

## **Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία**

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, θα τα ταξινομήσουμε και θα εξετάσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ως εφαρμογές θα αποδειχθούν κάποιες βασικές προτάσεις για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και τις παράλληλες ευθείες.



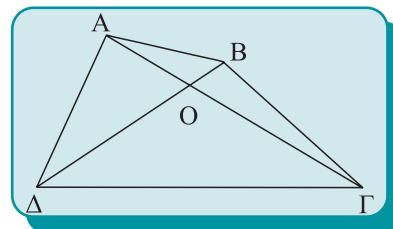
*Josef Albers (Γερμανός, 1888-1976).  
«Αφιέρωμα στο τετράγωνο: οπτασία», λάδι σε σανίδα, 1959.  
Συλλογή Μουσείου Solomon R. Guggenheim, Νέα Υόρκη.*

## 5.1 Εισαγωγή

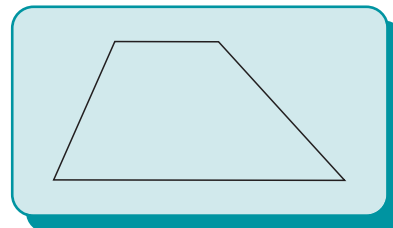
Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.

Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

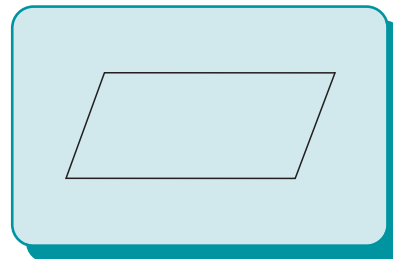
Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται **τραπέζιο** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται **παραλληλόγραμμο** (σχ.3).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

## 5.2 Παραλληλόγραμμο

### Παραλληλόγραμμο

#### Ορισμός

**Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AD \parallel BG$ .

#### • Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

#### Απόδειξη των i), ii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 5). Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$  (εντός εναλλάξ).

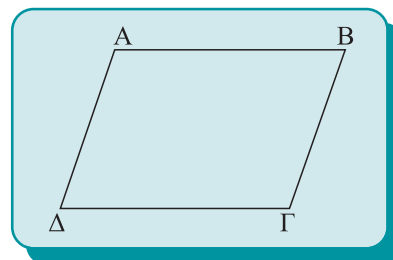
ΒΔ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \phi$  (εντός εναλλάξ).

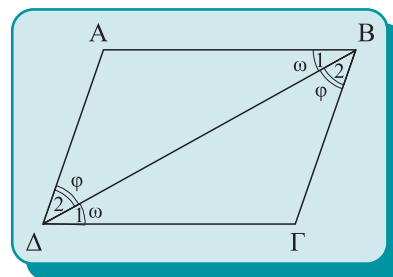
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε  $AB = \Gamma\Delta$  και  $AD = BG$ . Επίσης έχουμε  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} = \hat{\Delta} = \phi + \omega$ .

#### Απόδειξη της ιδιότητας iii)

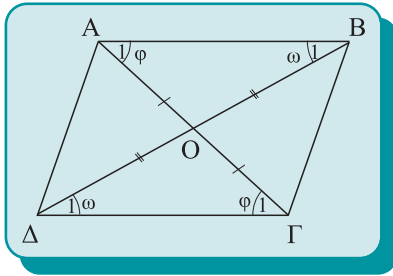
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:



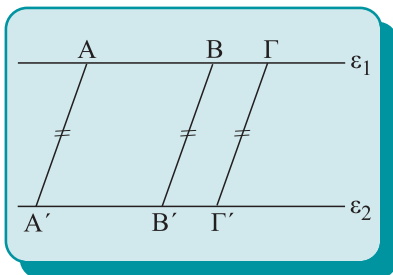
Σχήμα 4



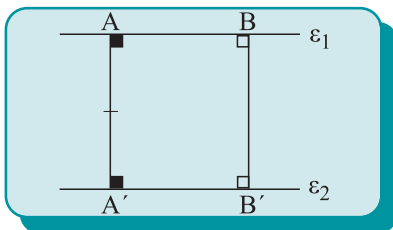
Σχήμα 5



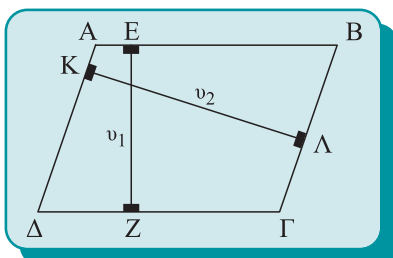
Σχήμα 6



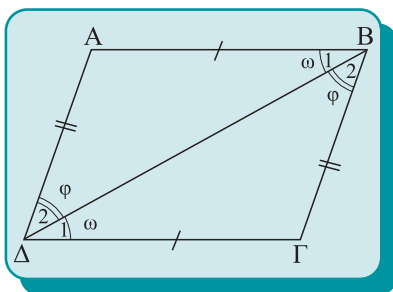
Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

$$AB = \Gamma\Delta$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Άρα, τα τρίγωνα OAB, OΓΔ είναι ίσα, οπότε  $OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$ .

## ΠΟΡΙΣΜΑ I

**Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.**

Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

## ΠΟΡΙΣΜΑ II

**Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).**

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται **απόσταση** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).

## • Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- (ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγωνιοί του διχοτομούνται.

## Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ABΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

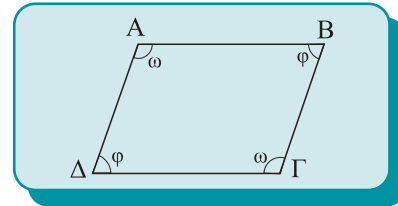
(i) Έστω  $AB = \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma$  (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ABΔ και BΓΔ που είναι ίσα, γιατί  $AB = \Gamma\Delta$ ,  $A\Delta = B\Gamma$  και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$  και  $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ , οπότε  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma$ , δηλαδή το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

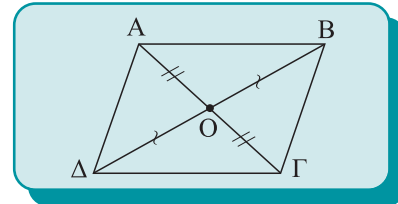
(ii) Έστω  $AB \parallel \Gamma\Delta$  (σχ.10). Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma\Delta$  είναι ίσα, γιατί  $AB = \Gamma\Delta$ ,  $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$  και η  $B\Delta$  είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν  $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$  και  $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$  (σχ.11) η σχέση  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$  γράφεται  $2\omega + 2\varphi = 4\angle$  ή  $\varphi + \omega = 2\angle$ . Επομένως, έχουμε ότι  $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$ , οπότε  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$ , οπότε  $A\Delta \parallel B\Gamma$ , δηλαδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω  $AO = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$  (σχ.12). Τα τρίγωνα  $AOB$  και  $GO\Delta$ , καθώς και τα τρίγωνα  $AO\Delta$  και  $BO\Gamma$  είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma$ , δηλαδή το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

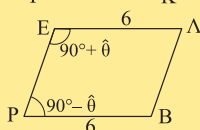
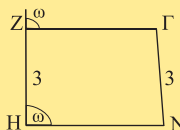
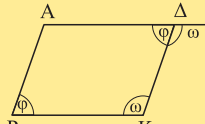
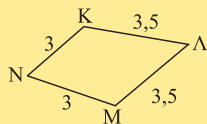
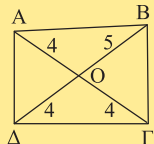
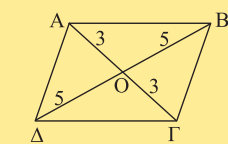


Σχήμα 12

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

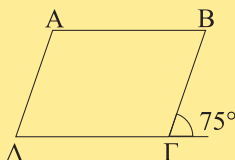
#### Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;

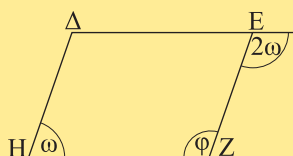


2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



4. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  του παραλληλογράμμου  $\Delta EZH$ .



5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες.

☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

#### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Η διχοτόμος της  $\hat{A}$  τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = B\Gamma$ .

