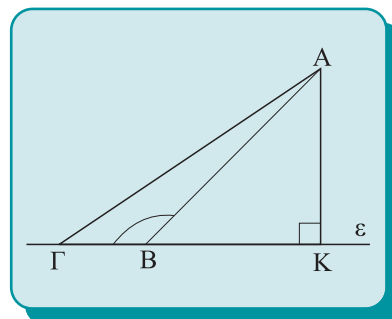
Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι $AG > AB$. Αν ήταν $K\Gamma = KB$, τότε θα είχαμε $AG = AB$, που είναι άτοπο. Αν $K\Gamma < KB$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι $AG < AB$, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως $K\Gamma > KB$.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος II, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου A από μία ευθεία ϵ είναι μικρότερη από την απόσταση του A από τυχόν σημείο της ευθείας.



Σχήμα 56



Σχήμα 57

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν AB, AG πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και AK το κάθετο τμήμα, τότε:

1. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες

i) $AB=AG \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

ii) $AB>AG \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

2. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i) $AB>AK$

Σ Λ

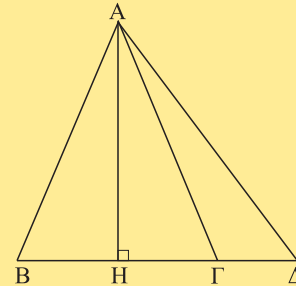
ii) $AB=AK$

Σ Λ

iii) $AB<AK$

Σ Λ

2. Στο παρακάτω σχήμα το AH είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ABG . Να συγκρίνετε τα τμήματα AB, AG και AD .



3. Δίνεται τμήμα AB , σημείο P της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το A .

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του P από την ευθεία ε και το σημείο B .

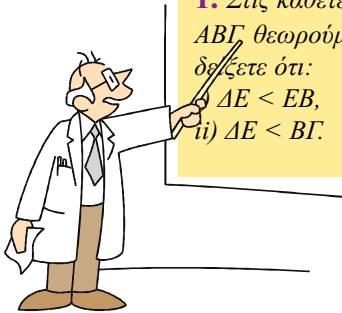
ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε , ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στις κάθετες πλευρές AB, AG ορθογώνιου τριγώνου ABG θεωρούμε τα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

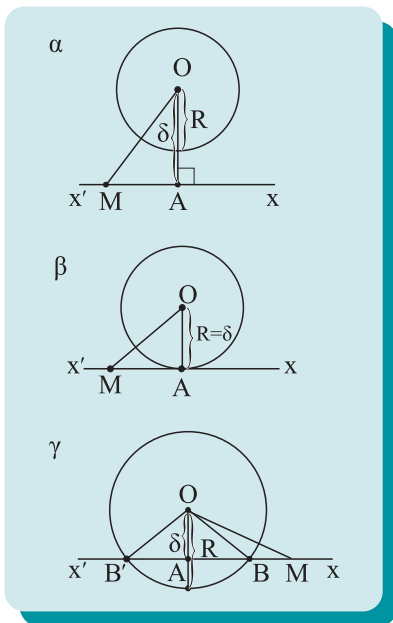
i) $\Delta E < EB$,

ii) $\Delta E < BG$.



Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Σχήμα 58

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) μια ευθεία $x'x$ και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου O από την $x'x$ (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: $\delta > R$, $\delta = R$ και $\delta < R$. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

• Έστω $\delta > R$ (σχ.58α). Τότε το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο M της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού $OM > OA > R$. Επομένως, η $x'x$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.

• Έστω $\delta = R$ (σχ.58β). Τότε το A είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο M της $x'x$ είναι εξωτερικό σημείο του (O,R) , αφού $OM > OA = R$. Επομένως, η $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο A . Το σημείο A λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x'x$ εφάπτεται του κύκλου (O,R) στο σημείο A . Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

• Έστω $\delta < R$ (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε $AM = R$. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού $OM > AM = R$. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx' έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β'.

Επομένως, η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x'x, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.
- Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

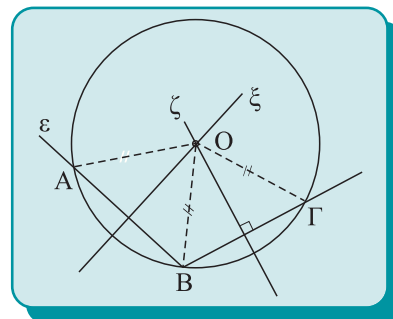
Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα I

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή $OA = OB (= \rho)$ και $OB = OG (= \rho)$, οι μεσοκάθετοι ξ, ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ , που είναι άτοπο.



