ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επαναληπτικό Διαγώνισμα

10/5/2008

ΘΕΜΑ 1

Α. Να δείξετε ότι ένα μιγαδικό πολυώνυμο $P(z)$ έχει πραγματικούς συντελεστές αν και μονο αν

$$\overline{P(\overline{z})} = P(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. $\int x^{-1} dx = \lambda o\gamma_{e} x + c$

2. Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = 1 + i$ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

3. Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο a και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a τότε $f'(a) \leq 0$.

4. Αν το γράφημα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει σε κάθε σημείο της εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεια $y = x$ τότε το γράφημα της είναι μια ευθεία.

5. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παράγωγίσιμη συνάρτηση τότε

$$\int_{a}^{b} f'(x) dx = f(a) - f(b) \Leftrightarrow f(a) + f(b) = 0$$

ΘΕΜΑ 2

Α. Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και Α,Β είναι οι εικόνες των αριθμών -1 και $z^2 - 1$ αντίστοιχα,να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε τα σημεία Α,Μ,Β να είναι συνευθειακά.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\, x, x \in [0, \pi]$ και ένα σημείο $\text{M}(a, f(a))$ της γραφικής παράστασης C της f.Φέρνουμε εφαπτομένη της στο σημείο Μ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Κ και διαιρεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη C και τον ημιάξονα Ox σε δύο μέρη με εμβαδά E_1, E_2 .Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{E_1}{E_2}$ συναρτήσει του a

ΘΕΜΑ 3

Α. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\text{ημ}\,(tx)}{t + x} dt$$

Β. Έστω $a_1, a_2, ..., a_n$ θετικοί αριθμοί.

1. Να υπολογιστεί το σημείο στο οποίο η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + x}{n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{n-1} x}}$$

   έχει ελάχιστη τιμή.

2. Να αποδειχτεί ότι

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Α. Αν $a > 0$ να λυθεί η εξίσωση

$$a^x + (a+3)^x = (a+1)^x + (a+2)^x$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\,\lambda o\gamma_{\mathrm{e}}\,x, x > 0$.

(α′) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(β′) Αν $0 < a < b < \gamma$ να δείξετε ότι

i.
$$(\gamma - \beta)\left(f\left(\beta\right) - f\left(\gamma\right)\right) < \left(\beta - \alpha\right)\left(f\left(\gamma\right) - f\left(\beta\right)\right)$$

ii. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι

$$\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$$

και αν επιπλέον $\alpha + \gamma = 1$ να δείξετε ότι

$$\alpha^\alpha \gamma^\gamma \geq \frac{1}{2}$$