2. Έστω  $O$  το κέντρο παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Αν  $E$  και  $Z$  σημεία των  $OA$  και  $OG$  αντίστοιχα, ώστε  $OE = OZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BE\Delta Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω  $E$  και  $Z$ , τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο.

ii) οι  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  και  $EZ$  συντρέχουν.

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Αν η παράλληλη από το  $E$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $AE = BZ$ .

#### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $ME \parallel AB$  ( $E$  σημείο

του  $ΑΓ$ ) και  $ΜΔ//ΑΓ$  ( $Δ$  σημείο του  $ΑΒ$ ). Να αποδείξετε ότι  $ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ$ .

**2.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και  $Ε$  σημείο της  $ΑΓ$ . Φέρουμε  $ΔΖ//ΒΕ$  ( $Ζ$  σημείο του  $ΑΓ$ ). Να αποδείξετε ότι  $ΔΕ//ΒΖ$ .

**3.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Προεκτείνουμε τη  $ΔΓ$  κατά τμήμα  $ΓΕ = ΔΓ$  και τη  $ΔΑ$  κατά τμήμα  $ΑΖ = ΔΑ$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Ζ$ ,  $Β$  και  $Ε$  είναι συνευθειακά.

**4.** Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$ . Στις προεκτάσεις των διαμέσων  $ΒΔ$  και  $ΓΕ$  παίρνουμε σημεία  $Η$  και  $Ζ$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $ΔΗ = ΒΔ$  και  $ΖΕ = ΓΕ$ . Να αποδείξετε ότι  
i)  $ΑΗ = ΑΖ$ ,  
ii) τα σημεία  $Ζ$ ,  $Α$  και  $Η$  είναι συνευθειακά.

**5.** Από σημείο  $Α$  να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα  $λ$ .

χα, ώστε  $ΑΕ = ΓΗ$  και  $ΒΖ = ΔΚ$ . Να αποδείξετε ότι  
i) το τετράπλευρο  $ΕΖΗΚ$  είναι παραλληλόγραμμο,  
ii) οι  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΕΗ$  και  $ΚΖ$  συντρέχουν.

**2.** Προεκτείνουμε την πλευρά  $ΑΒ$  παραλληλογράμιου  $ΑΒΓΔ$  κατά τμήμα  $ΒΕ = ΒΓ$  και επί της ημιευθείας  $ΔΑ$  θεωρούμε σημείο  $Ζ$ , ώστε  $ΔΖ = ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι  $ΖΓΕ = 90^\circ$ .

**3.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Προεκτείνουμε την  $ΑΒ$  κατά τμήμα  $ΒΕ = ΒΓ$  και την  $ΑΔ$  κατά τμήμα  $ΔΖ = ΔΓ$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Ζ$ ,  $Γ$  και  $Ε$  είναι συνευθειακά.

**4.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ ) και σημείο  $Δ$  της  $ΑΓ$ . Προεκτείνουμε την  $ΑΒ$  κατά τμήμα  $ΒΕ = ΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι η  $ΒΓ$  διχοτομεί τη  $ΔΕ$ .

**5.** Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

### Σύνθετα θέματα

**1.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και τα σημεία  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$  και  $Κ$  των πλευρών του  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  και  $ΑΔ$  αντίστοι-



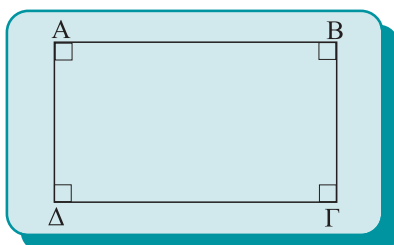
## Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το **ορθογώνιο**, το **ρόμβο** και το **τετράγωνο**.

### 5.3 Ορθογώνιο

#### Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές**.

#### • Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

## Απόδειξη

Έστω  $ΑΒΓΔ$  ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΑΔΓ$  είναι ίσα ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $ΑΔ$  κοινή,  $ΑΒ = ΔΓ$ ), οπότε  $ΑΓ = ΒΔ$ .

## • Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

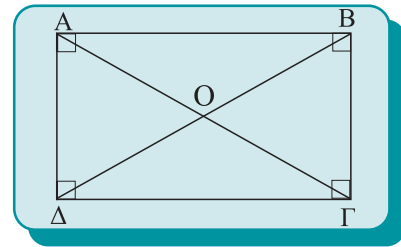
- (i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
- (ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
- (iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες**.

## Απόδειξη

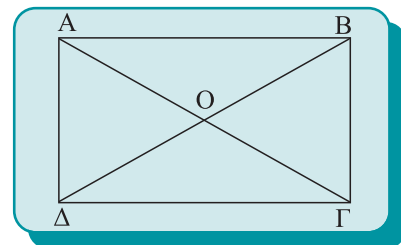
(i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.  
 ii) Έστω  $ΑΒΓΔ$  παραλληλόγραμμο με  $ΑΓ = ΒΔ$ . Τότε τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΑΔΓ$  είναι ίσα ( $ΑΒ = ΔΓ$ ,  $ΑΓ = ΒΔ$ ,  $ΑΔ$  κοινή), οπότε  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ . Αλλά  $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$ , οπότε  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ . Επομένως, το  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο.

(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι  $360^\circ$ .

(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.



Σχήμα 14



Σχήμα 15

## 5.4 Ρόμβος

### Ορισμός

**Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

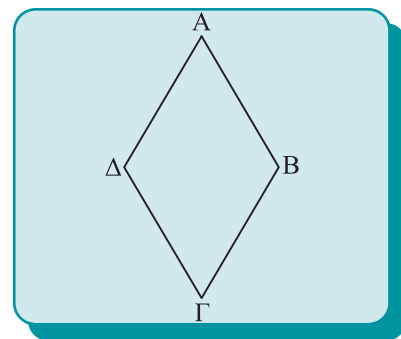
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες**.

## • Ιδιότητες του ρόμβου

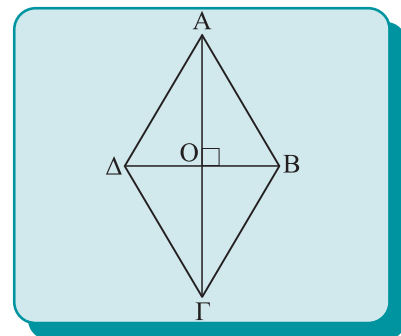
- (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται **κάθετα**.
- ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **διχοτομούν τις γωνίες του**.

## Απόδειξη

Έστω  $ΑΒΓΔ$  ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο  $ΑΒΔ$  είναι ισοσκελές, η διάμεσος του  $ΑΟ$  είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ . Επομένως  $ΑΓ \perp ΒΔ$  και η  $ΑΓ$  διχοτομεί την  $\hat{A}$ . Όμοια η  $ΑΓ$  διχοτομεί τη  $\hat{\Gamma}$  και η  $ΒΔ$  τις  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta}$ .



Σχήμα 16

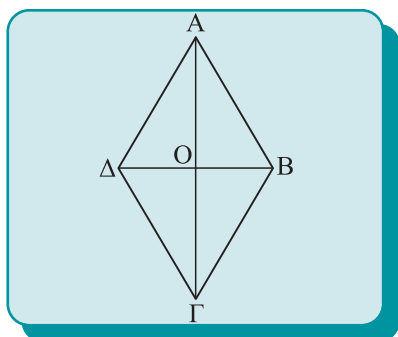


Σχήμα 17

## • Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.



Σχήμα 18

### Απόδειξη

- (i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
- (iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με  $ΑΓ \perp ΒΔ$ . Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή  $ΑΓ \perp ΒΔ$ . Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε  $ΑΒ = ΑΔ$ . Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
- (iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της  $\hat{A}$ . Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

## 5.5 Τετράγωνο

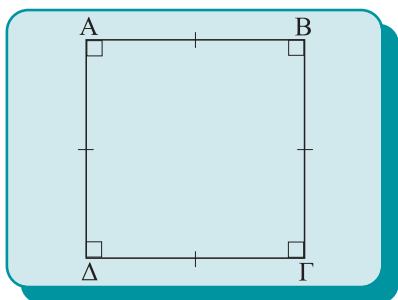
### Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

### • Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- (ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



Σχήμα 19

### • Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



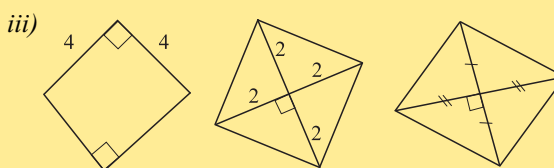
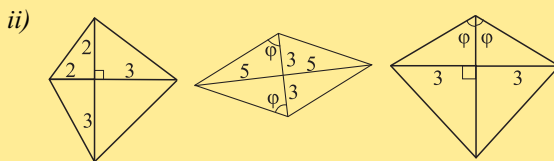
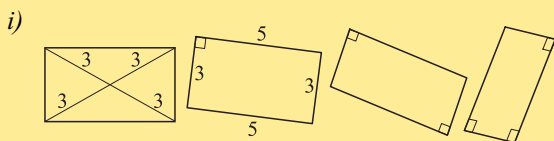
Αποδεικνύεται ότι ένα **παράλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι  
i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα,  
ποια όχι και γιατί;



**2.** Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι:

i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

**3.** Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;

i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

**4.** Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:

i) Τετράγωνο – Ρόμβος ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο  
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

**5.** Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:

i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐

ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐

iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐

iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** Σε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  φέρουμε  $AE \perp ΔΓ$  και  $ΓΖ \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι το  $AZΓE$  είναι ορθογώνιο.

**2.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με κέντρο  $O$  και  $BD = 2AG$ . Αν  $E, Z$  είναι τα μέσα των  $OB$  και  $OA$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $AEGZ$  είναι ορθογώνιο.

**3.** Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

**4.** Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**5.** Δίνεται ρόμβος  $ABΓΔ$  με κέντρο  $O$ . Παίρνουμε δύο σημεία  $E$  και  $Z$  της  $AG$ , ώστε  $OE = OZ = OB = OA$ . Να αποδείξετε ότι το  $ΔEBZ$  είναι τετράγωνο.

**6.** Δίνεται τετράγωνο  $ABΓΔ$ . Στις πλευρές  $AB, BΓ, ΓΔ$  και  $ΔA$  παίρνουμε σημεία  $K, Λ, Μ$  και  $N$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $AK = BL = ΓM = ΔN$ . Να αποδείξετε ότι το  $KΛΜΝ$  είναι τετράγωνο.

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διχοτόμος του  $B\Delta$  και  $M$  το μέσο της  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AB$  στο  $E$ . Αν η  $EM$  τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $Z$  να αποδείξετε ότι το  $\Delta EBZ$  είναι ρόμβος.
2. Στις πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$ , τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, ώστε  $AE = BZ$ . Να αποδείξετε ότι  
i)  $AZ = \Delta E$ , ii)  $AZ \perp \Delta E$ .
3. Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το σημείο τομής των  $AZ$  και  $BE$  και  $\Theta$  το σημείο τομής των  $\Delta Z$  και  $\Gamma E$ , να αποδείξετε ότι το  $E\Theta ZH$  είναι ρόμβος.
4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.



### Σύνθετα θέματα

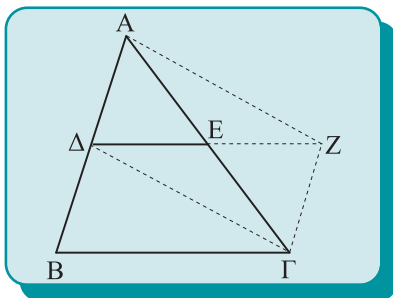
1. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{B} = 45^\circ$ . Από το μέσο  $M$  της  $\Gamma\Delta$  φέρουμε κάθετο πάνω στη  $\Gamma\Delta$  και έστω  $E$  και  $Z$  τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το  $\Delta E\Gamma Z$  είναι τετράγωνο.
2. Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  φέρουμε  $BE \perp A\Gamma$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta BE$  τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = \Gamma Z$ .
3. Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλευρού τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

## Εφαρμογές των παραλληλογράμων

### 5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

#### Θεώρημα I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  των  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι  $\Delta E \parallel \Gamma B$  και  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ .

Προεκτείνουμε τη  $\Delta E$  κατά τμήμα  $EZ = \Delta E$ . Το τετράπλευρο  $\Delta\Delta\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα  $\Delta\Delta \parallel \Gamma Z$ , οπότε  $\Delta B \parallel \Gamma Z$ , αφού  $\Delta\Delta = \Delta B$ . Έτσι το τετράπλευρο  $\Delta Z\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i)  $\Delta Z \parallel B\Gamma$  άρα  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και

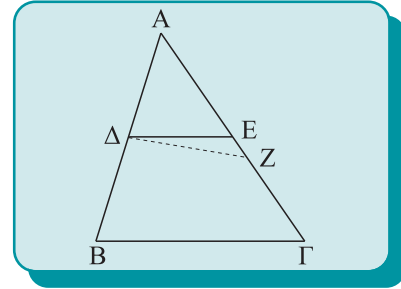
(ii)  $\Delta Z = B\Gamma$  ή  $2\Delta E = B\Gamma$  ή  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ .

#### Θεώρημα II

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

## Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ας φέρουμε από το μέσο  $\Delta$  της  $AB$  την παράλληλη προς την  $B\Gamma$  που τέμνει την  $AG$  στο  $E$  (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το  $E$  είναι το μέσο της  $AG$ . Έστω ότι το  $E$  δεν είναι μέσο της  $AG$ . Αν  $Z$  είναι το μέσο της  $AG$ , το τμήμα  $\Delta Z$  ενώνει τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$ , οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα  $\Delta Z \parallel B\Gamma$ . Έτσι, όμως, έχουμε από το  $\Delta$  δύο παράλληλες προς τη  $B\Gamma$ , που είναι άτοπο. Άρα το  $E$  είναι μέσο της  $AG$ .



Σχήμα 21

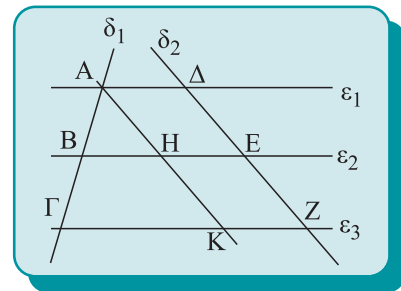
## Θεώρημα III

**Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.**

## Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  οι οποίες τέμνουν την  $\delta_1$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα  $AB, B\Gamma$  (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία  $\delta_2$  τέμνει τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  στα σημεία  $\Delta, E, Z$  αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι  $DE = EZ$ .

Φέρουμε  $AK \parallel \Delta Z$ . Τότε τα τετράπλευρα  $A\Delta EH$  και  $EZKH$  είναι παραλληλόγραμμα, οπότε  $AH = \Delta E$  (1) και  $HK = EZ$  (2). Στο τρίγωνο  $AK\Gamma$  το  $B$  είναι το μέσο της  $AG$  και  $BH \parallel \Gamma K$ . Άρα το  $H$  είναι μέσο της  $AK$ , δηλαδή  $AH = HK$  (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι  $\Delta E = EZ$ .



Σχήμα 22

## • Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

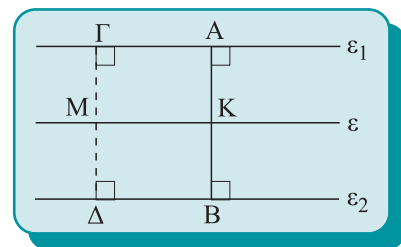
Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και ένα τμήμα  $AB = v$  κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Αν από το μέσο  $K$  της  $AB$  φέρουμε την ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη προς τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , παρατηρούμε ότι κάθε σημείο  $M$  της  $\varepsilon$

**ισαπέχει** από τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , αφού  $MG = MD = \frac{v}{2}$ .

**Αντίστροφα**, αν ένα σημείο  $M$  ισαπέχει από τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , το  $M$  τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει

$$MG + MD = GD = v, \text{ οπότε } MG = MD = \frac{v}{2}.$$

Έτσι τα τετράπλευρα  $MGAK$  και  $M\Delta BK$  είναι παραλληλόγραμμα ( $MG \parallel AK, M\Delta \parallel KB$ ), οπότε  $MK \parallel \varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Επομένως, το  $M$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .