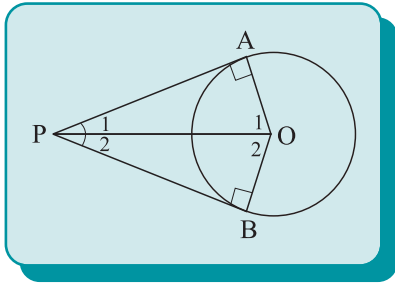
Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο P . Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το P φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO **διακεντρική ευθεία** του σημείου P . Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

Θεώρημα II

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και $OA = OB (= \rho)$, άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

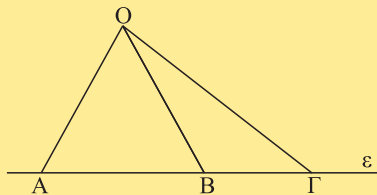
Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- (i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- (ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

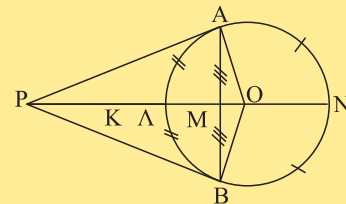
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;
2. Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι $OA = OB = OG$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:



3. Στο παρακάτω σχήμα τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, η PK διχοτόμος της \hat{APB} , τα Λ, N μέσα των τόξων \widehat{AB} , \widehat{ANB} αντίστοιχα και το M μέσο της χορδής

- | | | |
|---|---|---|
| i) $PA = PB$. | Σ | Λ |
| ii) Η PK διέρχεται από το O . | Σ | Λ |
| iii) Η OM διέρχεται από τα P, Λ, N . | Σ | Λ |
| iv) Η προέκταση του AM διχοτομεί τις γωνίες \hat{APB} , \hat{AOB} και το τόξο \widehat{ANB} . | Σ | Λ |

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.
2. Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μία διάμετρος του AB και οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου στα A, B . Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Γ, Δ , να αποδείξετε ότι $\hat{G}\hat{O}\hat{\Delta} = 90^\circ$.
3. Από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο E του κύκλου τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB .

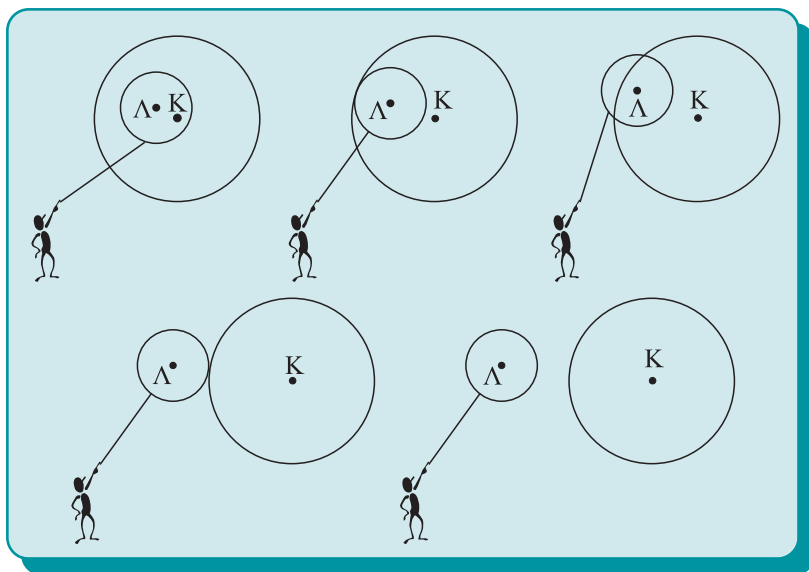
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.
2. Από σημείο M εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρουμε τις εφαπτόμενες MA, MB του κύκλου. Προεκτείνουμε το OB κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι τριπλάσια της $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$.
3. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O , φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP να αποδείξετε ότι $\hat{M}\hat{A}\hat{P} = \hat{M}\hat{B}\hat{P}$.



3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).

