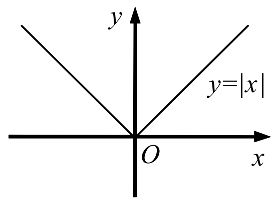
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΣΧΟΛΙΑ

• *1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*

ΣΧΟΛΙΟ 1

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$. Διότι όταν $h<0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$,



ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$,

- που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

- **παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$**

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$

και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$,

(α) (β)

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Άρα $\qquad \mathbf{(c)'=0}$.

- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$**

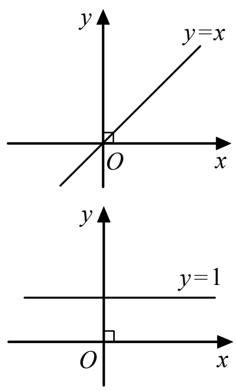
Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$,

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$. Επομένως

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Άρα $\qquad \mathbf{(x)'=1}$.

(α)



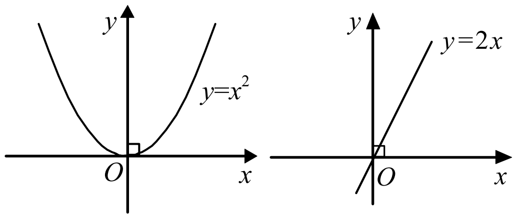
(β)

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{\rho}$**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$,και για $h\neq 0$,

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$. Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.



Άρα $\boldsymbol{(x^2)'=2x}$

(α) (β)

Ισχύει $\boldsymbol{(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}}$, όπου ρ ρητός αριθμός

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $\boldsymbol{cf(x)}$**

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$, και για $h\neq 0$ $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$.

Άρα $\boldsymbol{(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)+g(x)}$**

Έστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))\ =(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$

Άρα $\boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$

. 2 *ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$ αφού $f_1+f_2+...+f_\kappa=\dfrac{\nu_1}{\nu}+\dfrac{\nu_2}{\nu}+...+\dfrac{\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu_1+\nu_2+...+\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu}{\nu}=1$.

• 3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

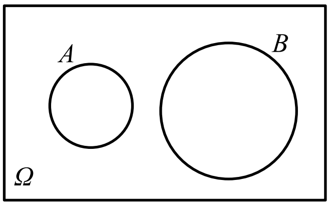
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως: $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} + \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι **ανά δύο ασυμβίβαστα** θα έχουμε

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).$$



$A \cup B$

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

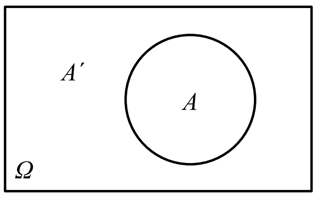
$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο: $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ τότε

$P(\Omega) = P(A) + P(A')$ τότε $1 = P(A) + P(A')$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

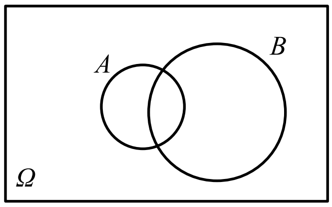
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε
$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$, (1) αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές. Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$\dfrac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}+\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}-\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$ και επομένως

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.



$A\bigcup B$

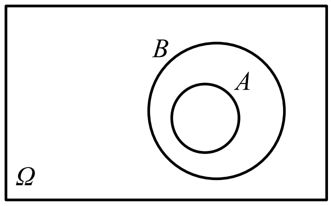
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν $A\subseteq B$, τότε $P(A)\leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A\subseteq B$ έχουμε διαδοχικά: $N(A)\leq N(B)$ τότε

$\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}\leq\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}$ Άρα $P(A)\leq P(B)$.



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$,
έχουμε: $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$.

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.