ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

1) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
2) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.
3) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

Απαντηση.

Θεωρουμε ότι ο βασικος τυπος υπολογισμου του εωτερικου γινομενου είναι δεδομενο και δεν απαιτειτε η αποδειξη του , $\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\varphi$

1) Με βαση τα στοιχεια της εκφωνησης εχουμε

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\varphi = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 2$$

2)

Για το ερωτημα αυτό θα πρεπει να αποδειξουμε το εξης πρωτα.

Είναι γνωστο ότι $\left(\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ αλλα αυτό είναι το εσωτερικο γινομενο του α με τον εαυτο του και επειδη με το το ένα α είναι πανω στο άλλο α (συγγραμικα) και η γωνια μεταξυ τους είναι μηδεν και το cos0=1 εχουμε :

$$\left(\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = |\alpha||\alpha|\cos 0 = |\alpha|^2 1 \Rightarrow \left(\vec{\alpha}\right)^2 = |\alpha|^2$$

Εφοσον τα διανυσματα του ερωτηματος (2) είναι καθετα μεταξυ τους η γωνια τους είναι 90 μοιρες και το συνημίτονο των 90 μοιρων ειναι μηδεν.

(τιπ : όταν μας δινεται καθετοτητα διανυσματων το μυαλο μας πηγαινει στην χρηση του εσωτερικου γινομενου και όταν μας δινεται σπανιωτερα παραλληλια διανυσματων στο εξωτερικο γινομενο , για να εχουμε το πολυποθυτο μηδεν στο δευτερο μελος.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \to \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos 90 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Πχ $\vec{a} \parallel \vec{b} \to \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|$)

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \to \vec{a}x\vec{b} = |a||b|\sin 0 \Rightarrow \vec{a}x\vec{b} = 0$$

Με βαση τα παραπανω και με χρηση του εσωτερικου γινομενου δημιουργουμε την παρακατω εξίσωση.

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(k\vec{a}+\vec{b}\right)=0 \Rightarrow 2\vec{a}\cdot k\vec{a}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\cdot k\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow 2k\left(\vec{a}\right)^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}\cdot\vec{a}+\left(\vec{b}\right)^2=0 \Rightarrow$$

Ισχυει $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\Rightarrow 2k|a|^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+|b|^2=0 \Rightarrow 2k\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2+k\cdot 2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=0 \Rightarrow 4k+4+2k+8=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6k=-12 \Rightarrow k=-2$$

3)Στο ερωτημα αυτό θα πρεπει εχουμε εκμεταλευτουμε στοιχεια της εκφωνησης καθως και ευρηματα προηγουμενων ερωτηματων . Τετοια στοιχεια είναι το $|\alpha|$ συνεπώς και το $|\alpha|^2$, το $|b|$ και $|b|^2$ αλλα και το εσωτερικο γινομενο $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ονομαζοντας το διανυσμα ως $\vec{u}=2\vec{a}+\vec{b}$ το μετρο αυτου θα είναι $|\vec{u}|=\sqrt{\left(\vec{u}\right)^2}=\sqrt{\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)^2}$ (1)

Η γνωστη ταυτοτητα από την αλγεβρα $\left(a+b\right)^2$ ισχυει και στα διανυσματα.

$$\left(\vec{u}\right)^2=\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)^2=4\left(\vec{a}\right)^2+2\cdot 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\left(\sqrt{2}\right)^2+4\cdot 2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=8+8+8 \Rightarrow \left(\vec{u}\right)^2=24$$

$$(1) \Rightarrow |\vec{u}|=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6} \Rightarrow |\vec{u}|=|2\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{6}$$