ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

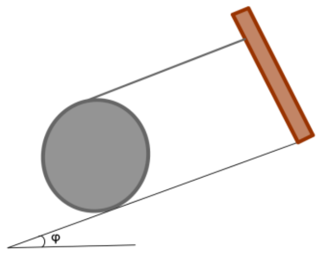
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ο δίσκος ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος παράλληλου στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το βάρος του δίσκου είναι w=10 N και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $φ=30^0$, να βρεθούν:



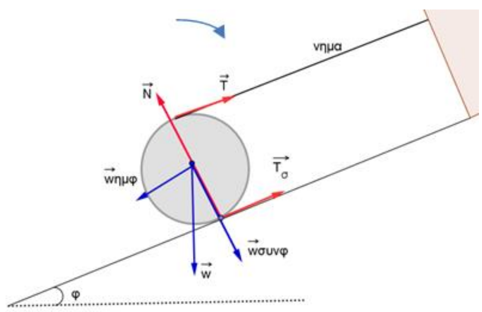
α) η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς το κέντρο του Κ.

β) η δύναμη που δέχεται ο τροχός από το νήμα.

γ) η στατική τριβή στον δίσκο καθώς και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο δίσκο.

<u>Λύση</u>

Στο δίσκο ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος w, που αναλύεται σε δυο συνιστώσες w·συνφ και σε w·ημφ, η τάση του νήματος Τ η οποία είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και η δύναμη του επιπέδου η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες την κάθετη δύναμη Ν από το επίπεδο στο σώμα και την στατική τριβή $Τ_σ$. Όλες οι δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα (εκτός της δύναμης του επιπέδου η οποία δεν σχεδιάστηκε για να μη φορτωθεί με δυνάμεις το σχήμα. Ο σχεδιασμός της δεν είναι απαραίτητος στο ερώτημα αυτό.)



α) Αφού το στερεό ισορροπεί ισχύει:

$\sum F_x = 0$ (1)

$\sum F_y = 0$ (2)

$\sum \tau = 0$ (3)

Η εξίσωση (3) ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα θα ισχύει και ως προς το Κ.

β) Από τη σχέση (3) έχουμε: $\sum \tau = 0 \Rightarrow T \cdot R - T_\sigma \cdot R = 0 \Leftrightarrow T \cdot R = T_\sigma \cdot R \Leftrightarrow T = T_\sigma$ (4)

Από την (1) έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T + T_\sigma = w \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$$
$$2T = w \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T = 2,5\text{N}$$

γ) Από τη σχέση (4) προκύπτει πως T_σ=2,5 N.

Η δύναμη του επιπέδου είναι η συνισταμένη δυο κάθετων μεταξύ τους δυνάμεων της Ν και της Τ. Από την εξίσωση $\sum F_y = 0$ υπολογίζουμε την κάθετη δύναμη Ν του επιπέδου στο σώμα: $N = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = 10\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{N} \Rightarrow N = 5\sqrt{3}\text{N}$

Η δύναμη του επιπέδου είναι:

$$A = \sqrt{N^2 + T_\sigma^2} \Rightarrow A = \sqrt{81,25}\text{N}$$

Άσκηση 2.

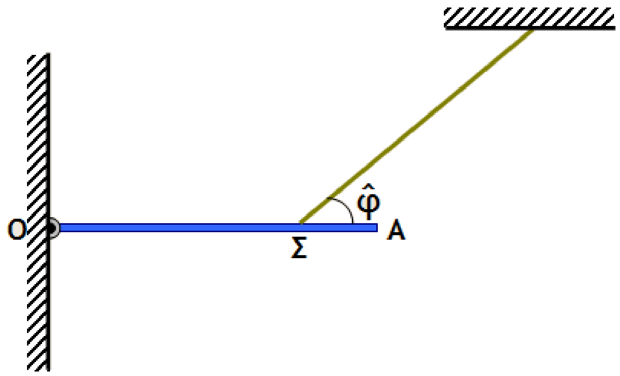
Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $L = 4\,m$, μάζα $M = 30\,kg$ και είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο. Η ράβδος ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος, το οποίο είναι δεμένο σε σημείο Σ της ράβδου και σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\hat{\varphi} = 30^0$. Η απόσταση (ΟΣ) είναι ίση με $3\,m$. Να βρεθούν:

α) το μέτρο της τάσης $\vec{N}$ του νήματος.