Σχήμα 23

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

**Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι μία ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη προς τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.**  
Η ευθεία  $\varepsilon$  λέγεται **μεσοπαράλληλος** των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

**Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.**

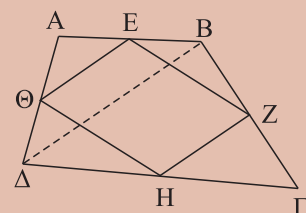
### Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $E, Z, H, \Theta$  των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.

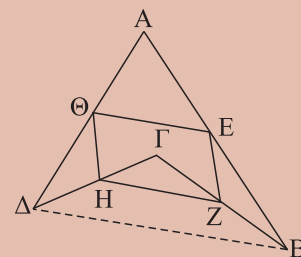
Φέρουμε τη διαγώνιο  $B\Delta$  (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα  $E$  και  $\Theta$  είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου  $AB\Delta$ , οπότε  $E\Theta \parallel \frac{B\Delta}{2}$  (1).

Όμοια από το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  προκύπτει ότι  $ZH \parallel \frac{B\Delta}{2}$  (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι  $E\Theta \parallel ZH$ , οπότε το  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 24α



Σχήμα 24β

### ΣΗΜΕΙΩΣΗ

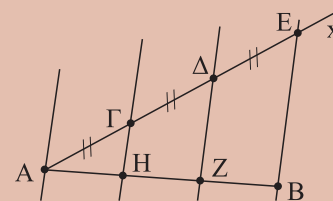
*Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

**Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).**

### Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία  $Ax$  και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  $AG, \Gamma\Delta, \Delta E$ . Φέρουμε τη  $BE$  και από τα  $\Delta, \Gamma$  και  $A$  παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την  $AB$  στα σημεία  $Z$  και  $H$ . Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 105, θα είναι  $AH = HZ = ZB$ .



Σχήμα 25

## 5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

### Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα  $\frac{2}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

### Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή  $\hat{B}_1 + \hat{G}_1 < \hat{B} + \hat{G} < 2L$ , οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii)  $A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta$ .

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε  $E\Theta \parallel \frac{ΓΚ}{2}$  (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε  $Z\Theta \parallel \frac{ΒΚ}{2}$  (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ // ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

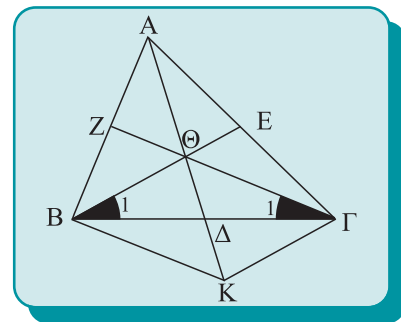
Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε  $\Gamma\Theta = 2\Theta Z$ . Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι  $A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta$ . Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι  $B\Theta = \frac{2}{3} BE$  και  $\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z$ .



Σχήμα 26

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου  $\Theta$  ενός τριγώνου  $ΑΒΓ$  από κάθε κορυφή του ισούται με τα  $\frac{2}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



## 5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

### Λήμμα

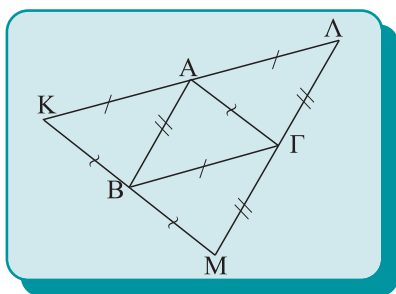
Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

### Απόδειξη

Από τις κορυφές  $A, B, \Gamma$  τριγώνου  $ΑΒΓ$  φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο  $ΚΛΜ$  (σχ.27).

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων  $ΚΑΓΒ$ ,  $ΛΑΒΓ$  και  $ΜΒΑΓ$  έχουμε:  $ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ$ ,  $ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ$  και  $ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ$ .

Επομένως τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου  $ΚΛΜ$ .



Σχήμα 27

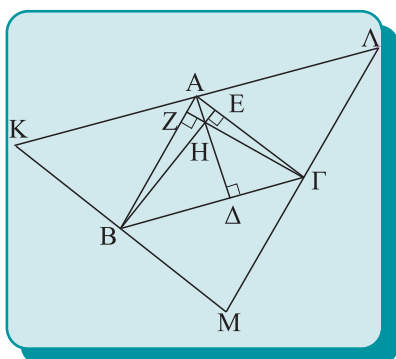
### Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

### Απόδειξη

Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και τα ύψη του  $ΑΔ$ ,  $ΒΕ$  και  $ΓΖ$ . Από τις κορυφές του  $A, B, \Gamma$  φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο  $ΚΛΜ$  τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες  $ΑΔ$ ,  $ΒΕ$  και  $ΓΖ$  είναι κάθετες στις  $ΚΛ$ ,  $ΚΜ$  και  $ΜΛ$  αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις  $ΒΓ$ ,  $ΑΓ$  και  $ΑΒ$ ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες  $ΑΔ$ ,  $ΒΕ$  και  $ΓΖ$  είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου  $ΚΛΜ$ , οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο  $H$ .

Το σημείο  $H$  λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου  $ΑΒΓ$ .



Σχήμα 28

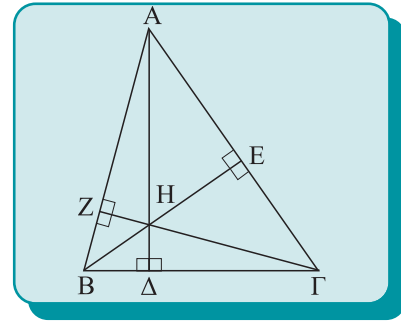
### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

### ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές  $A, B, \Gamma$  τριγώνου  $ΑΒΓ$  και το ορθόκεντρό του  $H$  αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β,Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.  
Τα ύψη ΗΔ,ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.



Σχήμα 29

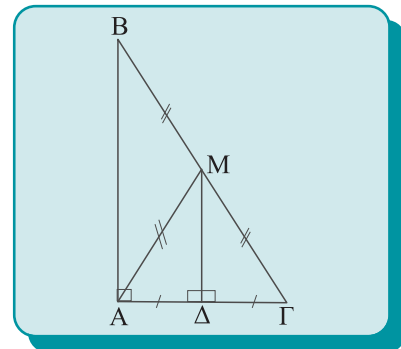
## 5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

### Θεώρημα Ι

**Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.**

#### Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι  $AM = \frac{BG}{2}$ .  
Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε  $MD \parallel AB$ . Αλλά  $AB \perp AG$ , επομένως και  $MD \perp AG$ . Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε  $AM = MG$ , δηλαδή  $AM = \frac{BG}{2}$ .



Σχήμα 30

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

### Θεώρημα ΙΙ

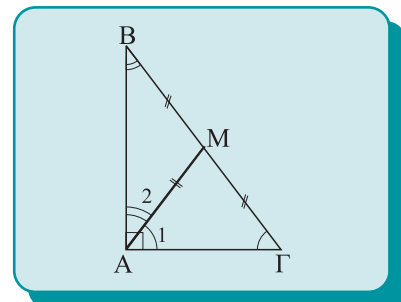
**Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.**

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν  $AM = \frac{BG}{2}$ , θα αποδείξουμε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή.

Επειδή  $AM = \frac{BG}{2}$  έχουμε  $AM = MG$ , οπότε  $\hat{A}_1 = \hat{G}$  (1) και  $AM = MB$ , οπότε  $\hat{A}_2 = \hat{B}$  (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{G}$ , δηλαδή  $\hat{A} = \hat{B} + \hat{G}$ . Αλλά  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 2L$ , οπότε  $2\hat{A} = 2L$  ή  $\hat{A} = 1L$ .

