Β΄ Λυκείου

Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού

(Αναλυτική Γεωμετρία)

1ο Κεφάλαιο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Νίκος Τερψιάδης

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Ταξινόμηση θεωρίας 1ου Κεφαλαίου (Διανύσματα)
σύμφωνα με τις κατηγορίες προβλημάτων που παρουσιάζονται στις ασκήσεις

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
1. Κανόνας πολυγώνου (τα διανύσματα πρέπει να είναι διαδοχικά – γίνεται και αλγεβρικά): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$
2. Κανόνας παραλληλογράμμου (τα διανύσματα πρέπει να έχουν ίδια αρχή – γίνεται μόνο γεωμετρικά σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$
3. Με συντεταγμένες: $(x_\alpha\,,\,y_\alpha)+(x_\beta\,,\,y_\beta)=(x_\alpha+x_\beta\,,\,y_\alpha+y_\beta)$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
1. Κανόνας παραλληλογράμμου (τα διανύσματα πρέπει να έχουν ίδια αρχή – γίνεται και αλγεβρικά): $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$
2. Με συντεταγμένες: $(x_\alpha\,,\,y_\alpha)-(x_\beta\,,\,y_\beta)=(x_\alpha-x_\beta\,,\,y_\alpha-y_\beta)$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
1. Με συντεταγμένες: $\lambda\cdot(x_\alpha\,,\,y_\alpha)=(\lambda\cdot x_\alpha\,,\,\lambda\cdot y_\alpha)$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ)
1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$
2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_\alpha\cdot x_\beta+y_\alpha\cdot y_\beta$
3. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$
4. Μπορούμε να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων με πλάγιο τρόπο από σχέσεις που δίνει η άσκηση (π.χ. μπορεί να δίνει τα δύο διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς άλλων διανυσμάτων ή να δίνει μία ισότητα στην οποία να περιέχονται τα δύο διανύσματα).

ΔΥΝΑΜΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
Προσοχή! Δεν ορίζονται δυνάμεις μεγαλύτερες του τετραγώνου.
$\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$

ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ $\left(0^o\le\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le 180^o\right)$

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$

Μπορεί να ζητείται:
1. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων.
2. Η γωνία των διανυσμάτων.
3. Να αποδείξετε ή να εξετάσετε αν η γωνία είναι οξεία ή αμβλεία.

ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ x′x $(0^o\le\theta<360^o)$
$\varepsilon\varphi\theta=\lambda$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
1. $\lambda=\frac{y}{x}$
2. $\lambda=\varepsilon\varphi\theta$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
$x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A$ και $y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A$

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
1. $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}$
2. $(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
3. Όταν δεν δίνονται συντεταγμένες, τότε βρίσκω το τετράγωνο του μέτρου.

ΜΕΣΟ ΤΜΗΜΑΤΟΣ (Μ μέσο ΑΒ)

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

1. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$
2. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
3. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$
4. i) $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, ii) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ

1. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
2. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{\alpha}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{\alpha}$
2. $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
3. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ Προσοχή! Δεν ισχύει.

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\alpha}$
2. $\lambda \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta}$
3. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Όταν ζητείται να βρεθεί ένα διάνυσμα τότε εννοεί:
1. ή να βρεθούν οι συντεταγμένες του (αν δίνονται συντεταγμένες),
2. ή να βρεθεί το διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός γνωστών διανυσμάτων.

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα που σχηματίζονται από αυτά τα τρία σημεία, είναι παράλληλα.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για να βρούμε την προβολή $\vec{\beta}_1$ ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ σε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

- $\vec{\beta}_1 // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \lambda \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Το πρόβλημα της προβολής διανύσματος σε διάνυσμα εμπεριέχεται στο πρόβλημα της ανάλυσης διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες.
Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\beta}_1$ και $\vec{\beta}_2$, η μία από τις οποίες να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, βρίσκουμε πρώτα την προβολή $\vec{\beta}_1$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το $\vec{\beta}_2$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

- $\vec{\beta}_1 // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta}_1 = \lambda \cdot \vec{\alpha}$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1$
- $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$