# ΤΡΙΩΝΥΜΟ Β′ ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

today

1. Να βρεθούν,αν υπάρχουν,οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:
   - $x^2 + 2x + 1 = 0$
   - $x^2 - 3x - 10 = 0$
   - $y^2 + 4y + 4 = 0$
   - $x^2 - 6x + 5 = 0$
   - $w^2 + 2w + 2 = 0$
   - $x(x + 2) = x + 6$
   - $(y - 1)^3 + (y - 2)^2 = (y + 1)^3 - 10$

2. Αν οι αριθμοί α,β,γ θεωρούνται γνωστοί, να λυθούν οι εξισώσεις:
   - $x^2 - (a + \beta)x + \alpha\beta = 0$
   - $y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
   - $\frac{\alpha^2 x^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha x}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = 0$ με αβγ $\neq 0$

3. Να αποδειχτεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης $9x^2 + 12x + 4 = 0$ είναι και λύσεις της εξίσωσης
$$\sqrt{9x^2 + 18x + 24} + \sqrt{81x^2 + 3x + 2} = 10.$$

4. Δίνεται η εξίσωση $(a + \gamma - \beta)x^2 + 2\gamma x + \beta + \gamma = 0$ με α+γ $\neq$ β. Αν οι αριθμοί α,β,γ ειναι ρητοί αποδείξτε οτι οι ρίζες της εξίσωσης είναι ρητοί αριθμοί.

5. Αν σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου και ο σταθερός όρος είναι ετερόσημοι να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

6. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-2\lambda} = \frac{3}{x-\lambda}$ για τις διάφορες τιμές του λ $\in R$.

7. Αν τα μήκη των πλευρών ενος τριγώνου είναι α,β και γ, να δείξετε οτι η εξίσωση $\gamma^2 x^2 + (\gamma^2 - a^2 + \beta^2)x + \beta^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda^2 + 3 = 0$.

   (a) Για ποιές τιμές του λ η μία ρίζα της εξίσωσης είναι το 2.Ποιές είναι τότε οι άλλες ρίζες της εξίσωσης;

   (b) Αν η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.Ποιά είναι η διπλή ρίζα;

   (c) Για ποές τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες;

   (d) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει άνισες ρίζες.

   (e) Να αποδείξετε ότι για $\lambda \neq 1$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

## Πολυωνυμικές εξισώσεις

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις συνδέονται άμεσα με πάρα πολλά προβλήματα της αφηρημένης άλγεβρας αλλά και με προβλήματα γεωμετρικά που περιγράφουν τη συμμετρία αντικειμένων του χώρου.Έχει σημασία λοιπόν να γνωρίζουμε πότε μια τέτοια εξίσωση μπορεί να λυθεί με έναν ορισμένο αριθμό βημάτων.Στη γενική της μορφή η εξίσωση γράφεται ως

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

όπου οι αριθμοί $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n$ είναι πραγματικοί και n $\in N$ είναι ο βαθμός της εξίσωσης.Όπως φένεται άμεσα αν ο βαθμός είναι 1 ή 2 τότε έχουμε τις απλές περιπτώσεις της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εξίσωσης οι οποίες λύνονται απλά με έναν μικρό αριθμό βημάτων.Επίσης αποδυκνύεται ότι η τριτοβάθμια και η τεταρτοβάθμια εξίσωση επίσης επιλύονται με παρόμοιες διαδικασίες.

Η διαδικασία αυτή,κατά την οποία βρίσκουμε έναν τύπο για τη λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης που να εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές της εξίσωσης, ονομάζεται *επίλυση με ριζικά.*Το 1824 ο Abel (1802-1829) απέδειξε ότι δεν υπάρχει ανάλογος τύπος για την εξίσωση πέμπτου βαθμού που να δίνει τις λύσεις της εξίσωσης.Δηλαδή η εξίσωση πέμπτου βαθμού δεν επιλύεται με ριζικά.Το 1829 ο Abel έδωσε μια επαρκή συνθήκη ώστε ένα πολυώνυμο (οποιουδήποτε βαθμού) να επιλύεται με ριζικά.Λίγο αργότερα ο Galois (1811-1832) εισήγαγε την έννοια της ομάδας (ένα σύνολο εφοδιάζεται με μία προσεταιριστική πράξη ως προς την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο ).Συνέδεσε κάθε πολυώνυμο με μία ομάδα και χρησιμοποιώντας κάποιες ιδιότητές της παρουσίασε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει κατάλληλος τύπος για τις θέσεις μηδενισμού του πολυωνύμου.Έτσι έδωσε την τελική λύση στο πρόβλημα εγκαινιάζοντας ταυτόχρονα έναν νέο κλάδο της σύγχρονης άλγεβρας.