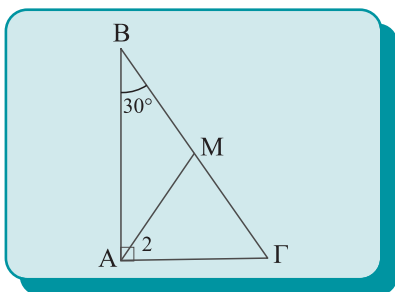


Σχήμα 31

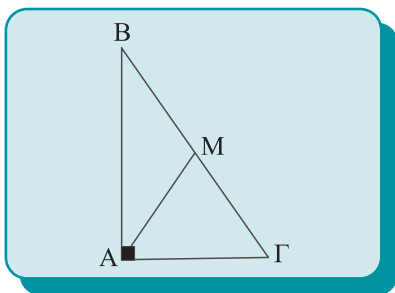


ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.



Σχήμα 32



Σχήμα 33

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$  (σχ.32).

Θα αποδείξουμε ότι  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .

Επειδή  $\hat{B} = 30^\circ$ , είναι  $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι  $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$ . Έτσι  $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ , οπότε

το τρίγωνο AMΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως  $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .

**Αντίστροφο**, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$  (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι  $\hat{B} = 30^\circ$ .

Απόδειξη

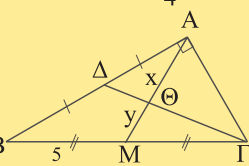
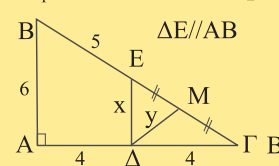
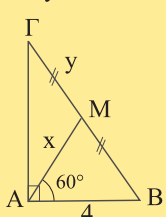
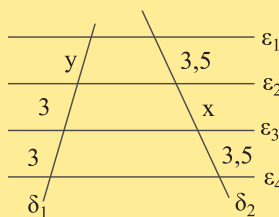
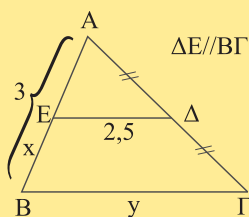
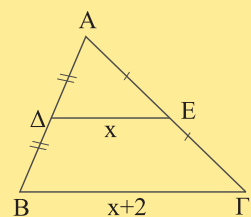
Φέρουμε τη διάμεσο AM, οπότε  $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$  (αφού

$ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ ). Άρα το τρίγωνο AMΓ είναι ισόπλευρο, οπότε  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Επομένως  $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

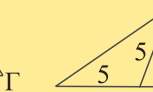
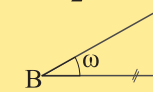
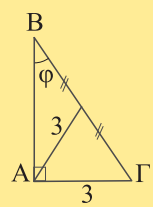
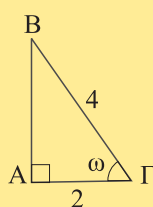
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.

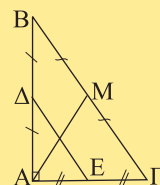


2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.



3. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;

4. Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα  $ΑΜ = ΔΕ$ .





**5.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ο κύκλος διαμέτρου  $B\Gamma$  διέρχεται από το  $A$ ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $Z$  τυχαίο σημείο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $\Delta E$  διχοτομεί την  $AZ$ .

**2.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμέσός του  $AD$ . Αν  $E$ ,  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $BD$ ,  $AD$  και  $AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο.

**3.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα ύψη  $BD$  και  $GE$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $MD = ME$ .

**4.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $AG$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AG$ .

**5.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\mu_\beta = \mu_\gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\beta = \gamma$ .

**6.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Προεκτείνουμε τη  $GA$  κατά τυχαίο τμήμα  $AD$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H \perp B\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι  $GE \perp AB$ .

**7.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$  και  $\Delta$ ,  $E$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $E\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z = E\Delta$ . Να αποδείξετε ότι το  $AG\Delta Z$  είναι ρόμβος.

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

**1.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AD$ .

i) Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $AG$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{E\Delta Z} = \hat{A} = 90^\circ$ .

ii) Αν  $M$  είναι το μέσο της  $EZ$ , να αποδείξετε ότι  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$ .

**2.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Αν η  $EZ$  τέμνει τη διαγώνιο  $AG$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι  $GH = \frac{AG}{4}$ .

**3.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε τη διάμέσό του  $AM$  και το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι  $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

**4.** Αν  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι  $\Delta E$  και  $BZ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $AG$ .

**5.** Αν  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι  $AE$  και  $AZ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $BA$ .

**6.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $\Delta$  είναι το μέσο της διαμέσου  $AM$ .

Αν η  $B\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AG$  στο  $E$ , να αποδείξετε

$$\text{ότι } AE = \frac{E\Gamma}{2}.$$

**7.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = AB$ . Αν η  $\Delta E$  τέμνει την  $AG$  στο  $H$  και τη  $B\Gamma$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } BZ = Z\Gamma, \quad \text{ii) } GH = \frac{AH}{2}.$$

**8.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 30^\circ$  η κάθετος στο μέσο  $M$  της υποτείνουσας  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } M\Delta = AD, \quad \text{ii) } M\Delta = \frac{AB}{3}.$$

**9.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $H$ ,  $K$  οι προβολές των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  στη διαγώνιο  $B\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $EH \perp KZ$ .

**10.** Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

## Σύνθετα θέματα

**1.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $AD$ . Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των  $AG$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $\hat{E\Delta Z} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

**2.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι αν  $\hat{B} = 15^\circ$ , τότε  $AD = \frac{B\Gamma}{4}$  και αντίστροφα. (Υπόδειξη: Φέρουμε τη διάμεσο  $AM$ ).

**3.** Σε κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε το βαρύκεντρο  $K$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $E$ ,  $Z$  και  $H$  των  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $K\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $EH \parallel KZ$ .

**4.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^\circ$  και το ύψος του  $AD$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = BA$ . Να αποδείξετε ότι η  $\Delta E$  διχοτομεί την πλευρά  $AG$ .

**5.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$ , η διχοτόμος του  $AD$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν  $E$  είναι η προβολή του  $B$  στη διχοτόμο  $AD$ , να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{i) } EM &\parallel AG, \\ \text{ii) } EM &= \frac{AG - AB}{2}, \\ \text{iii) } \hat{\Delta EM} &= \frac{\hat{A}}{2}. \end{aligned}$$

**6.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το ύψος του  $BD$  και  $M$  το μέσο του τμήματος  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε τη  $\Delta B$  κατά τμήμα  $BE = \Delta B$ . Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το  $M$  στην  $AB$ , η κάθετη από το  $A$  στην  $E\Gamma$  και η  $B\Delta$  συντρέχουν.



7. Αν  $K$  και  $L$  είναι οι προβολές της κορυφής  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- ο  $AKBL$  είναι ορθογώνιο.
  - Η ευθεία  $KL$  διέρχεται από το μέσο της  $AG$ .
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) το ύψος

του  $AD$  και η διάμεσός του  $AM$ . Αν  $E, Z$  οι προβολές του  $A$  στις  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

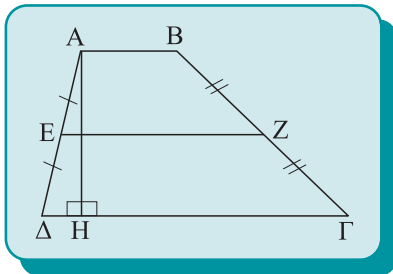
- $AD = EZ$ ,
- $AM \perp EZ$ ,
- Η διάμεσος  $AM$  το τμήμα  $AZ$  και η παράλληλη προς την  $EZ$  από το  $B$  συντρέχουν.

