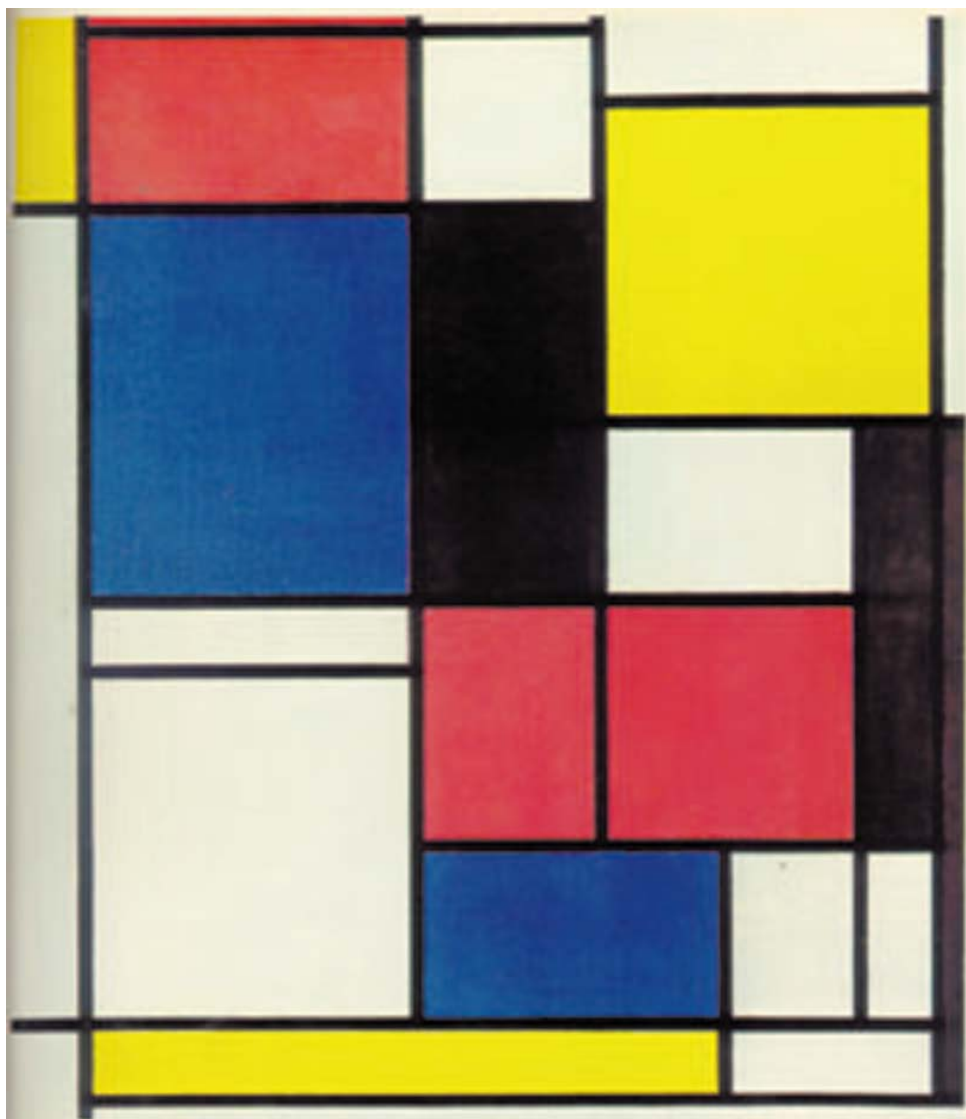


## Εμβαδά

Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. Αργότερα η έννοια του εμβαδού θεμελιώθηκε αυστηρά και γενικεύθηκε σε σύνολα πιο πολύπλοκα από τα ευθύγραμμα σχήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος. Αρχικά εισάγουμε την έννοια του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας. Κατόπιν, δίνουμε τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και τέλος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός πολυγώνου.



Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944), *Πίνακας II*, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925  
Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη.

## Πολυγωνικά χωρία – Πολυγωνικές επιφάνειες

### 10.1 Πολυγωνικά χωρία

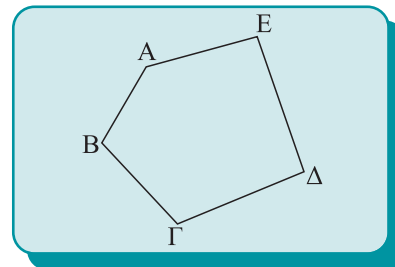
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται **πολυγωνικό χωρίο** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.

Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα **τριγωνικό**, **τετραπλευρικό**, ... , **ν-γωνικό**.

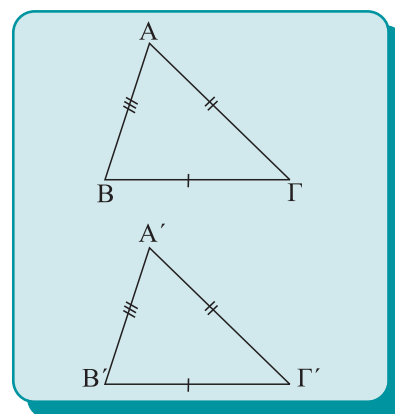
Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται **ίσα** όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).

Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται **πολυγωνική επιφάνεια**.

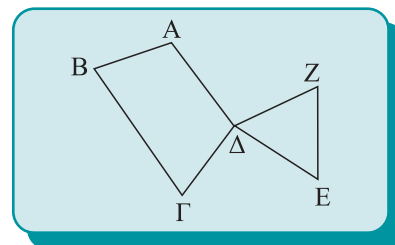
Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια..



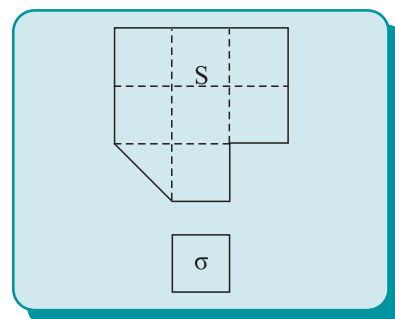
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

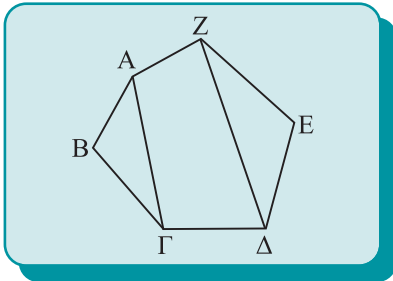
### 10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.