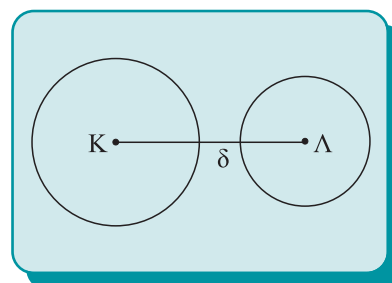


Σχήμα 61α

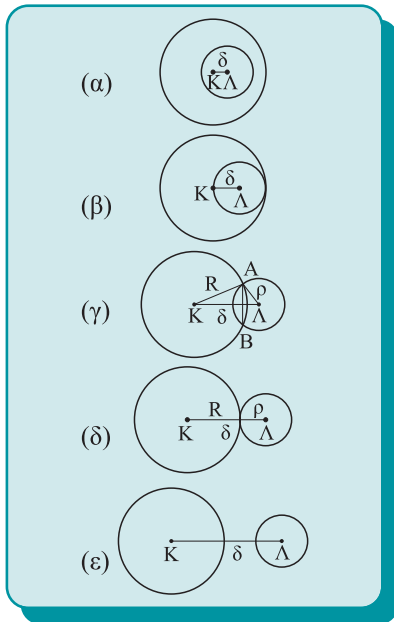
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β). Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

• Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

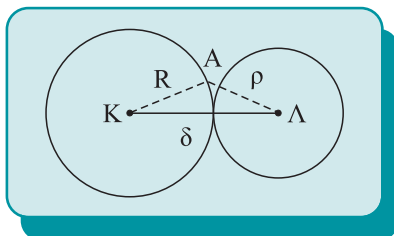
- (i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (K, R) , αν



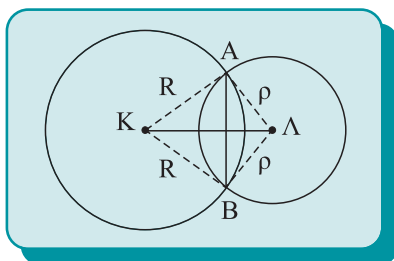
Σχήμα 61β



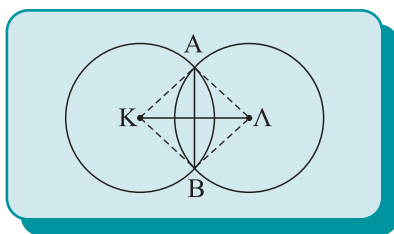
Σχήμα 62



Σχήμα 63



Σχήμα 64



Σχήμα 65

και μόνο αν $\delta < R - \rho$ (σχ.62α).

(ii) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$ (σχ.62ε).

• Εφαπόμενοι κύκλοι

(i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$ (σχ.62β).

(ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$ (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής A (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο AKΛ έχουμε $K\Lambda < KA + A\Lambda$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.

• Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) του σχ.64 και A, B τα σημεία τομής τους. Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Όμοια από την $LA = LB = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Άρα, η KΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Πράγματι, επειδή $R = \rho$, θα είναι $AK = AL$ και $BK = BL$. Άρα τα A και B είναι σημεία της μεσοκαθέτου του KΛ και επομένως η κοινή χορδή AB είναι μεσοκάθετος της διακέντρου KΛ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α (σχ.66). Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα, όπως στο σχ.66. Να αποδειχθεί ότι:

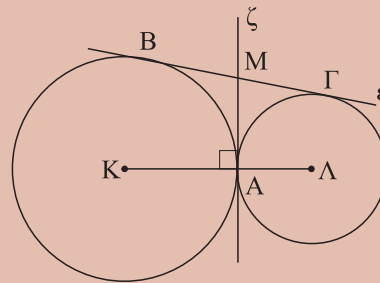
- (i) Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.
(ii) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.

Απόδειξη

- (i) Έστω ότι η ζ εφάπτεται στον κύκλο (Κ) στο Α. Τότε $\zeta \perp KA$ (1).

Επειδή όμως οι κύκλοι εφάπτονται, το Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\zeta \perp AL$, επομένως η ευθεία ζ είναι και εφαπτομένη του κύκλου (Λ).

- (ii) Έστω Μ το σημείο τομής της ζ με την ε. Τότε $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Κ) και $MA = MG$, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Λ). Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $MB = MG$.