## Τραπεζία

### 5.10 Τραπεζίο

#### Ορισμός

**Τραπεζίο** λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές  $AB$  και  $GD$  (σχ.34) του τραπεζίου  $ABGD$  λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα  $EZ$  που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

#### Θεώρημα I

**Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.**

Δηλαδή, αν  $EZ$  διάμεσος του τραπεζίου  $ABGD$ , τότε:

$$\text{i) } EZ \parallel AB, GD \text{ και ii) } EZ = \frac{AB + GD}{2}.$$

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τραπεζίο  $ABGD$  ( $AB \parallel GD$ ) (σχ.35), τη διαγώνιο του  $BD$  και  $E$  το μέσο της  $AD$ . Από το  $E$  φέρουμε ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη των  $AB$  και  $GD$  που τέμνει τις  $BD$  και  $BG$  στα  $K$  και  $Z$  αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο  $ABD$  το  $E$  είναι μέσο της  $AD$  και  $EK \parallel AB$ , οπότε

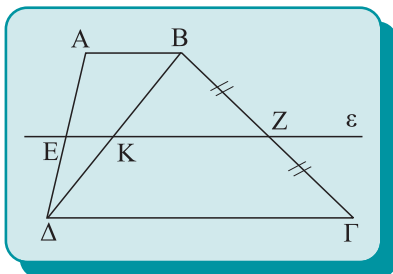
$$\text{το } K \text{ είναι το μέσο της } BD \text{ και } EK = \frac{AB}{2} \quad (1).$$

Επίσης στο τρίγωνο  $BGD$  το  $K$  είναι μέσο της  $BD$  και  $KZ \parallel GD$ ,

$$\text{οπότε το } Z \text{ είναι το μέσο της } BG \text{ και } KZ = \frac{GD}{2} \quad (2).$$

Επομένως η  $EZ$  είναι διάμεσος του τραπεζίου και

**i)  $EZ \parallel AB, GD$  (από κατασκευή).**



Σχήμα 35

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

### ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

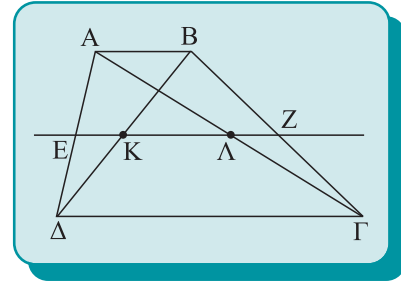
### Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ

$$\text{και } EL = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (3).$$

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$EL - EK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad KL = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \quad (\text{με } \Gamma\Delta > AB).$$



Σχήμα 36

## 5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

### Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

#### • Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

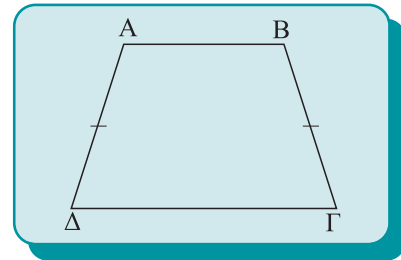
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

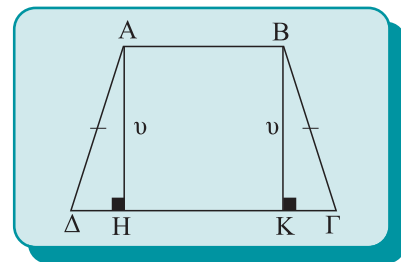
### Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ( $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$ , ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ . Επειδή  $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$  (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και  $\hat{A} = \hat{B}$ .

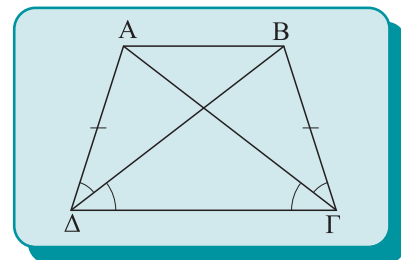
(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και  $\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}$ ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### • Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

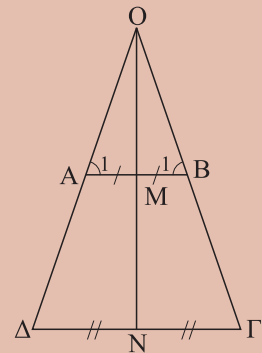
Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

- (i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
- (ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

#### Απόδειξη

(i) Έστω  $AB\Gamma\Delta$  ισοσκελές τραπέζιο ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και  $O$  το σημείο τομής των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ . Τα τρίγωνα  $OAB$  και  $O\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελή, αφού  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  και  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$  ( $AB\Gamma\Delta$  ισοσκελές τραπέζιο).

(ii) Η μεσοκάθετος  $\epsilon$  της βάσης  $AB$  διέρχεται από το  $O$ , επειδή το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές. Η  $\epsilon$  είναι κάθετος και στη  $\Gamma\Delta$  επειδή  $\Gamma\Delta \parallel AB$ . Αφού η  $\epsilon$  διέρχεται από το  $O$ , είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $O\Delta\Gamma$ , άρα μεσοκάθετος και στη  $\Gamma\Delta$ .

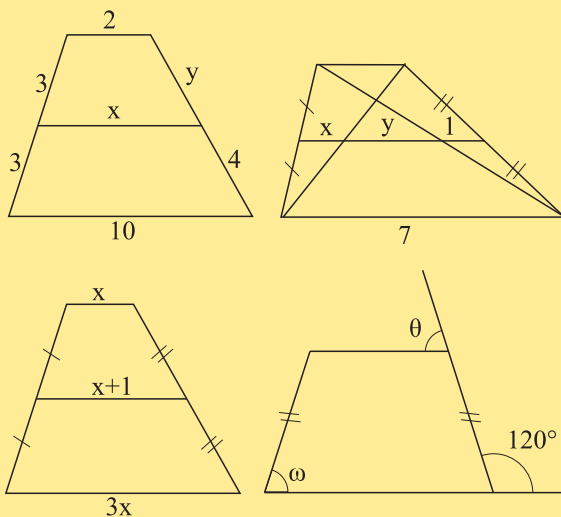


Σχήμα 40

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

#### Ερωτήσεις Κατανόησης

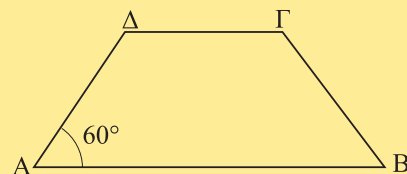
1. Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα  $x$ ,  $y$ ,  $\omega$  και  $\theta$ .



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι ισοσκελές τραπέζιο;

3. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπέζιου; Ποιες ιδιότητες έχει;

4. Στο ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι:  $AB = 5x$ ,  $\Delta\Gamma = 3x$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:



i)  $10x$

ii)  $11x$

iii)  $12x$

iv)  $13x$

v)  $14x$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

#### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και η διάμεσός του

ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$  τέμνονται στο  $Κ$  και  $Η$ ,  $Θ$  είναι τα μέσα των  $ΚΑ$  και  $ΚΒ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Θ$  είναι κορυφές τραπέζιου.

2. Αν  $Δ$  και  $Ε$  είναι τα μέσα των πλευρών  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ ), να αποδείξετε ότι το  $ΔΕΓΒ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) τέμνονται στο  $Ο$ . Αν  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Θ$  είναι τα μέσα των  $ΟΑ$ ,  $ΟΒ$ ,  $ΟΓ$ ,  $ΟΔ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $ΕΖΗΘ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και το ύψος του  $ΑΕ$ . Αν  $Κ$ ,  $Λ$  είναι τα μέσα των  $ΑΔ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $ΚΛΓΕ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΑΒ < ΓΔ$  και τα ύψη του  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$ . Να αποδείξετε ότι

$$ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}.$$

6. Από την κορυφή  $Α$  τριγώνου  $ΑΒΓ$  φέρουμε ευθεία  $ε$  που δεν τέμνει το τρίγωνο και  $α$ ς είναι  $ΒΒ'$  και  $ΓΓ'$  οι αποστάσεις των  $Β$  και  $Γ$  από την ευθεία  $ε$ . Αν  $Μ$  είναι το μέσο της  $Β'Γ'$  και  $Κ$  το μέσο της διαμέσου  $ΑΔ$  να αποδείξετε ότι  $ΜΚ = \frac{ΑΔ}{2}$ .

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) η διχοτόμος της γωνίας του  $Β$  τέμνει τη διάμεσο του  $ΕΖ$  στο  $Η$ . Να αποδείξετε ότι  $ΒΗΓ = 90^\circ$ .

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ )  $Μ$  είναι το μέσο της  $ΑΒ$ . Αν η μεσοκάθετος της  $ΑΒ$  τέμνει την  $ΑΓ$  στο  $Ζ$  και η παράλληλη από το  $Ζ$  προς τη  $ΒΓ$  τέμνει την  $ΑΒ$  στο  $Η$ , να αποδείξετε ότι  $ΓΗ = ΑΖ$ .

3. Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$  και  $\hat{Β} = 120^\circ$ . Αν  $ΑΒ = 2α$  και  $ΒΓ = α$  να υπολογίσετε τη διάμεσο  $ΕΖ$ , ως συνάρτηση του  $α$ .

4. Σε ένα τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$ , η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του  $ΑΔ$  είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν  $Μ$  είναι το μέσο της  $ΒΓ$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{ΑΜΔ} = 90^\circ$ .

5. Από το μέσο  $Ε$  της πλευράς  $ΒΓ$  ισοσκελούς τραπέζιου  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) φέρουμε παράλληλη προς την  $ΑΔ$  που τέμνει τη  $ΔΓ$  στο  $Μ$ . Να αποδείξετε ότι  $ΒΜ \perp ΔΓ$ .

6. Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και το ύψος του  $ΑΗ$ . Αν  $Δ$ ,  $Ε$ ,  $Ζ$  είναι τα μέσα των  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα, να απο-

δείξετε ότι το  $ΔΕΖΗ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

8. Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΓΔ = 3ΑΒ$  και  $Κ$ ,  $Λ$  τα μέσα των διαγωνίων του  $ΔΒ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το  $ΑΚΛΒ$  είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;

9. Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΓΔ = \frac{3}{2} ΑΒ$ . Αν  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$  είναι τα μέσα των  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  και  $ΔΕ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $ΑΒΖΗ$  είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της  $ΑΗ$  τέμνει τη  $ΓΔ$  στο  $Θ$ , τότε  $\hat{ΘΔ} = \hat{ΔΓ} - ΑΒ$ .

10. Αν  $Α'$ ,  $Β'$ ,  $Γ'$ ,  $Δ'$ ,  $Κ'$  είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου  $Κ$  παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  αντίστοιχα σε ευθεία  $ε$  που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι  $ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'$ .

## Σύνθετα θέματα

1. Σε τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) έχουμε  $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{Α}$  και  $\hat{Δ}$  τέμνονται στη  $ΒΓ$ .

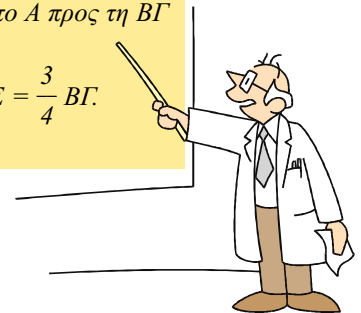
2. Δίνεται τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$  και  $ΒΓ = 2ΓΔ$ . Αν  $Μ$  είναι το μέσο της  $ΒΓ$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{ΑΜΓ} = 3\hat{ΜΑΒ}$ .

3. Μια ευθεία  $ε$  διέρχεται από την κορυφή  $Δ$  ενός παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές  $Β$  και  $Γ$ . Αν  $Α'$ ,  $Β'$  και  $Γ'$  οι προβολές των  $Α$ ,  $Β$  και  $Γ$  αντίστοιχα στην ευθεία  $ε$ , να αποδείξετε ότι  $ΑΑ' - ΓΓ' = ΒΒ'$  (με  $ΑΑ' > ΓΓ'$ ).

4. Δίνεται ορθογώνιο  $ΑΒΓ$  ( $\hat{Α} = 90^\circ$ ) και  $Δ$ ,  $Ε$  τα μέσα των  $ΑΒ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα. Από το μέσο  $Ζ$  του  $ΑΔ$  φέρουμε παράλληλη προς την  $ΑΓ$  που τέμνει τη  $ΒΓ$  στο  $Η$ . Αν  $ΖΗ = \frac{3}{8} ΒΓ$ , να υπολογισθεί η γωνία  $\hat{Β}$ .

5. Σε τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΑΒ < ΓΔ$ , έστω  $Μ$  το μέσο της  $ΒΓ$ . Να αποδείξετε ότι  
i) αν  $ΔΜ = ΔΓ$  και η παράλληλη από το  $Α$  προς τη  $ΒΓ$  τέμνει τη  $ΔΜ$  στο  $Ε$ , τότε  $ΑΜ = ΒΕ$ ,

ii) αν  $Ε$  είναι το μέσο της  $ΔΜ$ , τότε  $ΑΕ = \frac{3}{4} ΒΓ$ .





## 5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

### ΣΧΟΛΙΟ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κάποια από τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (βαρύκεντρο, ορθόκεντρο κτλ.) καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας (§ 4.2).

Είδαμε προηγούμενα (§4.5 και §5.7 - §5.8) ότι σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών.

Ανακεφαλαιώνοντας, σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  αποδείξαμε ότι **διέρχονται από το ίδιο σημείο**:

- Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο  $O$  λέγεται **περίκεντρο** του  $AB\Gamma$  και ο κύκλος ( $O, OA$ ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο  $I$  λέγεται **έγκεντρο** του  $AB\Gamma$  και ο κύκλος με κέντρο το  $I$  και ακτίνα την κοινή απόσταση του  $I$  από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι τρεις διάμεσοί του. Το κοινό σημείο τους  $\Theta$  λέγεται **βαρύκεντρο** του  $AB\Gamma$ .
- Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο τους  $H$  λέγεται **ορθόκεντρο** του  $AB\Gamma$ .

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\beta \neq \gamma$ ) με  $\hat{A} = 60^\circ$ , τα ύψη του  $BD$ ,  $GE$  και τα μέσα  $M$ ,  $N$  των  $AB$ ,  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $ME = ND$ .

2. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και σημείο  $A$  της  $\varepsilon_1$ . Φέρουμε  $AK \perp \varepsilon_2$ . Αν  $B$  σημείο της  $\varepsilon_2$  και μια ευθεία, που διέρχεται από το  $B$ , τέμνει τις  $AK$  και  $\varepsilon_1$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $\Delta E = 2AB$ , να αποδείξετε ότι  $\hat{ABK} = 3\hat{EBK}$ .

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$ ,  $\Delta$  το μέσο της  $AB$  και σημείο  $E$  της ημιευθείας  $\Delta B$ , ώστε  $\Delta E = \frac{AG}{2}$ . Από τα  $B$  και  $E$  φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ , οι οποίες τέμνουν την  $AG$  στα  $B'$  και  $E'$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$i) B'E' = \frac{AG - AB}{2}.$$

ii) Η ευθεία  $EE'$  διέρχεται από το μέσο της  $B\Gamma$ .

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2B\Gamma$ ,  $\hat{B} > 60^\circ$  και το ύψος του  $AE$  προς τη  $B\Gamma$  ( $AE \perp B\Gamma$ ). Αν

$Z$ ,  $H$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το  $H\beta\Gamma Z$  είναι ρόμβος,

ii) η  $ZE$  είναι διχοτόμος της  $\hat{HE\Gamma}$ ,

iii) το  $HE\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv)  $\hat{\Delta ZE} = 3\hat{ZE\Gamma}$ .

5. Ευθεία  $\varepsilon$  αφήνει τις κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$  προς το ίδιο μέρος της. Αν  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,  $K'$  οι προβολές των  $A, B, \Gamma$  και του βαρυκέντρου  $K$  αντίστοιχα στην  $\varepsilon$ , να αποδείξετε ότι  $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'$ .

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = AG$ ) και  $\Delta$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Delta E \perp AG$ . Αν  $Z$  το μέσο του  $E\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $\Delta Z \parallel BE$ ,

ii)  $AH \perp BE$ , όπου  $H$  το μέσο του  $\Delta E$ .

7. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $AGZH$ . Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα κέντρα των  $AB\Delta E$  και  $AGZH$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda\Lambda$  είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.



**8.** Δίνεται τετράγωνο πλευράς  $a$  και κέντρον  $O$ . Στη διαγώνιο  $ΑΓ$  παίρνουμε σημείο  $M$ , ώστε  $GM = \frac{AG}{4}$ . Φέρουμε τη  $BM$  που τέμνει τη  $ΓΔ$  στο  $E$  και  $OH$  κάθετη στη  $BΓ$ , η οποία τέμνει τη  $BE$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $OZ = \frac{a}{3}$ ,

ii) το  $OZGE$  είναι παραλληλόγραμμο.