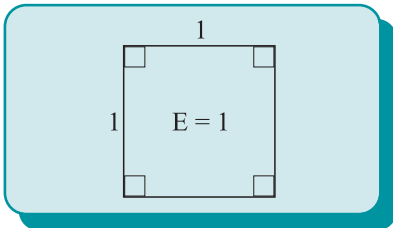
Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο  $S$  (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου  $S$  λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο  $\sigma$ , το οποίο επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής:  $S = \lambda \cdot \sigma$ , όπου  $\lambda$  θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι  $\lambda = 7,5$ ). Ο θετικός αριθμός  $\lambda$  λέγεται **εμβαδόν** του πολυγωνικού χωρίου  $S$  και συμβολίζεται με  $(S)$ . Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα  $E$ . Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.

Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**



Σχήμα 5



• Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένους πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ. 5) έχουμε:

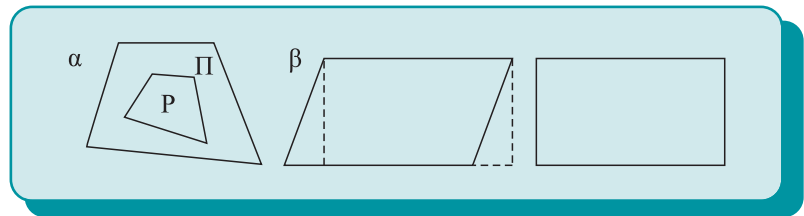
$$(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)$$

Επίσης δεχόμαστε ότι:

• Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.

Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

• Αν ένα πολύγωνο P περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του P είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.



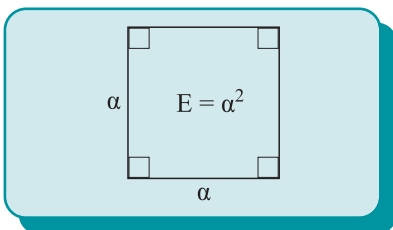
Σχήμα 6

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έχουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**.

Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.



### Θεώρημα

Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου πλευράς α είναι  $\alpha^2$ , δηλαδή:

$$E = \alpha^2.$$

## 10.3 Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα I**

**Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.**

Δηλαδή αν  $\alpha$ ,  $\beta$ , οι πλευρές και  $E$  το εμβαδόν είναι:

$$E = \alpha \cdot \beta$$

**Απόδειξη**

Έστω ένα ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $AB = \alpha$  και  $A\Delta = \beta$  (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E = \alpha$ , την  $AB$  κατά  $BI = \beta$  και σχηματίζουμε το τετράγωνο  $AIHE$ , το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά  $\alpha + \beta$  και επομένως είναι:

$$(AIHE) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1).$$

Προεκτείνοντας τις  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  σχηματίζονται τα τετράγωνα  $\Delta\Gamma ZE$ ,  $BI\Theta\Gamma$  με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  αντίστοιχα και το ορθογώνιο  $\Gamma\Theta HZ$  που είναι ίσο με το  $AB\Gamma\Delta$ . Έτσι έχουμε

$$(\Delta\Gamma ZE) = \alpha^2, (BI\Theta\Gamma) = \beta^2 \text{ και } (\Gamma\Theta HZ) = (AB\Gamma\Delta) \quad (2)$$

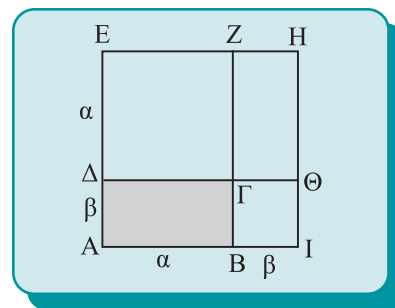
Είναι φανερό όμως ότι

$$(AIHE) = (AB\Gamma\Delta) + (\Gamma\Theta HZ) + (BI\Theta\Gamma) + (\Delta\Gamma ZE),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(AB\Gamma\Delta) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση  $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$ .



Σχήμα 7

**Θεώρημα II**

**Το εμβαδόν  $E$  ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.**

Δηλαδή

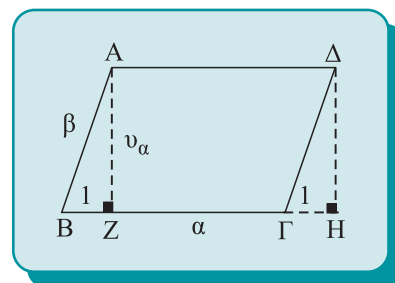
$$E = \alpha v_\alpha = \beta v_\beta, \quad ,$$

όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  οι πλευρές και  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  τα αντίστοιχα ύψη.

**Απόδειξη**

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος  $AZ$  που αντιστοιχεί στη  $B\Gamma$ . Θα αποδείξουμε ότι  $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AZ$ .

Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H$  κάθετη στην προέκταση της  $B\Gamma$ . Τότε τα τρίγωνα  $ZBA$  και  $H\Gamma\Delta$  είναι ίσα ( $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$ ,  $AB = \Delta\Gamma$  και



Σχήμα 8

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1), \text{ οπότε: } (ZBA) = (H\Gamma\Delta) \quad (1).$$

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι  $(AB\Gamma\Delta) = (ABZ) + (AZ\Gamma\Delta)$ , οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = (AZ\Gamma\Delta) + (\Delta\Gamma H) = (AZH\Delta).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα I έχουμε

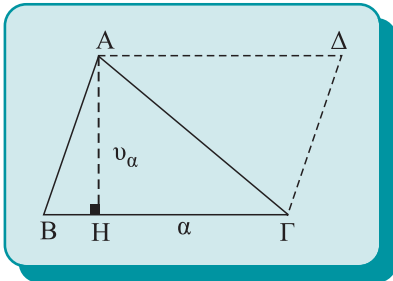
$$(AB\Gamma\Delta) = (AZH\Delta) = A\Delta \cdot AZ = B\Gamma \cdot AZ,$$

που είναι το ζητούμενο.

Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

### Θεώρημα III

**Το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.**



Σχήμα 9

Δηλαδή

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot v_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot v_\gamma.$$

### Απόδειξη

Με πλευρές AB και BΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ABΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot v_\alpha \quad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ABΓ και ΔAΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι  $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$  η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot v_\alpha = 2(AB\Gamma) \text{ ή } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha.$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

### Θεώρημα IV

**Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημι-αθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.**

Δηλαδή

$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot v,$$

όπου B, β οι βάσεις του τραπεζίου και v το ύψος του.

### Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

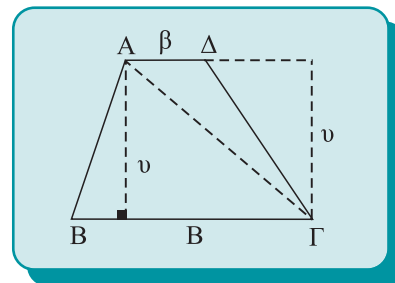
$$E = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} Β \cdot υ \quad \text{και} \quad (ΑΓΔ) = \frac{1}{2} β \cdot υ \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι

$$E = \frac{Β + β}{2} \cdot υ, \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$



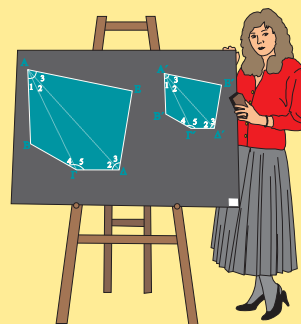
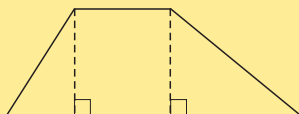
Σχήμα 10

### ΠΟΡΙΣΜΑ

**Το εμβαδόν τραpezίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.**

### Δραστηριότητα

Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραpezίου.



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

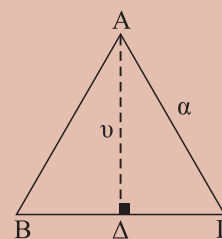
$$E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}.$$

### Απόδειξη

Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 11) το οποίο είναι και διάμεσος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$υ^2 = ΑΔ^2 = \alpha^2 - ΔΓ^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4},$$

$$\text{δηλαδή } υ = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2}, \text{ οπότε } E = \frac{1}{2} \alpha υ = \frac{1}{2} \alpha \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}.$$



Σχήμα 11

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η**

**Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.**

**Απόδειξη**

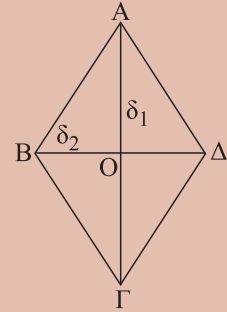
Είναι φανερό (σχ.12) ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) \quad (1).$$

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(AB\Delta) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot AO = \frac{1}{2} \delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4} \delta_1 \cdot \delta_2 \quad \text{και} \quad (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{4} \delta_1 \cdot \delta_2 \quad (2).$$

$$\text{Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι} \quad E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2 \quad (3).$$



Σχήμα 12

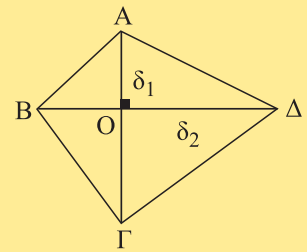
**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.

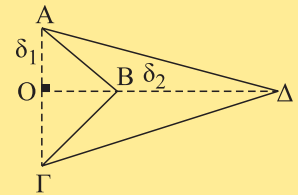
Πράγματι (σχ. 13, 14)

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta) &= (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta) = \\ &= \frac{1}{2} B\Delta \cdot AO + \frac{1}{2} B\Delta \cdot OG = \frac{1}{2} B\Delta (AO + OG) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot AG. \end{aligned}$$

Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η**

**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.**

**i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι**

$$(ABM) = (AM\Gamma).$$

**ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.**

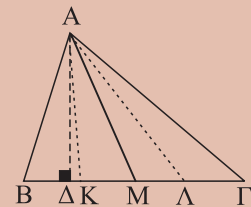
**Λύση**

**i)** Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(ABM) = \frac{1}{2} BM \cdot AD = \frac{1}{2} M\Gamma \cdot AD = (AM\Gamma)$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

**ii)** Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.

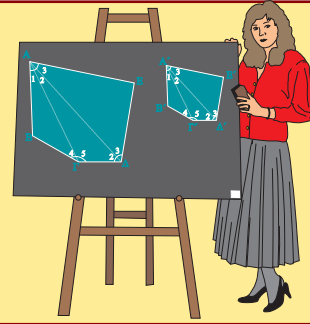


Σχήμα 15



## Δραστηριότητα

Να χωρίσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή  $A$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

## Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:

- i) τετραγώνου
- ii) ορθογωνίου
- iii) παραλληλογράμμου
- iv) τριγώνου
- v) τραπεζίου

2. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

3. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $\alpha=9$ ,  $\beta=4$  και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς  $x$ . Να βρεθεί το  $x$ .

4. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\alpha < \beta$ . Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα  $v_\alpha$  και  $v_\beta$ ;

5. Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;

6. Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εσωτερικό τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a = 4$  κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Delta Z$ . Να υπολογισθεί το εμβαδόν των  $AB\Gamma\Delta$ ,  $A\Delta Z$ ,  $ABZ$  και  $BZ\Gamma$ .

2. Αν  $M$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $A\Delta = 10$  τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ , τότε το άθροισμα  $(AMB) + (\Delta M\Gamma)$  είναι :  
A:25 B:40 Γ:50 Δ:75 E:100

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 6$ ,  $A\Gamma = 8$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να βρεθούν: i) το ύψος  $v_\beta$ , ii) το εμβαδόν  $(AB\Gamma)$ , iii) το ύψος  $v_\alpha$ .

4. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma = 10$  και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος  $v = 5$ . Πάνω στις πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  παίρνουμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, ώστε  $AE = Z\Gamma$ .

i) Να βρείτε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$ .

ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων  $AEZB$  και  $EZ\Gamma\Delta$  να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  ( $A\Delta // B\Gamma$ ) με  $\hat{A} = \hat{B} = 1^\circ$ ,  $A\Delta = 15m$ ,  $B\Gamma = 20m$  και  $AB = 12m$ . Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη  $A\Gamma$  και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν  $\Sigma$  είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , να αποδείξετε ότι

$$(\Sigma A\Gamma) + (\Sigma B\Delta) = (AB\Gamma).$$

2. Αν οι διάμεσοι  $A\Delta$  και  $BE$  τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνονται στο  $\Theta$  να αποδείξετε ότι:

$$i) (ABE) = (BEG), \quad ii) (A\Theta B) = (\Delta\Gamma E\Theta)$$

$$\text{και } iii) (B\Theta\Delta) = (A\Theta E).$$

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το βαρύκεντρό του  $\Theta$ . Από σημείο  $\Sigma$  της διαμέσου  $A\Delta$  φέρουμε τις κάθετες  $\Sigma E$ ,  $\Sigma Z$  στις  $A\Gamma$ ,  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$i) (AB\Sigma) = (A\Gamma\Sigma),$$

$$ii) AB \cdot \Sigma Z = A\Gamma \cdot \Sigma E \text{ και}$$

$$iii) (AB\Theta) = (B\Theta\Gamma) = \frac{1}{3} (AB\Gamma).$$

4. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $B\Gamma // A\Delta$ ). Αν  $M$  το μέσο της πλευράς του  $AB$ , να αποδείξετε ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = 2(M\Gamma\Delta).$$

5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες

πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

**6.** Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  με  $AB = 1$ ,  $ΑΓ = 2$  και  $\hat{A}=120^\circ$ . Με πλευρές τις  $AB$  και  $ΑΓ$  κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου  $ABΓ$  τα τετράγωνα  $ABΔΓ$  και  $ΑΓΖΘ$  αντίστοιχα. Τότε:

- i) να υπολογίσετε το τμήμα  $EΘ$ ,
- ii) να αποδείξετε ότι τα  $Δ$ ,  $E$ ,  $Θ$  είναι συνευθειακά και
- iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας  $BΓΖΘΕΔ$  είναι  $5 + \sqrt{3}$ .

