ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1. Αν οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ επαληθεύουν τη σχέση $2x_1 + 3x_2 = 0$,να δείξετε ότι $a\gamma + 6\beta^2 = 0$.

2. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι η ρ,να δείξετε ότι
$$\rho^2 = -\frac{\beta\rho + \gamma}{a}$$
και να βρείτε την άλλη ρίζα της.

3. Να βρεθεί το λ ώστε οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 - (\lambda+5)x - 3(\lambda^2 - 2) = 0$ να επαληθεύουν την εξίσωση $4x_1 - 3x_2 + 5 = 0$.

4. (α΄) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(a \neq 0)$.Θέτουμε $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.Να δείξετε ότι
$$S_n = S \cdot S_{n-1} - P \cdot S_{n-2} \ (n > 2)$$
   (β΄) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - kx + \lambda = 0$ με ρίζες x_1, x_2 και το άθροισμα
$$S_n = x_1^n + x_2^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
   Να δείξετε ότι $S_n = kS_{n-1} - \lambda S_{n-2}$ $(n > 2)$ και να υπολογίσετε το άθροισμα S_5

5. Να βρεθεί ο λ ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda+1)x + 27 = 0$ να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης ρίζας.

6. (α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 3.
   (β΄) να βρείτε τις τιμές του k ώστε η ευθεία $x + y - k = 0$ να τέμνει ή να εφάπτεται ή να μην έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} - 42 = 0, \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7 = 0$.

8. Να βρεθεί το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων:
$(i) 2x^2 - x - 1 = 0$ $(ii) - x^2 + (a+b)x - ab$ $(iii) - x^2 + 6x - 9$ $(iv) 3x^2 + x + \frac{1}{2}$

9. Αν $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ και υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ να δείξετε ότι το $f(x)$ έχει άνισες ρίζες.

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:
$(i) x^2 - 9x + 14 < 0$ $(ii) x^2 - \left(\sqrt{3} + 1\right)x + \sqrt{3} \geq 0$ $(iii) - x^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x - \sqrt{6} > 0$

11. (α΄) Να αποδείξετε ότι οι παραβολές $y = x^2$ και $y = -x^2 - 4x - 5$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
   (β΄) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται συγχρόνως στις παραπάνω παραβολές.

12. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(1,2),Β(3,0),Γ(-1,4) είναι συνευθειακά.Υπάρχει παραβολή που να διέρχεται από αυτά;Ποιό γενικό συμπέρασμα συνάγεται από αυτό;
13. Να βρείτε τα α,β,γ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2+\beta x+\gamma$ να διέρχεται από το σημείο Α(1,5) και να έχει κορυφή το σημείο Κ(2,7).
14. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α,β.Στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ με (ΑΕ)=(ΒΖ)=(ΓΗ)=(ΔΘ)=x.Να βρεθεί το x ώστε το τετράπλευρο ΕΖΗΘ να έχει ελάχιστο εμβαδόν.
15. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο να βρεθεί εκείνο με το μέγιστο εμβαδόν.
16. Σε τετράγωνο πλευράς α να εγγράψετε τετράγωνο με ελάχιστο εμβαδόν (δηλαδή να βρείτε την πλευρά του).
17. Δίνεται τμήμα ΑΒ μήκους α και σημείο Μ του ΑΒ.Κα τασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος του ΑΒ τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΜΓ και ΒΜΔ.Ποιά είναι η θέση του Μ ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων να γίνεται ελάχιστο;
18. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο Α(0,1).
19. Να βρεθεί σημείο του τμήματος ΑΒ μήκους 10,ώστε η παράσταση $2(MA)^2+3(MB)^2$ να είναι ελάχιστη.
20. Να αποδείξετε ότι οι παραβολές $y = x^2+x-2$ και $y = -x^2-2x+3$ τέμνονται σε δύο σημεία τα οποία μαζί με τις κορυφές των παραβολών σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.
21. Να βρείτε την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία $y = 3x+2$.
22. Αν δύο αριθμοί έχουν σταθερό άθροισμα να βρείτε πότε το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο.Στη συνέχεια να βρείτε το μέγιστο της παράστασης $y = 4x^2-x^4$.
23. Να βρείτε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης εχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Α(3,0).
24. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2+(\lambda-5)x+(1-\lambda) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.Στη συνέχεια να βρείτε το λ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών να γίνεται ελάχιστο.
25. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του α ώστε η ευθεία $y = a$ να τέμνει συγχρόνως τις παραβολές $y = -x^2+2x+3$ και $y = \frac{1}{2}x^2-4x+3$.
26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2-(\lambda+1)x+1, g(x) = -x^2+6x-4\lambda+2$.Να βρεθεί το λ ώστε το ελάχιστο της f να ισούται με το μέγιστο της g.
27. Να λυθεί η ανίσωση
$$\left|\frac{3x|x|-4x}{x^2+1}\right| < 4$$
28. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι $(i)a^2-a\beta+\beta^2 \geq 0, (ii)a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-a\gamma-\beta\gamma \geq 0$.
29. Να λύσετε το σύστημα
$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} = 12$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$