Σχήμα 66

ΣΧΟΛΙΟ

Η ευθεία ε του παραπάνω σχήματος, που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη**, ενώ η ευθεία ζ που έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και $R > \rho$, $KL = \delta$, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του (Κ, R).	1. $\delta > R + \rho$
β. Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ, R).	2. $\delta = R + \rho$
γ. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται.	3. $\delta = R - \rho$
δ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.	4. $\delta < R - \rho$
ε. Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.	5. $2\delta = R - \rho$
	6. $\rho < \delta < R$
	7. $2\delta = R\rho$
	8. $R - \rho < \delta < R + \rho$

2. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- i) Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής. Σ Λ
ii) Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου. Σ Λ
iii) Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου. Σ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν

- i) $KL = \frac{\rho}{2}$,
ii) $KL = \rho$,
iii) $KL = 2\rho$,
iv) $KL = 3\rho$,
v) $KL = 4\rho$.

2. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γρά-

φουμε κύκλο με διάμετρο OA . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του O . Γράφουμε τον κύκλο (A, AO) και τον κύκλο με διάμετρο OB . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδείξετε ότι:

- i) ο κύκλος $(O, 2R)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ ,
- ii) τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A και B ,
- iii) τα PA και PB εφάπτονται στον (O, R) .

2. Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$.

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία M, M' και τον (O_2) στα σημεία N, N' αντίστοιχα με τα M, N μεταξύ των M', N' . Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου A, B τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. Ένας κύκλος κέντρου K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ . Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P . Να αποδείξετε ότι $\widehat{KPA} = 90^\circ$.

4. Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διακρίνονται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην § 2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.
- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.
- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.



3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

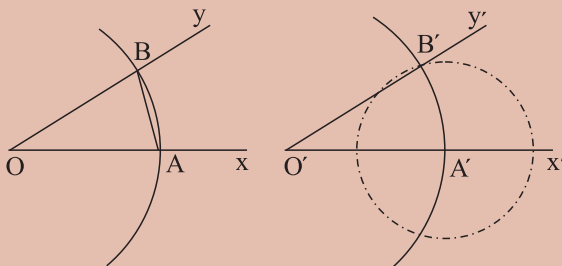
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές με τις οποίες κατοχυρώνουμε κατασκευαστικά στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα και διαδικασίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται γωνία \hat{xOy} και η ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη \hat{xOy} η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και κορυφή το O' .

• Κατασκευή

Καθιστούμε τη γωνία \hat{xOy} (σχ.67) επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο O και τυχαία ακτίνα ρ . Έστω \widehat{AB} το αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O' και ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο που τέμνει την $O'x'$ στο A' . Ακολουθώντας γράφουμε τον κύκλο (A', AB) του οποίου ένα κοινό σημείο με τον (O', ρ) είναι το B' . Φέρουμε την ημιευθεία $O'B'$. Η γωνία $\hat{x'O'B'}$, δηλαδή η $\hat{x'O'y'}$ είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 67

• Απόδειξη

Οι γωνίες \hat{xOy} και $\hat{x'O'y'}$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O, ρ) , (O', ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα \widehat{AB} και $\widehat{A'B'}$ αντίστοιχα. (§ 2.18)

• Διερεύνηση

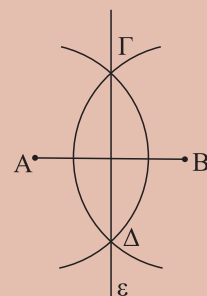
Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O', ρ) και (A', AB) να τέμνονται. Αυτό όμως, συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OAB). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O', ρ) και (A', AB) .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.

• Κατασκευή

Έστω τμήμα AB (σχ.68). Με κέντρα τα άκρα του A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 68

• Απόδειξη

Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο AB (§3.16)

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρό τους AB ικανοποιεί την $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Αρκετές φορές τα παραπάνω βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση μπορεί να παρουσιάζονται ενοποιημένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται ευθεία ε και σημείο A . Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το A κάθετη στην ε , όταν:

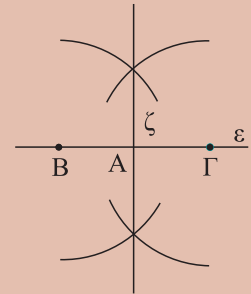
- (i) το A είναι σημείο της ευθείας ε ,
- (ii) το A δεν είναι σημείο της ε .