β) το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

γ) το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}'$ που θα ασκήσει η άρθρωση στη ράβδο, αν το νήμα δεθεί σε σημείο Κ της ράβδου, τέτοιο, ώστε η απόσταση (ΟΚ) να είναι ίση με $\frac{4}{3}\,m$ και το νήμα να σχηματίζει την ίδια γωνία $\hat{\varphi}$ με τη ράβδο.

Δίνεται: $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.



<u>Λύση</u>

Για την επίλυση της άσκησης (2), θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα κάνουμε το σχήμα.

γ) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

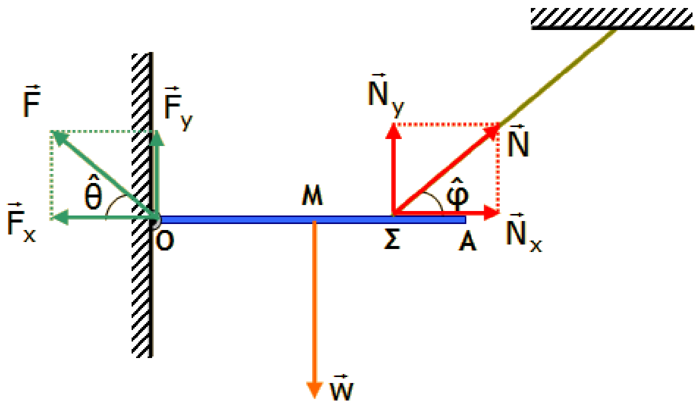
Λέγοντας στην άσκηση ότι η ράβδος ισορροπεί, εννοούμε ότι παραμένει ακίνητη, δηλαδή δεν εκτελεί μεταφορική ή στροφική κίνηση. Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$$\Sigma\vec{F}=0 \quad \begin{cases} \Sigma\vec{F}_x=0 & (1) \\ \Sigma\vec{F}_y=0 & (2) \end{cases}$$

και

$$\Sigma\vec{\tau}=0 \ (3)$$

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο:



- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από την άρθρωση (Ο) στη ράβδο. Η δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$.
- Η δύναμη $\vec{N}$ ασκείται από το νήμα στη ράβδο. Η δύναμη $\vec{N}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\vec{N}_x$ και $\vec{N}_y$.
- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στη ράβδο.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$L=4\,m$ $M=30\,kg$ $\hat{\varphi}=30^0$ $(O\Sigma)=3\,m$ $g=10\,\frac{m}{s^2}$ γ) $(OK)=\frac{4}{3}\,m$	α) $N=;$ β) $\vec{F}=;$ γ) $\vec{F}'=;$

α) Για τη χρήση της σχέσης (3), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Επειδή $\Sigma\tau = 0$, οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο, ώστε να μηδενιστεί η ροπή της άγνωστης δύναμης $\vec{F}$. Έχουμε:

Ως προς το σημείο Ο:

$$\tau_w = -w \cdot (OM) = -w \cdot \frac{L}{2}$$

$$\tau_{Nx} = 0$$

$$\tau_{Ny} = +N_y \cdot (O\Sigma)$$

$$\tau_F = 0$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_w + \tau_{Nx} + \tau_{Ny} + \tau_F = 0 \Rightarrow -w \cdot \frac{L}{2} + 0 + N_y \cdot (O\Sigma) + 0 = 0 \Rightarrow N_y = \frac{wL}{2(O\Sigma)}$$