**7.** Αν  $\omega$  είναι η γωνία των διαγωνίων  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  κυρτού τετραπλεύρου  $ABΓΔ$ , να αποδείξετε ότι

$$(ABΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \cdot \eta\mu\omega.$$

**8.** Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m<sup>2</sup>. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

### Σύνθετα θέματα

**1.** Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο  $ABΓΔ$ . Στις προεκτάσεις των ημιευθειών  $AB$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  και  $ΔΑ$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $Z$ ,  $H$ ,  $Θ$  και  $I$ , ώστε  $BZ=AB$ ,

$ΓH=ΒΓ$ ,  $ΔΘ=ΓΔ$  και  $ΑΙ=ΔΔ$ . Να αποδείξετε ότι

- i)  $(IΘA) = (AΘΔ) = (ΑΓΔ)$ ,
- ii)  $(IΘΔ) + (ZHB) = 2(ABΓΔ)$  και
- iii)  $(IZHΘ) = 5(ABΓΔ)$ .

**2.** Σε τρίγωνο  $ABΓ$  παίρνουμε το μέσο  $M$  της διαμέσου  $ΑΔ$ , το μέσο  $N$  του  $ΓΜ$  και το μέσο  $P$  του  $ΒΝ$ . Να αποδείξετε ότι  $(MNP) = \frac{1}{8} (ABΓ)$ .

**3.** Στις πλευρές  $ΒΓ$  και  $ΓΔ$  τετραγώνου  $ABΓΔ$  πλευράς  $a$  παίρνουμε τα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, ώστε

$$ΖΓ = ΗΔ = \frac{a}{4}.$$

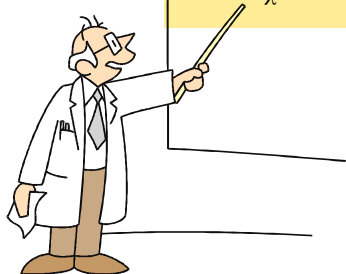
i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AZ$  και  $BH$  τέμνονται κάθετα σε σημείο  $K$ .

ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων:  $AK$ ,  $AH$  και  $KH$ .

iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AKHA$ .

**4.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και σημείο  $O$  στο εσωτερικό του τριγώνου  $ABΓ$ . Να αποδείξετε ότι  
i)  $(OAB) + (OΓΔ) = (ABΓ)$  και  
ii)  $(OΑΓ) + (OΒΓ) = (OΓΔ)$ .

**5.** Αν  $ABΓΔ$  και  $KΑΜΝ$  είναι ρόμβος πλευράς  $a$  και τετράγωνο πλευράς  $a$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $(ABΓΔ) \leq (KΑΜΝ)$ .



## 10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου  $ABΓ$ , με μήκη πλευρών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i)  $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$  (τύπος του Ήρωνα),  
όπου  $\tau$  η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii)  $E = \tau\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(iii)  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ , όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

### Απόδειξη

(i) Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι

$$\nu_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$E = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}a \frac{2}{a} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

(ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (I, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$E = (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB) = \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho + \frac{1}{2}c\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$

(iii) Είναι γνωστό ότι  $\beta\gamma = 2Rv_a$  (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι  $v_a = \frac{\beta\gamma}{2R}$  και με αντικατάσταση στον τύπο  $E = \frac{1}{2}av_a$  προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, το εμβαδόν E ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma.$$

### Απόδειξη

Αν  $\hat{A} < 1L$ , από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι  $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$ .

Αν  $\hat{A} > 1L$ , πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ. 17β) προκύπτει ότι:

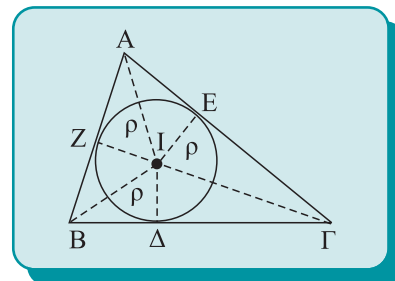
$$v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{\xi} = \gamma \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \gamma \cdot \eta\mu A.$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε  $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$  οπότε

$$E = \frac{1}{2}\beta v_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A.$$

Όταν  $\hat{A} = 1L$ , τότε  $v_\beta = \gamma$ , επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

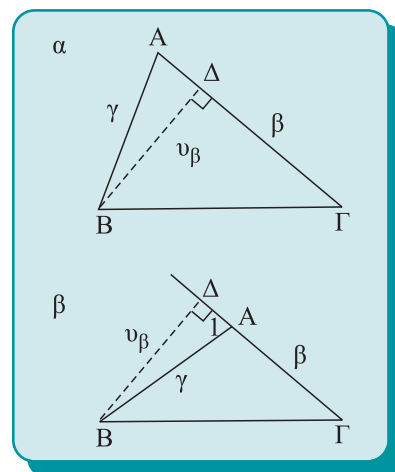
Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.



Σχήμα 16

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.



Σχήμα 17

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:  $\frac{a}{\eta\mu A} = \frac{b}{\eta\mu B} = \frac{c}{\eta\mu\Gamma} = 2R$ .

### Απόδειξη

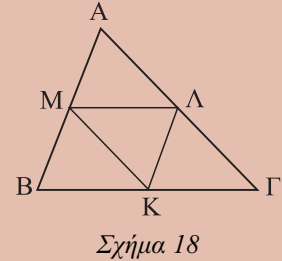
Από τις ισότητες  $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$  και  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$  προκύπτει ότι  $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

ή  $\eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$  ή  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$ . Όμοια προκύπτει  $\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R$ ,  $\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$ , από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\alpha = 13$ ,  $\beta = 14$  και  $\gamma = 15$  (σχ.18). Να υπολογίσετε:

- το εμβαδόν του,
- τα ύψη του,
- τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,
- το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του  $AB\Gamma$ .