Λύση

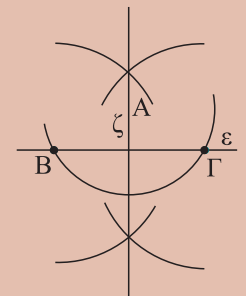
(i) Με κέντρο το A (σχ.69) και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία B και Γ . Έτσι το A έγινε μέσο του τμήματος $B\Gamma$ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ (προηγούμενη κατασκευή).

(ii) Με κέντρο το A (σχ.70) και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία ε στα B και Γ . Η μεσοκάθετος ζ του τμήματος $B\Gamma$, που κατασκευάζεται όπως προηγουμένως, είναι η ζητούμενη κάθετος.

Πράγματι, επειδή $AB = A\Gamma$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, η μεσοκάθετος της χορδής $B\Gamma$ διέρχεται από το A .



Σχήμα 69



Σχήμα 70

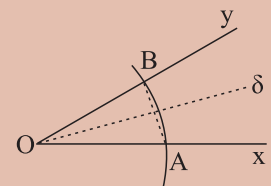
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Λύση

Έστω γωνία \hat{xOy} (σχ.71). Με κέντρο το O και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα A , B αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ (Πρόβλημα 2) της χορδής AB που είναι και η ζητούμενη διχοτόμος.

Πράγματι η ευθεία δ , ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο \widehat{AB} της γωνίας \hat{xOy} (§ 3.6). Επομένως είναι διχοτόμος της.



Σχήμα 71

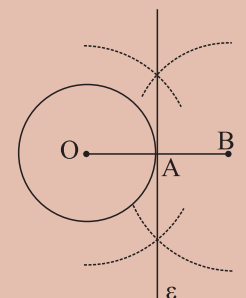
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευασθεί η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, ρ) σε ένα σημείο του A .

Λύση

Στην προέκταση της ακτίνας OA (σχ.72) παίρνουμε το σημείο B , ώστε να είναι $AB = OA$. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο του OB που είναι η εφαπτομένη του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα στο άκρο της A .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για την κατασκευή των εφαπτομένων από σημείο εκτός κύκλου βλέπε σελ. 137.



Σχήμα 72



3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (§3.2-3.4) έχουμε τις επόμενες γεωμετρικές κατασκευές.

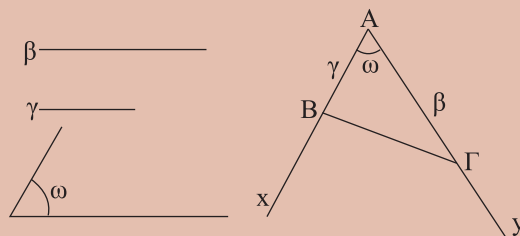
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνονται οι πλευρές $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και η περιεχόμενη γωνία $\hat{A} = \omega$.

Λύση

Με πλευρά μια ημιευθεία Ax κατασκευάζουμε (§ 3.17) γωνία $\hat{x}Ay = \omega$ (σχ.73). Στις πλευρές Ax , Ay παίρνουμε, με το διαβήτη, τα σημεία B , Γ αντίστοιχα, ώστε $AB = \gamma$ και $A\Gamma = \beta$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και $\hat{A} = \omega$. Με τον περιορισμό $0^\circ < \omega < 180^\circ$ (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.



Σχήμα 73

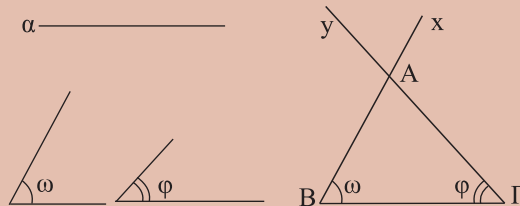
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνεται η πλευρά $B\Gamma = a$ και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες $\hat{B} = \omega$ και $\hat{\Gamma} = \phi$.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = a$ και με κορυφές τα B , Γ (σχ.74) κατασκευάζουμε, προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, γωνίες $\hat{B}\Gamma x = \omega$ και $\hat{B}\Gamma y = \phi$. Οι πλευρές Bx , Γy των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο A . Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $B\Gamma = a$, $\hat{B} = \omega$ και $\hat{\Gamma} = \phi$. Με τον περιορισμό $0^\circ < \omega + \phi < 180^\circ$ (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο (§4.2) θα δούμε ότι ο περιορισμός $\omega + \phi < 180^\circ$ εξασφαλίζει την τομή των ημιευθειών Bx και Γy .