Επειδή $w = M \cdot g = 300\ N$, με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι:

$$N_y = 200\ N$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος προκύπτει:

$$N_y = N \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow N = \frac{N_y}{\eta\mu 30^0} \Rightarrow$$

$$\boxed{N = 400N}$$

$$N_x = N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N_x = 400 \cdot \sigma\upsilon\nu 30\ N \Rightarrow N_x = 200\sqrt{3}\ N$$

β) Από τις (1) και (2), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, έχουμε:

(1) $\Rightarrow F_x = N_x \Rightarrow F_x = 200\sqrt{3}\ N$

(2) $\Rightarrow F_y + N_y = w \Rightarrow F_y = 100\ N$

Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$F^2 = F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} \Rightarrow F^2 = \left(200\sqrt{3}\ N\right)^2 + (100\ N)^2 \Rightarrow F^2 = 100^2\left(4\sqrt{3}^2 + 1\right) N^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = 100^2 \cdot 13\ N^2 \Rightarrow$$

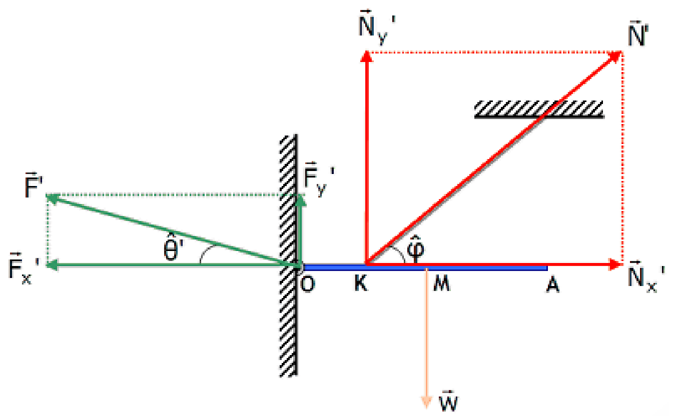
$$\boxed{F = 100 \cdot \sqrt{13}N}$$

Η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει η $\vec{F}$ με την $\vec{F}_x$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{100\ \text{N}}{200\sqrt{3}\ \text{N}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\hat{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

γ) Επανασχεδιάζουμε το σύστημα, ώστε το νήμα να ασκεί τάση στο σημείο Κ της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη σχέση (3), για να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο. Έχουμε:

Ως προς το σημείο Ο:

$$\tau_w = -w \cdot (OM) = -w \cdot 2 = -2w$$

$$\tau'_{Nx} = 0$$

$$\tau'_{Ny} = +N'_y \cdot (OK) = +N'_y \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau'_F = 0$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_w + \tau'_{Nx} + \tau'_{Ny} + \tau'_F = 0 \Rightarrow -2w + 0 + N'_y \cdot \frac{4}{3} + 0 = 0 \Rightarrow N'_y = 450\ \text{N}$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος προκύπτει:

$$N'_y = N' \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow N' = \frac{N'_y}{\eta\mu 30^o} \Rightarrow N' = 900\ \text{N}$$

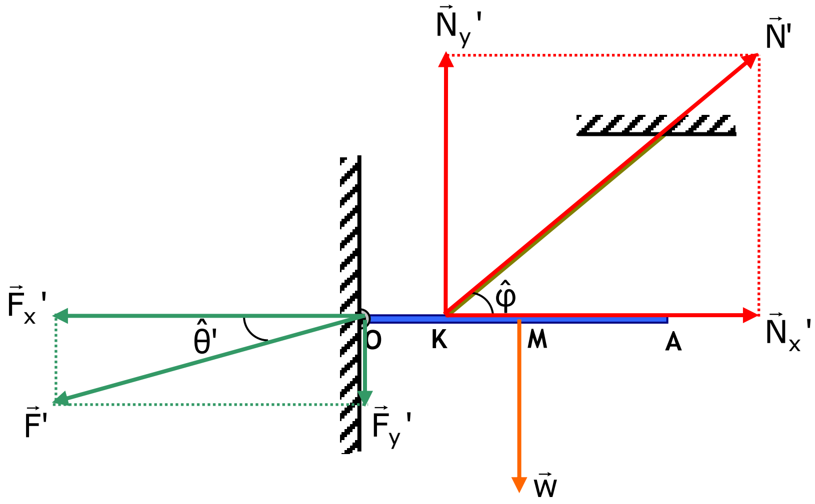
$$N'_x = N' \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N'_x = 900 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^o\ \text{N} \Rightarrow N'_x = 450\sqrt{3}\ \text{N}$$