#### Λύση

(i) Έχουμε  $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 21$  οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

(ii) Έχουμε  $E = \frac{1}{2} \alpha v_\alpha$  ή  $84 = \frac{1}{2} 13 v_\alpha$  ή  $v_\alpha = \frac{168}{13}$ . Όμοια βρίσκουμε ότι

$$v_\beta = 12 \text{ και } v_\gamma = \frac{56}{5}.$$

(iii) Από τους τύπους  $E = \tau \cdot \rho$  και  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$  προκύπτουν αντίστοιχα ότι  $\rho = 4$  και  $R = \frac{65}{8}$ .

(iv) Έχουμε  $ML = \frac{13}{2}$ ,  $MK = 7$ , και  $KL = \frac{15}{2}$ , οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι  $(KLM) = 21$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

#### Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Με τη βοήθεια του τύπου  $E = \frac{1}{2} \beta\gamma \cdot \eta\mu A$  να αποδεί-

ξετε ότι  $E \leq \frac{1}{2} \beta\gamma$ . Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $(AB\Gamma) = 9$  και  $\rho = 1,5$ . Ποια είναι η περίμετρός του;

3. Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;

#### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB = 18$ ,  $B\Gamma = 20$  και  $A\Gamma = 34$ . Να βρείτε το εμβαδόν του.

2. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $A\Delta \parallel B\Gamma$ ) με  $B\Gamma = 25$ ,  $A\Delta = 11$ ,  $AB = 13$  και  $A\Gamma = 15$ . Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 4$ ,  $A\Gamma = 7$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να βρείτε το εμβαδόν του.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 1^\circ$ ) με  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 8$ . Να βρείτε:

i) το εμβαδόν,

ii) το ύψος  $v_\alpha$ ,

iii) την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου.

### Ασκήσεις Αποδεικτικές

1. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\beta\gamma = av_\alpha$  να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = 1\angle$ .

2. Αν  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $E < \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow A < 1\angle$ ,

ii)  $E = \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow A = 1\angle$ ,

iii)  $E > \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow A > 1\angle$ .

3. Αν δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

4. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} \neq 1\angle$  φέρουμε τα ύψη  $BZ$  και  $\Gamma H$ . Να αποδείξετε ότι  $(AZH) = (AB\Gamma) \sin^2 A$ .

5. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{v_\alpha} + \frac{1}{v_\beta} + \frac{1}{v_\gamma} = \frac{1}{\rho}.$$

### Σύνθετα θέματα

1. i) Δίνεται γωνία  $\chi\hat{O}\gamma$  και σταθερό σημείο  $K$  στο εσωτερικό αυτής. Από το  $K$  φέρουμε μεταβλητή ευθεία  $\varepsilon$  που τέμνει τις πλευρές  $Ox, Oy$  στα σημεία  $M, N$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)}$$
 είναι σταθερό.

ii) Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , σημείο  $K$  στο εσωτερικό του και τα τμήματα  $AA', BB'$  και  $\Gamma\Gamma'$  που διέρχονται από το  $K$ . Αν  $E_1, E_2, \dots, E_6$  είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων  $AK\Gamma', BK\Gamma', BA'K, \Gamma KA', \Gamma KB'$  και  $AKB'$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_5} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_4} + \frac{1}{E_6}.$$

2. Αν  $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$  είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι

$$(AB\Gamma) = (\tau - \alpha)\rho_\alpha = (\tau - \beta)\rho_\beta = (\tau - \gamma)\rho_\gamma.$$

3. Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε  $AB = \alpha, B\Gamma = \beta, \Gamma\Delta = \gamma$  και  $\Delta A = \delta$  να αποδείξετε ότι  $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$  (2<sup>ο</sup> Θεώρημα Πτολεμαίου).

## Εμβαδόν και ομοιότητα

### 10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με εμβαδά  $E$  και

$E'$  αντίστοιχα. Τότε είναι  $E = \frac{1}{2}av_\alpha$  και  $E' = \frac{1}{2}a'v_{\alpha'}$ , οπότε

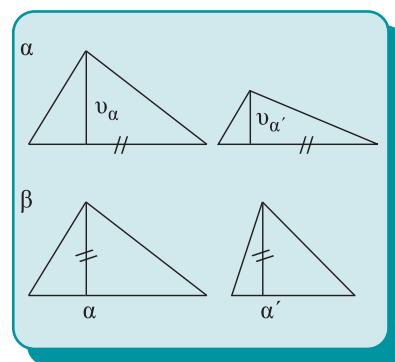
$$\frac{E}{E'} = \frac{av_\alpha}{a'v_{\alpha'}}. \text{ Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:}$$

• Αν  $\alpha = \alpha'$ , τότε  $\frac{E}{E'} = \frac{v_\alpha}{v_{\alpha'}}$  (σχ.19α).

• Αν  $v_\alpha = v_{\alpha'}$ , τότε  $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$  (σχ.19β).

Δηλαδή: αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

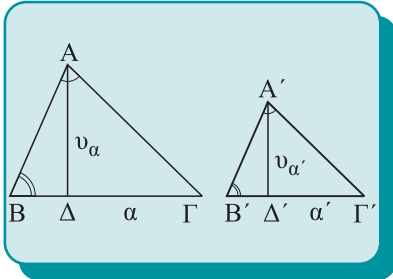
Στην περίπτωση που τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.



Σχήμα 19

**Θεώρημα I**

Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



Σχήμα 20

**Απόδειξη**

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' (σχ. 20) με

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{B'}$$

Τότε  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$  (1), όπου  $\lambda$  ο λόγος ομοιότητας. Αλλά,

όπως και παραπάνω, είναι  $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\alpha'}}$  (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $\frac{E}{E'} = \lambda^2$ .

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα II**

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

**Απόδειξη**

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ABΓΔΕ και A'B'Γ'Δ'Ε' (σχ. 21) με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \lambda \quad (1).$$

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α', οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

Αν  $E_1, E_2, E_3$  και  $E'_1, E'_2, E'_3$  είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

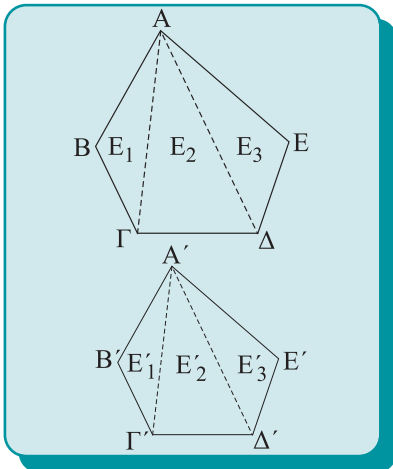
$$\frac{E_1}{E'_1} = \left( \frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \lambda^2, \quad \frac{E_2}{E'_2} = \left( \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} \right)^2 = \lambda^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{E_3}{E'_3} = \left( \frac{\Delta E}{\Delta'E'} \right)^2 = \lambda^2,$$

οπότε:

$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \frac{E_3}{E'_3} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{E'_1 + E'_2 + E'_3} = \frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')},$$

δηλαδή το ζητούμενο.