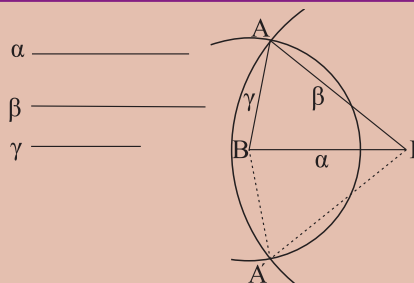
Σχήμα 74

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνονται οι πλευρές $B\Gamma = a$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = a$ (σχ.75) και γράφουμε τους κύκλους (B, γ) και (Γ, β) . Αν οι κύκλοι τέμνονται και A είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 75

Πράγματι το τρίγωνο $AB\Gamma$, από την κατασκευή, έχει $B\Gamma = \alpha$, $AB = \gamma$ ως ακτίνα του (B, γ) και $A\Gamma = \beta$ ως ακτίνα του (Γ, β) .

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι (B, γ) και (Γ, β) να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει (§3.16) όταν $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta > \gamma$). Αν A' είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (B, γ) και (Γ, β) , το τρίγωνο $A'B\Gamma$ είναι ίσο με το $AB\Gamma$, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta \geq \gamma$). Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$, η τελευταία διπλή ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\alpha < \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πώς θα χωριστεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα;
 2. Πώς θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;
 3. Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφεί με ένα νόμισμα;
 4. Τα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου όταν:
α. $\alpha = \beta + \gamma$ β. $\alpha > \beta + \gamma$ γ. $\alpha < \beta + \gamma$ δ. $\alpha < 2(\beta + \gamma)$
ε. Λίποτε από τα προηγούμενα.
- Συκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45° .
2. Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
3. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα a .
4. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση a και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος u .
5. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, όταν δίνονται:
i) $AB = \gamma$ και $A\Gamma = \beta$,
ii) $AB = \gamma$ και $B\Gamma = \alpha$,
όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τέτοια, ώστε $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\angle$. i) Να αποδείξετε ότι $AB = A'B'$, ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.
2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και με πλευρές τις $AB, B\Gamma, \Gamma A$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του $AB\Gamma$ τρία ισόπλευρα τρίγωνα $A'B\Gamma, AB'\Gamma$ και $AB\Gamma'$. Να αποδείξετε ότι $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$.
3. Αν OK, OL είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών $AB, \Gamma A$ κύκλου (O, R) , να αποδείξετε ότι $AB < \Gamma A$, αν και μόνον αν $OK > OL$.
4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα, ώστε $AD = BE = \Gamma Z$. Αν K, Λ, M τα σημεία τομής των $AE, \Gamma A$ και BZ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 1\angle$ και $A\Gamma = 2AB$. Να

αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} < \frac{\hat{A}}{2}$.

6. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\angle$.
7. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία είναι ίσα.
8. Δίνεται μια γωνία xOy και δύο εσωτερικά της σημεία A και B . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την Ox και B' το συμμετρικό του B ως προς την Oy . Αν M, N είναι τυχαία σημεία των Ox, Oy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής να βρείτε τις θέσεις των M, N , για τις οποίες το άθροισμα $AM + MN + NB$ είναι το μικρότερο δυνατό.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Τα τρίγωνα ταξινομούνται σε

- **σκαληνά, ισοσκελή** και **ισόπλευρα**, ως προς τις πλευρές τους.
- **οξυγώνια, ορθογώνια, αμβλυγώνια**, ως προς τις γωνίες τους.

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του, ενώ οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεία.

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΠΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Στον **κύκλο**:

- Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
- Δύο χορδές είναι ίσες, αν και μόνον αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
 - διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
 - είναι μεσοκάθετος της χορδής,
 - διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικοί **γεωμετρικοί τόποι** είναι: ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας.

- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας, που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο O ή μια ευθεία ε , όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ , ως προς το O ή την ε και αντίστροφα.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο:

- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Βασική συνέπεια:

- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\beta = \gamma$.
- Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Σχέση χορδών και αποστημάτων

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι:

- κύκλος
- μεσοκάθετος
- διχοτόμος

Συμμετρία ως προς κέντρο και άξονα

Ανισοτικές σχέσεις - Κάθετες και πλάγιες

Σχετικές θέσεις:

- ευθείας και κύκλου
- δύο κύκλων

Απλές γεωμετρικές κατασκευές – Βασικές κατασκευές τριγώνων