**9.** Οι μη παράλληλες πλευρές  $AD$  και  $BΓ$  τραπέζιου  $ABΓΔ$  τέμνονται κάθετα στο  $O$ . Αν  $K, Λ$  τα μέσα των

βάσεων  $AB$  και  $ΔΓ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία  $O, K, Λ$  είναι συνευθειακά,

ii)  $KΛ = \frac{ΔΓ - AB}{2}$  (με  $ΔΓ > AB$ ).

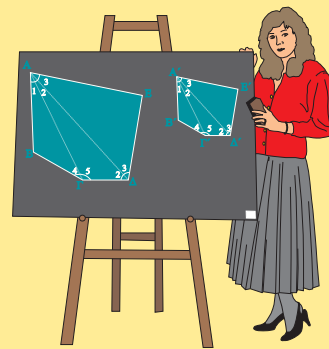
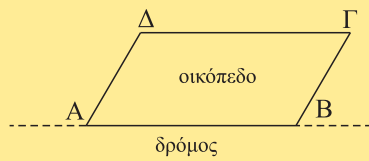
iii) αν  $E, Z$  είναι τα μέσα των διαγωνίων  $ΑΓ$  και  $BΔ$  αντίστοιχα, τότε το  $ΚΕΛΖ$  είναι ορθογώνιο.

**10.** Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$ , οι διχοτόμοι του  $BΔ$  και  $ΓΕ$  και το μέσο  $M$  του  $ΕΔ$ . Να αποδείξετε ότι η απόσταση του  $M$  από τη  $BΓ$  είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις  $AB, ΑΓ$ .



## Δραστηριότητες

**1.** Δύο αδέρφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά  $AB$  παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;



**2.** Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.

**3.** Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.

i) παραλληλόγραμμο

iv) τετράγωνο

ii) ορθογώνιο

v) τραπέζιο

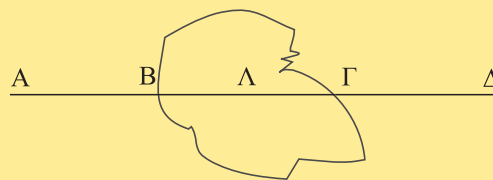
iii) ρόμβος

vi) ισοσκελές τραπέζιο

**4.** Θεωρούμε ευθεία  $\epsilon$  και ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου  $M$  του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του  $A$  και  $B$  από την ευθεία  $\epsilon$  (**Υπόδειξη**: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των  $A$  και  $B$  ως προς την ευθεία  $\epsilon$ ).

## Εργασία

Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος  $\Lambda$ , τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή  $ABΓΔ$ . Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση  $ΓΔ$  αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;



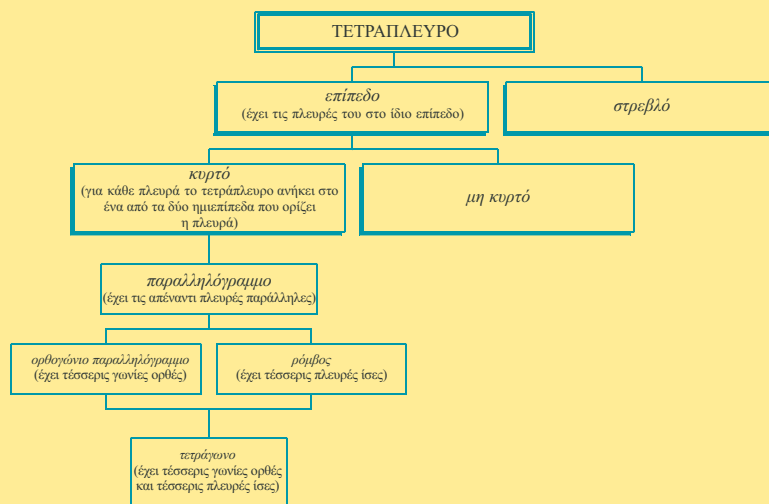
## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

### Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε *επίπεδα* και *στρεβλά*, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε *κυρτά* και *μη κυρτά*, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το

σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες.

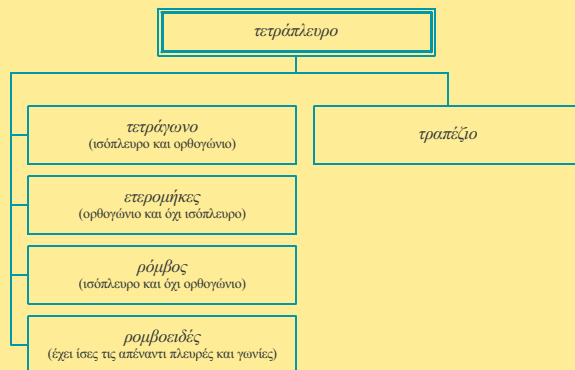
Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

- (α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές,
- (β) ο ρόμβος που έχει τέσσερις πλευρές ίσες,
- (γ) το τετράγωνο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες.

Όμως η ταξινόμηση αυτή δε διαμορφώθηκε εξ αρχής στην ιστορία της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης π.χ. στα «Στοιχεία» του προτείνει μια άλλη ταξινόμηση (Διάγραμμα 2).



Διάγραμμα 2: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων

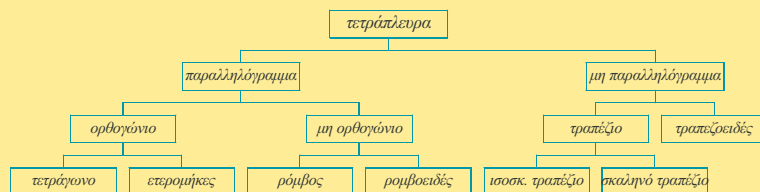


## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

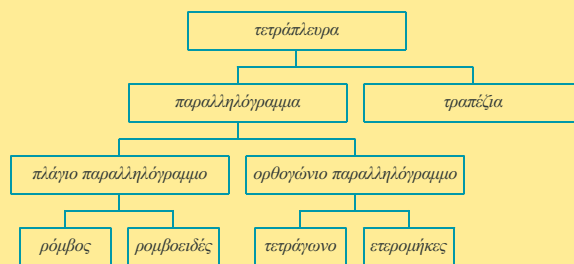
Η ταξινόμηση αυτή δε χρησιμοποιεί ως κριτήριο την έννοια της παραλληλίας, η οποία στα «Στοιχεία» εισάγεται αργότερα. Επίσης δε φαίνεται να στηρίζεται σε κάποια ενιαία αρχή. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τα κατηγορήματα «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους: ορθογώνιο και ισόπλευρο είναι το *τετράγωνο*, ορθογώνιο και όχι ισόπλευρο το *ετερομήκες* (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), ισόπλευρο και όχι ορθογώνιο ο *ρόμβος*. Όμως, η έννοια του *ρομβοειδούς* (δηλαδή του πλάγιου παραλληλογράμμου) στηρίζεται στην έννοια της ισότητας των απέναντι πλευρών και των γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. *Τραπεζίο* ονομάζει όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό, δηλαδή τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Ο όρος *τραπέζιο*, με τη σύγχρονη έννοια, απαντάται αργότερα στον Αρχιμήδη.

Η ταξινόμηση όμως αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δε χρησιμοποιεί ποτέ στα «Στοιχεία» του τις έννοιες του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς. Παρόλα αυτά, η ταξινόμηση αυτή απαντάται και σε μεταγενέστερους μαθηματικούς, ακόμα και του Αραβικού κόσμου, όπως π.χ. στη διαπραγμάτευση της Γεωμετρίας του αλ-Χουαρίζμι. Όμως υπήρχαν και μαθηματικοί που προσπάθησαν να τροποποιήσουν την ταξινόμηση του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ποσειδώνιο μια πιο ολοκληρωμένη ταξινόμηση, η οποία απαντάται επίσης στον Ήρωνα (Διάγραμμα 3).

Μια άλλη προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται το 16ο αι. στη «Γεωμετρία» (1569) του Πέτρου Ράμου (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée) (Διάγραμμα 4). Η ταξινόμηση του Ράμου φαίνεται να στηρίζεται στη διχοτομική διαίρεση του πλάτους των εννοιών.



Διάγραμμα 3: Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα



Διάγραμμα 4: Η ταξινόμηση του Ράμου

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