Σχήμα 21

Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

### Θεώρημα III

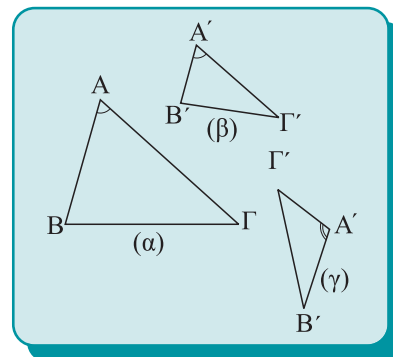
Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με  $\hat{A} = \hat{A}'$  (σχ.22 α,β) ή  $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$  (σχ.22 α,γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει  $\eta\mu A = \eta\mu A'$ , οπότε από τις ιδιότητες

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta\mu A \text{ και } E' = \frac{1}{2} \beta' \cdot \gamma' \eta\mu A'$$

με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι  $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$ , που είναι το ζητούμενο.



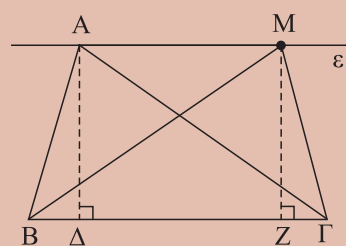
Σχήμα 22

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$ . Αν  $M$  σημείο της  $\varepsilon$ , να αποδείξετε ότι  $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$ .

#### Απόδειξη

Φέρουμε τα ύψη  $AD$  και  $MZ$  των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $MB\Gamma$  αντίστοιχα. Επειδή η  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ , προκύπτει ότι  $AD = MZ$  και επομένως τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $MB\Gamma$  είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση  $B\Gamma$  και ίσα ύψη.



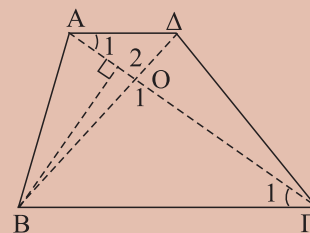
Σχήμα 23

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι:

$$(i) (OAB) = (O\Gamma\Delta), \quad (ii) \frac{(AO\Delta)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2} \text{ και}$$

$$(iii) \frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}.$$



Σχήμα 24



### Απόδειξη

(i) Είναι  $(OAB) = (BA\Delta) - (OAA) = (A\Gamma\Delta) - (OAA) = (O\Gamma\Delta)$ .

(ii) Τα τρίγωνα  $OAA$  και  $O\Gamma\Delta$  είναι όμοια ( $\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$ ) με λόγο ομοιότητας  $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$  και επομένως  $\frac{(OAA)}{(O\Gamma\Delta)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$ .

(iii) Τα τρίγωνα  $OAB$  και  $O\Gamma\Delta$  έχουν κοινή κορυφή  $B$  και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως  $\frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)} = \frac{OA}{O\Gamma}$ . Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων  $OAA$  και  $O\Gamma\Delta$  έχουμε

$$\text{ότι } \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}, \text{ οπότε } \frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

#### Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Δοο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $v_\beta = v_{\beta'}$  και

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2}. \text{ Τότε ο λόγος } \frac{\beta}{\beta'} \text{ είναι}$$

$$A: \frac{2}{5} \quad B: \frac{3}{4} \quad \Gamma: \frac{3}{2} \quad \Delta: \frac{9}{4} \quad E: \frac{4}{9}$$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δοο ρόμβοι  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  έχουν  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{5}$ . Να υπολογισθεί ο λόγος  $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')}$ .

3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) είναι ισόδυναμο με ένα τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  που έχει  $A'B' \cdot A'\Gamma' = 36$ . Αν είναι  $A + A' = 2\angle$ , ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;

#### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δοο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\alpha = \alpha'$  και  $v_\alpha = \frac{3}{2}v_{\alpha'}$ . Αν το εμβαδόν του  $AB\Gamma$  είναι  $30m^2$ , να βρείτε το εμβαδόν του  $A'B'\Gamma'$ .

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με εμβαδόν  $20m^2$ . Αν  $M$  σημείο στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $AB = 2BM$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $M\Gamma\Delta$ .

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  των προεκτάσεων των  $BA$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα, προς το  $A$ , ώστε  $A\Delta = \frac{2}{3}AB$  και  $AZ = \frac{1}{2}A\Gamma$ . Αν το εμβαδόν του

τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $30m^2$ , να βρείτε το εμβαδόν του  $A\Delta Z$ .

4. Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει εμβαδόν  $75m^2$ . Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  και  $M$  σημείο του  $A\Delta$  τέτοιο, ώστε  $\frac{AM}{M\Delta} = \frac{3}{2}$ . Από το  $M$  φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά  $B\Gamma$ , που τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραapeζίου  $BEZ\Gamma$ .

5. Δοο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\hat{B} + \hat{B}' = 2\angle$ . Να αποδείξετε ότι  $\alpha\beta' = \alpha'\beta$ .

#### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εσωτερικό του σημείο  $P$ . Αν οι  $AP$ ,  $BP$  και  $\Gamma P$  τέμνουν τις  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$  στα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$i) \frac{PA}{A\Delta} = \frac{(B\Gamma)}{(AB\Gamma)}, \text{ ii) } \frac{PA}{A\Delta} + \frac{PE}{BE} + \frac{PZ}{\Gamma Z} = 1 \text{ και}$$

$$iii) \frac{PA}{A\Delta} + \frac{PB}{BE} + \frac{P\Gamma}{\Gamma Z} = 2.$$

2. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B}, \hat{\Gamma} < 1\angle$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Στο ημιεπίπεδο  $(B\Gamma, A)$  φέρουμε  $Bx \perp B\Gamma$  και  $\Gamma y \perp B\Gamma$ . Πάνω στις  $Bx$ ,  $\Gamma y$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $E$  και  $Z$ , ώστε να είναι  $BE = \Gamma Z = 2A\Delta$ . Αν  $M$ ,  $N$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$(EBM) + (\Gamma ZN) = 2(AB\Gamma).$$

3. Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο κάθετες χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $(BO\Delta) = (AO\Gamma)$ .



4. Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ . Ευθεία παράλληλη προς τη  $BΓ$ , τέμνει την  $AB$  στο  $Δ$  και την  $ΑΓ$  στο  $Ε$ . Να αποδείξετε ότι  $(ABΔ)^2 = (ΑΔΕ)(ABΓ)$ .

5. Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου  $ABΓΔ$  κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα  $ABEZ$ ,  $BΓΗΘ$ ,  $ΓΔΙΚ$  και  $ΑΔΛΜ$ . Να αποδείξετε ότι  $(AMZ) + (ΓΗΚ) = (BΘΕ) + (ΔΙΛ)$ .

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABΓ$  ( $\hat{A} = 1\perp$ ) και τρία πολύγωνα  $P_1$ ,  $P_2$  και  $P_3$  όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις  $BΓ$ ,  $ΓΑ$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $(P_2) + (P_3) = (P_1)$ , όπου  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  και  $(P_3)$  τα εμβαδά τους.

### Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε τετράπλευρο  $ABΓΔ$  και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  και  $E_4$  είναι τα εμβαδά των τριγώνων  $AOB$ ,  $BOΓ$ ,  $ΓΟΔ$  και  $ΔΟΑ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$ . Αν υποθέσουμε ότι η  $ΑΔ$  είναι παράλληλη προς τη  $BΓ$ , τότε να αποδείξετε ότι  
i)  $E_1 = E_3$ , (ii)  $E_1^2 = E_2 \cdot E_4$ ,

iii)  $E_1 \leq \frac{1}{4} E$ , όπου  $E = (ABΓΔ)$ .

2. Από εσωτερικό σημείο  $\Sigma$  τριγώνου  $ABΓ$  φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι

i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  είναι όμοιο με το  $ABΓ$ ,

ii)  $\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} = \sqrt{E}$ , όπου  $E = (ABΓ)$ .

3. Σε τρίγωνο  $ABΓ$  φέρουμε τις διχοτόμους  $ΑΔ$ ,  $BE$  και  $ΓΖ$ . Να αποδείξετε ότι

$$i) (\Delta EZ) = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)} (ABΓ),$$

$$ii) (\Delta EZ) \leq \frac{1}{4} (ABΓ).$$

4. Δίνεται το τρίγωνο  $ABΓ$  και σημεία  $K, Λ$  των πλευρών  $AB, ΑΓ$  αντίστοιχα. Από τα  $K, Λ$  να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.



## Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

### 10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται **τετραγωνισμός** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

**Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.**

**Λύση**

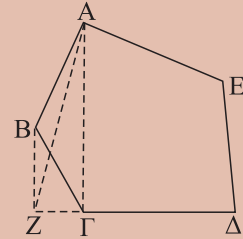
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25) Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ.

Επομένως,  $(ΑΒΓ) = (ΑΖΓ)$ , οπότε

$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ)$$

δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.



Σχήμα 25

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

**Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.**

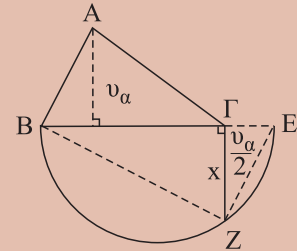
**Λύση**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα

$ΓΕ = \frac{υ_α}{2}$  και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:

$$ΓΖ^2 = ΒΓ \cdot ΓΕ = α \cdot \frac{υ_α}{2} = \frac{1}{2} α υ_α = (ΑΒΓ),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.



Σχήμα 26

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένον πλήθος επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμια επίπεδα σχήματα; Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

## Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;
2. Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;
3. Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;
4. Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών  $\alpha, \beta$ .

2. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών  $\alpha, \beta$  αντίστοιχα.
3. Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.
4. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και σημείο  $K$  της πλευράς του  $A\Delta$ .  
i) Να μετασχηματισθεί το  $AB\Gamma\Delta$  σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το  $K$  και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία  $B\Gamma$ .  
ii) Να αχθεί από το  $K$  μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.



## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ευθεία  $\varepsilon // B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i)  $(B\Delta E) = (\Gamma\Delta E)$ , ii)  $(BAE) = (\Gamma A\Delta)$ ,  
iii)  $(BAE) + (\Gamma A\Delta) = (AB\Gamma)$ , με την επιπλέον υπόθεση ότι τα  $\Delta, E$  είναι μέσα των  $AB, A\Gamma$  αντίστοιχα.

2. Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  της πλευράς του

$B\Gamma$ , ώστε  $B\Delta = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} B\Gamma$ ,  $\lambda > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $(AB\Delta) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} (AB\Gamma)$ , ii)  $(AB\Delta) \leq \frac{1}{4} (AB\Gamma)$ ,

iii)  $(A\Gamma\Delta) \geq \frac{3}{4} (AB\Gamma)$ .

3. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι  $\frac{B\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$  (Θεώρημα διχοτόμου).

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\beta = 3\gamma$ ,  $A\Delta$  μία διχοτόμος του και  $BE$  μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:

i)  $(AB\Delta) = \frac{1}{3} (A\Delta\Gamma)$ ,

ii)  $(AB\Delta) \cdot (\Delta E\Gamma) = (A\Delta\Gamma) \cdot (BE\Delta)$ ,

iii)  $(\Delta E\Gamma) = \frac{3}{8} (AB\Gamma)$ .

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 6\text{cm}$  και  $\hat{A} = 120^\circ$ .

i) Να βρεθεί το εμβαδόν του,

ii) Αν  $E$  είναι σημείο της  $A\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $AE = \frac{1}{3} A\Gamma$  και  $A\Delta$  το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .

iii) Αν η παράλληλη από το  $A$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $\Delta E$  στο  $Z$ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $A E Z$ .

6. Θεωρούμε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $A\Delta \parallel B\Gamma$ ) και τα μέσα  $K, \Lambda$  των  $A\Delta, B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i)  $(AB\Lambda K) = (K\Lambda\Gamma\Delta)$ ,

ii)  $(MAB) = (M\Gamma\Delta)$ , για οποιοδήποτε σημείο  $M$  του  $K\Lambda$ .

7. Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 1^\circ$ ) με  $AB = \gamma$ . Διαιρούμε την πλευρά  $AB$  σε  $n$  ίσα τμήματα ( $n$  φυσικός,  $n \geq 2$ ) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την  $A\Gamma$ .