Από τις (1) και (2), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, έχουμε:

(1) $\Rightarrow F_x' = N_x' \quad \Rightarrow \quad F_x' = 450\sqrt{3}\ \text{N}$

(2) $\Rightarrow F_y' + N_y' = w \quad \Rightarrow \quad F_y' = -150\ \text{N}$

Το αρνητικό πρόσημο στο μέτρο της F_y' σημαίνει ότι η F_y' έχει μέτρο $F_y' = 150\ \text{N}$ και <u>αντίθετη κατεύθυνση</u>. Δηλαδή, οι σωστές κατευθύνσεις των δυνάμεων είναι οι εξής:



Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}'$:

$$(F')^2 = (F_x')^2 + (F_y')^2 \Rightarrow (F')^2 = \left(450\sqrt{3}\ \text{N}\right)^2 + (150\text{N})^2 \Rightarrow (F')^2 = 150^2\left(9\sqrt{3}^2 + 1\right)\ \text{N}^2 \Rightarrow$$

$$(F')^2 = 150^2 \cdot 28\ \text{N}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{F' = 150\sqrt{28}\ \text{N}}$$

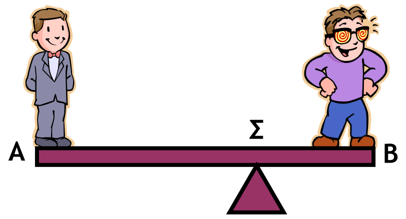
Η γωνία $\hat{\theta}'$ που σχηματίζει η $\vec{F}'$ με την $\vec{F}_x'$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\hat{\theta}' = \frac{F_y'}{F_x'} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\hat{\theta}' = \frac{150\ \text{N}}{450\sqrt{3}\ \text{N}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\hat{\theta}' = \frac{\sqrt{3}}{9}}$$

Άσκηση 3.

Στα άκρα Α και Β της αβαρούς τραμπάλας του σχήματος βρίσκονται δύο παιδιά. Το παιδί που βρίσκεται στο άκρο Α έχει βάρος μέτρου $w_A = 200\ \mathrm{N}$, ενώ το άλλο παιδί έχει βάρος μέτρου $w_B = 800\ \mathrm{N}$.



Το μήκος της τραμπάλας είναι $L = 2\ \mathrm{m}$.

α) Να βρεθεί σε πόση απόσταση από το άκρο Α πρέπει να τοποθετηθεί στήριγμα (Σ), ώστε η τραμπάλα να ισορροπεί.

β) Να βρεθεί η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ που ασκεί το στήριγμα (Σ) στην τραμπάλα.

γ) Αν το παιδί που βρίσκεται στο άκρο Α σταθεί πιο κοντά στο στήριγμα (Σ), προς ποια μεριά θα ανατραπεί η τραμπάλα;

<u>Λύση</u>

Για την επίλυση αυτής της άσκησης θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα κάνουμε το σχήμα.

γ) θα γράψουμε δεδομένα - ζητούμενα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε)θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

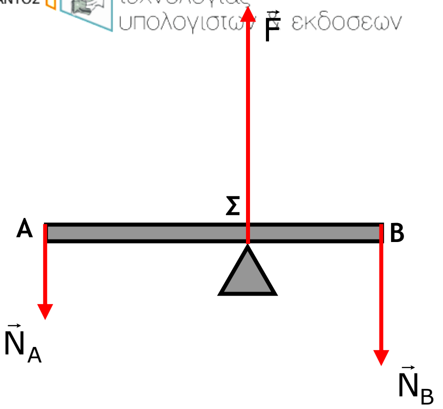
Λέγοντας στην άσκηση ότι η τραμπάλα ισορροπεί, εννοούμε ότι παραμένει ακίνητη, δηλαδή δεν εκτελεί μεταφορική ή στροφική κίνηση. Για να ισορροπεί η τραμπάλα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$\Sigma\vec{F} = 0$ (1)

και

$\Sigma\vec{\tau} = 0$ (2)

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στην τραμπάλα:



- Οι δυνάμεις $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ ασκούνται από τα παιδιά στην τραμπάλα.
- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από το στήριγμα (Σ) στην τραμπάλα.

Αφού η τραμπάλα ισορροπεί ακίνητη, τα παιδιά που στέκονται πάνω της θα ισορροπούν ακίνητα. Για κάθε παιδί που ισορροπεί ικανοποιείται η συνθήκη:

$\Sigma\vec{F} = 0$ (3)

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα παιδιά:

- Οι δυνάμεις $\vec{N}_A'$, $\vec{N}_B'$ ασκούνται από την τραμπάλα στα παιδιά.
- Οι δυνάμεις $\vec{w}_A$, $\vec{w}_B$ ασκούνται από τη Γη στα παιδιά.

Από τον 3ο Νόμο Newton (Αρχή Δράσης – Αντίδρασης) έχουμε:

$\vec{N}_A = -\vec{N}_A' \Rightarrow N_A = N_A'$ (4)

$\vec{N}_B = -\vec{N}_B' \Rightarrow N_B = N_B'$ (5)

Δεδομένα	Ζητούμενα
$w_A = 200\ \text{N}$ $w_B = 800\ \text{N}$ $L = 2\ \text{m}$ γ) παιδί Α πιο κοντά στο Σ	α) $(\text{ΑΣ}) = x =;$ β) $\vec{F} =;$ γ) φορά ανατροπής=;

α) Για τη χρήση της σχέσης (2), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Επειδή $\Sigma\tau = 0$, οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Σ, ώστε να μηδενιστεί η ροπή της άγνωστης δύναμης $\vec{F}$. Έχουμε:

Ως προς το σημείο Σ:

$$\tau_A = +N_A \cdot (\text{ΑΣ})$$

$$\tau_B = -N_B \cdot (\text{ΒΣ})$$

$$\tau_F = 0$$

Θέτουμε $(\text{ΑΣ}) = x$, $(\text{ΒΣ}) = L - x$. Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_A + \tau_B + \tau_F = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A \cdot x - N_B \cdot (L - x) + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A \cdot x = N_B \cdot (L - x) \quad (6)$$

Από την (3), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα παιδιά, έχουμε:

$N_A' = w_A$ και

$N_B' = w_B$

Με χρήση των (4) και (5), έχουμε:

$N_A = w_A$ και

$N_B = w_B$

Με αντικατάσταση στην (6), έχουμε:

$$w_A \cdot x = w_B \cdot (L - x) \quad \Rightarrow \quad w_A \cdot x = w_B \cdot L - w_B \cdot x \quad \Rightarrow \quad w_A \cdot x + w_B \cdot x = w_B \cdot L$$

Επιλύοντας ως προς x, έχουμε:

$$x = \frac{w_B \cdot L}{w_A + w_B}$$

Κάνοντας αντικατάσταση και πράξεις:

$$\boxed{x = 1{,}6\text{m}}$$

β) Από την (1), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στην τραμπάλα, έχουμε:

$$F = N_A' + N_B'$$

Όμως δείξαμε ότι:

$N_A = w_A$ και

$N_B = w_B$

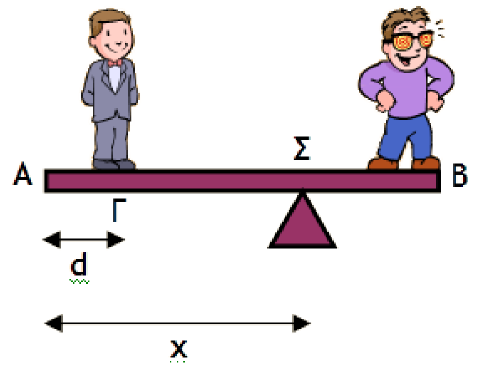
Επομένως:

$$F = w_A + w_B$$

Κάνοντας αντικατάσταση και πράξεις:

$$\boxed{F = 1000N}$$

γ) Έστω ότι το παιδί στο άκρο Α πλησιάζει κατά απόσταση d το στήριγμα (Σ) και φτάνει στο σημείο Γ του σχήματος:



Θέτουμε $(\Gamma\Sigma) = (A\Sigma) - d = x - d$ και $(B\Sigma) = L - x$.

Ως προς το σημείο Σ:

$$\tau_A = +N_A \cdot (x - d)$$

$$\tau_B = -N_B \cdot (L - x)$$

$$\tau_F = 0$$

Για τη συνολική ροπή έχουμε:

$$\Sigma\tau = \tau_A + \tau_B + \tau_F = N_A \cdot (x - d) - N_B \cdot (L - x)$$

Όμως δείξαμε ότι:

$N_A = w_A$ και

$N_B = w_B$

Επομένως:

$$\Sigma\tau = w_A \cdot (x - d) - w_B \cdot (L - x) = w_A \cdot x - w_A \cdot d - w_B \cdot (L - x)$$

Επειδή όμως, όπως δείξαμε:

$$w_A \cdot x = w_B \cdot (L - x)$$

έχουμε:

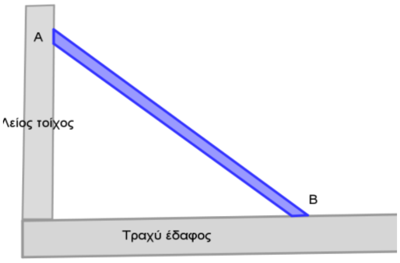
$$\Sigma\tau = -w_A \cdot d < 0$$

Επειδή $\Sigma\tau < 0$ η τραμπάλα θα ανατραπεί δεξιόστροφα.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Μια ράβδος ομογενής ΑΒ μήκους L και βάρους w=100N ισορροπεί όπως φαίνεται στο



σχήμα στηριζόμενη στο άκρο της Α σε λείο τοίχο και στο άκρο της Β σε τραχύ έδαφος.

Δίνεται ότι η ελάχιστη γωνία για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει είναι φ=45° και ότι $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

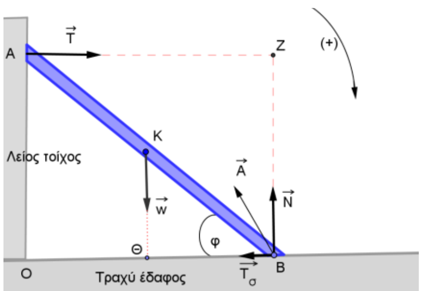
Ζητείται:

α)Η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στη ράβδο.

β) Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-εδάφους καθώς και τη δύναμη που ασκεί ο λείος τοίχος στη ράβδο.

γ) Το μέτρο της δύναμης (αντίδρασης) του εδάφους στη ράβδο.

<u>Λύση</u>



Η ράβδος δέχεται 3 δυνάμεις όπως στο σχήμα. Το βάρος της w, την κάθετη δύναμη από τον τοίχο Τ και την δύναμη από το έδαφος Α. Επειδή ο τοίχος είναι λείος η Τ είναι κάθετη στον τοίχο και η Α έχει τυχαία κατεύθυνση επειδή το έδαφος είναι τραχύ.

Η δύναμη από το έδαφος Α αναλύεται στην κάθετη δύναμη Ν και στην στατική τριβή $T_σ$.

(ένας καλός τρόπος για να σχεδιάζουμε τις διευθύνσεις των δυνάμεων είναι να έχουμε υπόψη τον κανόνα που λέει ότι "… όταν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών δυνάμεων οι φορείς τους περνάνε από το ίδιο σημείο".)

α) Επειδή η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει

$\sum F_x = 0$ (1)

$\sum F_y = 0$ (2)

$\sum \tau = 0$ (3) ως προς το σημείο Β (Η επιλογή του σημείου γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε από εκείνο το σημείο να περνά μια άγνωστη δύναμη).

Από την (2) έχουμε ότι $w = N \Rightarrow N = 100N$

β) Από την (3) έχουμε:

(θεωρούμε αυθαίρετα θετική φορά την δεξιόστροφη φορά του σχήματος)

$$T(AO) - w\frac{(OB)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$T \cdot L \cdot \eta\mu\varphi = w \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$
$$T = \frac{w}{2 \cdot \varepsilon\varphi\varphi} \Leftrightarrow$$
$$T = 50N$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι Τ $= T_\sigma$, άρα $T_\sigma = 50N$

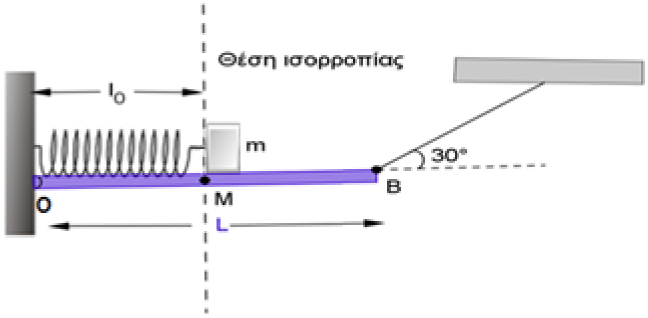
Επειδή η ράβδος οριακά δεν ολισθαίνει, η στατική τριβή θα είναι ίση με την οριακή τριβή:

$T_\sigma = T_{o\rho} = \mu_\sigma N$, **οπότε:** $\mu_\sigma = \frac{T_\sigma}{N} \Rightarrow \frac{50}{100} \Rightarrow \mu_\sigma = 0,5$.

γ) Η αντίδραση του εδάφους είναι η συνισταμένη των δυνάμεων Τ και Ν οπότε έχουμε:

$$A = \sqrt{N^2 + T_\sigma^2} \Leftrightarrow A = 50\sqrt{5}N$$

Πρόβλημα 2.



Η ράβδος ΟΒ είναι ομογενής έχει βάρος w=10N και έχει μήκος L=2m. Το ένα άκρο της Ο στηρίζεται σε τοίχο με άρθρωση, ενώ στο άλλο έχουμε δέσει νήμα το οποίο σχηματίζει γωνία φ=30° με το οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη ράβδο βρίσκεται οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 100\frac{N}{m}$ που στο ένα άκρο του έχουμε δέσει σώμα μάζας m=1kg που ισορροπεί ακίνητο. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $\ell_0 = \frac{L}{2} = 1m$. Τη χρονική στιγμή t=0 εκτοξεύεται το σώμα με ταχύτητα υ=5m/s προς τα δεξιά ,οπότε το σώμα ξεκινάει να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. (Υπόδειξη: Ως θετική φορά θεωρείστε την κατεύθυνση προς τα δεξιά.)

Να βρεθούν:

α) Η τάση του νήματος πριν την εκτόξευση του σώματος.

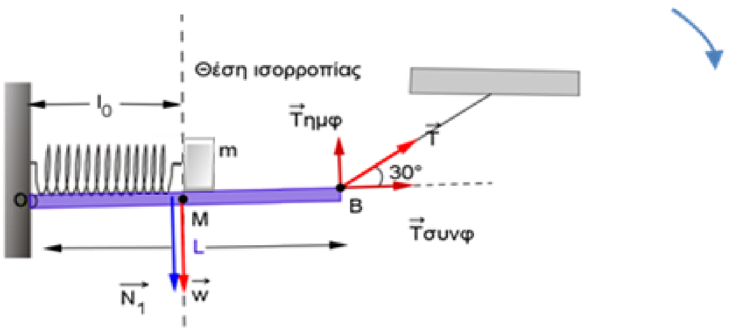
β) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή t=0,15·π s.

δ)Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από την άρθρωση τη χρονική στιγμή t=0,15·π s.

<u>Λύση</u>

α) Παίρνουμε ισορροπία ροπών ως προς το Ο επειδή από εκείνο το σημείο περνά άγνωστη δύναμη και έχουμε (για καλύτερη κατανόηση των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο μπορεί κάποιος να κοιτάξει στο παρακάτω σχήμα):



Η δύναμη N_1 είναι ίση με το βάρος του σώματος (N_1=W=mg=10N).

$\sum \tau = 0$ οπότε $w \cdot \frac{L}{2} + N_1 \cdot \frac{L}{2} - T\eta\mu\varphi \cdot L = 0$

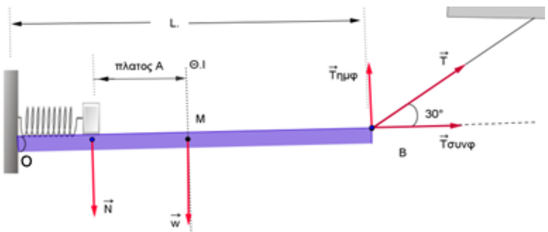
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $T = 20N$.

β) Αρχικά το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας από όπου εκτοξεύεται προς τα δεξιά. Άρα η ταχύτητα εκτόξευσης είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται λοιπόν από τη σχέση:

υ_{max}=Α·ω, οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι Α=0,5m.

όπου $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\frac{rad}{s}$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2\pi s$

γ)



Επειδή η αρμονική ταλάντωση γίνεται χωρίς αρχική φάση, η απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση:

$x = A \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0.5\eta\mu 10t (SI)$

Θέτοντας όπου t=0,15·π s βρίσκουμε ότι $x = -0,5m$. Δηλαδή εκείνη τη στιγμή το σώμα είναι στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσής του. Στο σχήμα φαίνεται η ακριβής θέση του σώματος και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος εκείνη τη στιγμή (δεν έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο από την άρθρωση επειδή δεν είναι χρήσιμες για την επίλυση αυτού του ερωτήματος).

Από ισορροπία των ροπών ως προς το Ο έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow$$

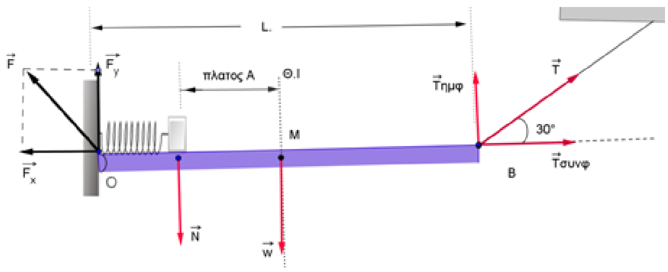
$$N(\frac{L}{2} - A) + w\frac{L}{2} - T\eta\mu\varphi \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$N(\frac{L}{2} - A) + w\frac{L}{2} = T\eta\mu\varphi \cdot L \Rightarrow$$

$$10 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 1 = T \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$T = 15N$$

δ)



Επειδή δε γνωρίζουμε τη διεύθυνση της δύναμης από την άρθρωση, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφο και υπολογίζουμε τις συνιστώσες αυτές F_xκαι F_y:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = F_x \Rightarrow F_x = 15\frac{\sqrt{3}}{2}N \text{ και}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + T\eta\mu\varphi = w + N \Rightarrow F_y = 12{,}5N$$

Επομένως η δύναμη F θα είναι ίση με

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 5\sqrt{13}N$$