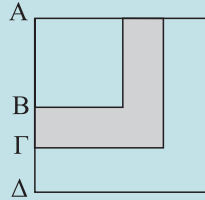
i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του  $\gamma$  τα εμβαδά των  $n$  σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να αποδείξετε ότι

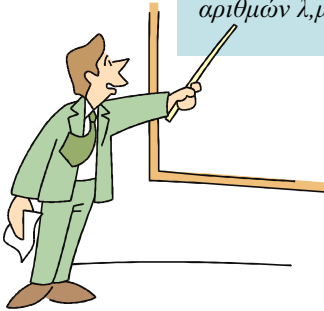
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

8. Δύο τετράγωνα  $AB\Gamma\Delta$  και  $\Delta E Z H$  έχουν κοινή την κορυφή  $\Delta$  και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές  $B\Gamma$  και  $E Z$  έχουν κοινό μέσο  $M$ , να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος  $ABMZH\Delta$ .

**9.** Τρία τετράγωνα των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή  $A$  και είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο, όπως δείχνει το σχήμα. Αν  $B\Gamma = \Gamma\Delta$  και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.



**10.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τρεις θετικοί αριθμοί  $\lambda, \mu, \nu$ . Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη  $B\Gamma$  που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών  $\lambda, \mu, \nu$ .



**11.** i) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εσωτερικό του σημείο  $M$ . Αν η  $AM$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

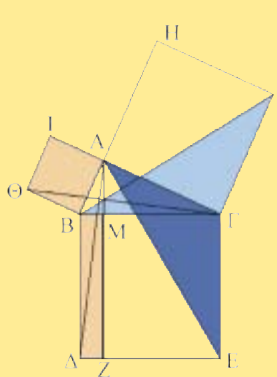
$$\alpha) \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{(AMB)}{(AM\Gamma)}, \quad \beta) \frac{M\Delta}{A\Delta} = \frac{(BM\Gamma)}{(AB\Gamma)},$$

ii) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εσωτερικό του σημείο  $M$ . Αν οι ευθείες  $AM$ ,  $BM$  και  $\Gamma M$  τέμνουν τις πλευρές  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  και  $AB$  στα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι

$$\frac{AE}{E\Gamma} + \frac{AZ}{ZB} = \frac{AM}{M\Delta}.$$

### ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποδεικνύεται στην προτελευταία πρόταση (Πρόταση 47) του Βιβλίου Ι. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}$  ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της  $B\Gamma$  είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της  $AB$  και  $A\Gamma$ . Φέρουμε την  $AZ$  παράλληλη στις  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  και τις ευθείες  $A\Delta$  και  $\Theta\Gamma$ . Αφού οι γωνίες  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{B}\hat{A}\hat{I}$  είναι ορθές, προκύπτει ότι τα τμήματα  $IA$ ,  $A\Gamma$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο και τα τμήματα  $BA$ ,  $AH$ . Αφού οι γωνίες  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Theta}\hat{B}\hat{A}$  είναι ορθές, έχουμε ότι  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Theta}\hat{B}\hat{A}$ , οπότε:  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Theta}\hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  ή  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Theta}\hat{B}\hat{\Gamma}$ .



Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων»

Αφού  $\Delta B = B\Gamma$ ,  $\Theta B = BA$  και  $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{A} = \hat{\Theta}\hat{B}\hat{\Gamma}$ , η βάση  $A\Delta$  ισούται με τη βάση  $\Theta\Gamma$  και το  $AB\Delta$  ισούται με το  $\Theta B\Gamma$ . Τώρα το παραλληλόγραμμο  $BMZA$  είναι διπλάσιο από το  $AB\Delta$ , και το τετράγωνο  $IAB\Theta$  είναι διπλάσιο από το  $\Theta B\Gamma$ . Επομένως, το παραλληλόγραμμο  $BMZA$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $IAB\Theta$ . Ομοία, αν φέρουμε την  $AE$  και τη  $BK$  μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο  $GMZE$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $HK\Gamma A$ . Επομένως, το τετράγωνο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων  $IAB\Theta$  και  $HK\Gamma A$ .

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η έννοια του εμβαδού. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων (ή μερών του) που απαιτούνται για να καλύψουν την έκτασή του. Δεχόμαστε την αλήθεια των εξής ιδιοτήτων:

- Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Ευθύγραμμα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα.

Με σκοπό την παραγωγή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού βασικών ευθύγραμμων σχημάτων δεχόμαστε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς  $\alpha$  είναι  $E = \alpha^2$ . Στηριζόμενοι σ' αυτό αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν  $E$  ορθογώνιου με πλευρές  $\alpha, \beta$  είναι  $E = \alpha\beta$ . Στη συνέχεια μετασχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού  $E$  ενός παραλληλογράμμου. Θεωρώντας πλέον το τρίγωνο ως το μισό κατάλληλου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος χωρίζοντας ένα τραπέζιο σε δύο τρίγωνα βρίσκουμε ότι το εμβαδόν  $E$  ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{B + \beta}{2} \nu.$$

Στη συνέχεια δίνουμε και άλλους τύπους για το εμβαδόν τριγώνου.

Ως πόρισμα αυτών καταλήγουμε στο Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.

Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{ή} \quad \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \quad \text{ισχύει ότι} \quad \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}.$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τετράγωνο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τρίγωνο και αυτό σε ισοδύναμο τετράγωνο.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΕΜΒΑΔΟΝ

Πολυγώνων

Πολυγωνικών Επιφανειών

$$(\Pi.E.) = (\Pi_1) + (\Pi_2) + \dots + (\Pi_v)$$

**Τετραγώνου:**  $E = \alpha^2$

**Ορθογωνίου:**  $E = \alpha \cdot \beta$

**Παραλληλογράμμου:**  $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$

**Τριγώνου:**  $E = \frac{1}{2} \alpha \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \beta \upsilon_\beta = \frac{1}{2} \gamma \upsilon_\gamma$

$$\begin{aligned} & \rightarrow E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} \\ & \rightarrow E = \tau \rho \\ & \rightarrow E = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R} \\ & \rightarrow E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta_\mu A = \frac{1}{2} \gamma \alpha \eta_\mu B = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta_\mu \Gamma \end{aligned}$$

**Τραπεζίου:**  $E = \frac{1}{2} (B + \beta) \cdot \upsilon$

**Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους):**  $E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$

Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'}, \text{ αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \\ \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, \text{ αν } \alpha = \alpha' \\ \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, \text{ αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \\ \lambda^2, \text{ αν } \overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας} \end{cases}$$

$$\frac{(AB\Gamma \dots K)}{(A'B'\Gamma' \dots K')} = \lambda^2, \text{ αν } AB\Gamma \dots K \approx A'B'\Gamma' \dots K' \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας}$$

Τετραγωνισμός πολυγώνου

- Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο
- Μετασχηματισμός τριγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο