

## 2.3 Στάσιμο κύμα

### 2.3.1 Μαθηματική Επεξεργασία

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία χορδή και σε αυτήν την χορδή διαδίδονται δύο πανομοιότυπα κύματα σε αντίθετες κατευθύνσεις. Δηλαδή αν το δούμε από την μαθηματική άποψη θα έχουμε δύο κύματα με εξισώσεις

$$y_1 = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ και } y_2 = A \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \text{ τα οποία}$$

αφού βρίσκονται στο ίδιο μέσον θα συμβάλλουν. Ο τρόπος με τον οποίο έχουν δημιουργηθεί αυτά τα κύματα προς στιγμήν δεν μας ενδιαφέρει γιατί θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με αυτό το θέμα. Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y_{\text{ολ}} &= y_1 + y_2 = A \left( \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right) \Rightarrow \\ y_{\text{ολ}} &= 2A \sin 2\pi \frac{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}}{2} \eta \mu 2\pi \frac{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}}{2} \Rightarrow \\ y_{\text{ολ}} &= 2A \sin 2\pi \left( -\frac{2x}{2\lambda} \right) \eta \mu 2\pi \left( \frac{2t}{2T} \right) \Rightarrow \\ \boxed{y_{\text{ολ}} &= 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T}} \quad (2.19) \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος. Στην πραγματικότητα αυτή είναι μια εξίσωση ταλάντωσης, σύμφωνα με την οποία το κάθε σημείο ταλαντώνεται με το δικό του πλάτος, το οποίο εξαρτάται από το που βρίσκεται στην χορδή. Αυτό μπορούμε να το δούμε καλύτερα αν δούμε την σχέση του πλάτους:  $A = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ . Βλέπουμε ότι το

πλάτος ταλάντωσης κυμαίνεται από μηδέν ως  $2A$  και εξαρτάται από το σε ποια θέση  $x$  βρίσκεται το εν λόγω σημείο. Έτσι, οι θέσεις των σημείων που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος ( $2A$ ) θα είναι τα σημεία:

$$\begin{aligned} A &= 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 2A \Rightarrow \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \\ \frac{2\pi x}{\lambda} &= k\pi \Rightarrow \boxed{x = k \frac{\lambda}{2}} \Rightarrow \\ \boxed{x &= 2k \frac{\lambda}{4}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.20) \end{aligned}$$

Τα σημεία αυτά ονομάζονται κοιλίες.

Τα σημεία τα οποία παραμένουν διαρκώς ακίνητα ονομάζονται δεσμοί και θα είναι:

**Εξίσωση στάσιμου  
κύματος**

**Θέσεις δεσμών -  
κοιλιών**

$$A = 2A \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0 \Rightarrow \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{(2k+1)\lambda}{4}} \quad (2.21)$$

Η απόσταση ενός δεσμού από μία κοιλία ή μιας κοιλίας από ένα δεσμό μπορεί εύκολα να βρεθεί:

$$x_{\Delta} - x_K = (2k+1) \frac{\lambda}{4} - 2k \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} (2k+1 - 2k) \Rightarrow$$

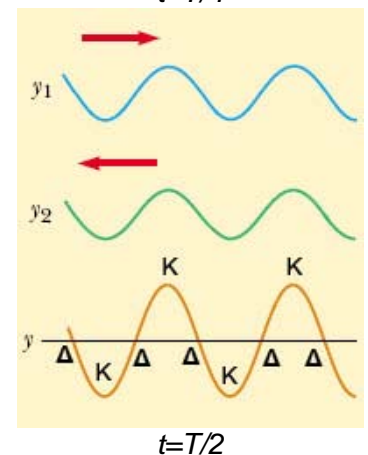
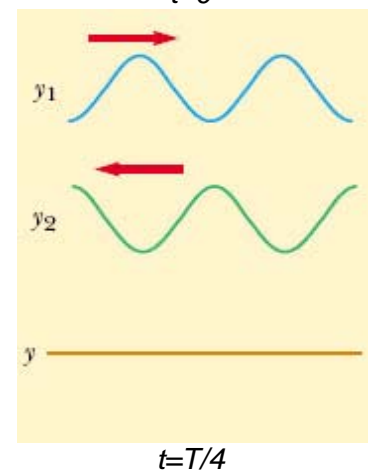
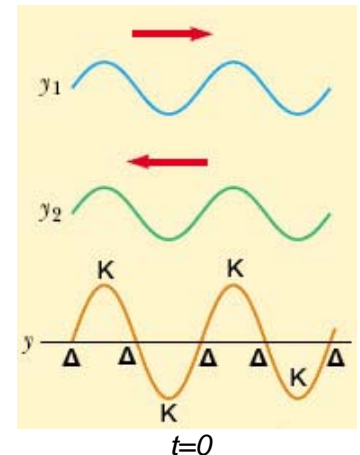
$$x_{\Delta} - x_K = \frac{\lambda}{4} \quad (2.22)$$

ενώ η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών είναι προφανώς ίση με  $\lambda/2$ .

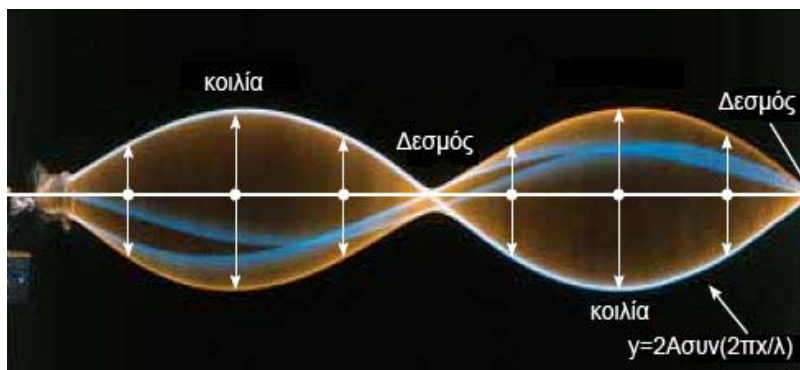
Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην όλη διαδικασία που έχουμε κάνει για να καταλήξουμε στις εξισώσεις του στάσιμου κύματος και για τις θέσεις κοιλιών – δεσμών θεωρήσαμε ότι η θέση  $x=0$  είναι κοιλία. Φυσικά στάσιμο κύμα έχουμε και στην περίπτωση που το  $x=0$  είναι δεσμός, αλλά οι εξισώσεις που περιγράφουν το στάσιμο κύμα διαφέρουν από τις προαναφερόμενες.

### 2.3.2 Φυσική Μελέτη

Αφού λοιπόν ολοκληρώσαμε –σχεδόν– την μαθηματική περιγραφή του στάσιμου κύματος είναι σωστό να αρχίσουμε την φυσική περιγραφή. Δύο κύματα «μοιράζονται» την ίδια χορδή το ένα πηγαίνοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά και το άλλο από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τα κύματα αυτά συμβάλουν και το αποτέλεσμα είναι ένα στάσιμο κύμα. Το γεγονός αυτό το βλέπουμε και στα διπλανά σχήματα. Τα δύο κύματα καθώς διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις συναντώνται και όπως στην εικόνα για  $t=0$  το μέγιστο του ενός συναντάται με το μέγιστο του άλλου, το μηδέν του ενός με το μηδέν του άλλου κ.ο.κ. Έτσι η χορδή εμφανίζει την εικόνα που βλέπουμε στο γ. Τα δύο κύματα συνεχίζουν να κινούνται, έτσι σε κάποια χρονική στιγμή ( $t=T/4$  στην εικόνα) το πλάτος του ενός θα συναντηθεί με το  $-A$  του άλλου και η συνολική εικόνα θα είναι μηδενικής απομάκρυνσης. Μετά πάλι ( $t=T/2$ ) το  $-A$  του ενός θα συναντηθεί με το  $-A$  του άλλου και έτσι θα έχουμε μια εικόνα συμμετρική της πρώτης ως προς τον άξονα διάδοσης.



Σχήμα 17: Δημιουργία στάσιμου κύματος



Σχήμα 18: Φωτογραφία στάσιμου κύματος

Η φωτογραφία αυτή τραβήχτηκε με ειδική μηχανή ικανή να πάρει πολλές φωτογραφίες σε σύντομο χρονικό διάστημα, έτσι αποτυπώνεται με τον καλύτερο τρόπο η εικόνα ενός στάσιμου κύματος. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το κάθε σημείο ταλαντώνεται με το δικό του πλάτος ενώ οι δεσμοί δεν ταλαντώνονται καθόλου. Δηλαδή το κάθε σημείο ταλαντώνεται μέσα στα όρια της περιβάλλουσας που δίνεται από την σχέση  $2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$

Από την προηγούμενη ανάλυση, βλέπουμε ότι το στάσιμο κύμα είναι στην πραγματικότητα μία ταλάντωση, όχι ενός μόνο σημείου αλλά ολόκληρης της χορδής. Πράγματι ολόκληρη η χορδή πηγαίνει «πάνω-κάτω» με την ίδια συχνότητα, ενώ κάθε σημείο ταλαντώνεται με το δικό του πλάτος που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 2A. Εξάλλου αν δούμε και ενεργειακά το στάσιμο κύμα, η ύπαρξη των δεσμών απαγορεύει την μεταφορά ενέργειας από το ένα σημείο στο άλλο. Οι δεσμοί παραμένουν συνεχώς ακίνητοι (απομάκρυνση μηδενική άρα και δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μηδέν) και με μηδενική ταχύτητα άρα και κινητική ενέργεια μηδέν. Έτσι, ενώ οι διαταραχές διαδίδονται στη χορδή μεταφέροντας ενέργεια και ορμή, το στάσιμο κύμα δεν μπορεί να μεταφέρει ενέργεια. Απλά αυτό που συμβαίνει είναι το ότι κάθε σημείο κάνει ΑΑΤ με το δικό του πλάτος.

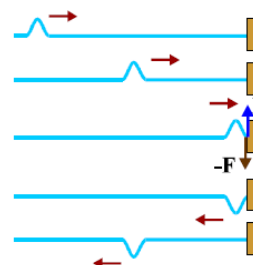
Σε μια χορδή μπορούμε να έχουμε συμβολή από δύο αντιθέτως κινουμένων κυμάτων αν έχω στα δύο άκρα της χορδής δύο σύγχρονες πηγές. Αυτό βέβαια είναι μια προφανής περίπτωση αλλά όχι η μοναδική. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία χορδή της οποίας το ένα άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο και το άλλο άκρο της είναι ελεύθερο. Αν διεγείρουμε το ελεύθερο άκρο τότε θα δημιουργηθεί μια διαταραχή η οποία θα διαδοθεί στην χορδή και θα φτάσει στο ακλόνητο άκρο. Εκεί η διαταραχή θα ανακλαστεί και στη συγκεκριμένη περίπτωση ο παλμός αυτός θα παρουσιάζει διαφορά φάσης π με το προσπίπτον. Η εικόνα αυτή φαίνεται στο δίπλα σχήμα. Στην περίπτωση που το ένα άκρο δεν είναι ακλόνητο αλλά μπορεί να κινηθεί στην διεύθυνση του άξονα y αλλά όχι του άξονα x τότε έχω πάλι ανάκλαση μόνο που σε αυτή την περίπτωση δεν αλλάζει η φάση και η διαταραχή



*Προσοχή! Θα πρέπει να ξεχωρίζουμε τα πλάτη! Υπάρχει το πλάτος των δύο κυμάτων (A) που δημιούργησαν το στάσιμο, υπάρχει το πλάτος ταλάντωσης ενός τυχαίου σημείου της χορδής ( $2A \sin 2\pi x/\lambda$ ) Και το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης δηλαδή το 2A.*



**Πως είναι δυνατόν σε μία χορδή να έχω δύο κύματα που κινούνται αντίθετα;**



Σχήμα 19: Μηχανισμός ανάκλασης σε εμπόδιο

επιστρέφει με την ίδια μορφή που έφτασε στο άκρο. Αν λοιπόν η διέγερση είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση τότε θα ανακλαστεί στο ακλόνητο άκρο και το ακλόνητο άκρο θα λειτουργεί ως πηγή σύμφωνη με την αρχική. Άρα το αποτέλεσμα της συμβολής θα είναι στάσιμο κύμα.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και στην περίπτωση που έχω μία χορδή με τα δύο άκρα ακλόνητα. Έτσι αν διεγείρω την χορδή σε κάποιο σημείο η διαταραχή θα διαδοθεί και προς τις δύο κατευθύνσεις και θα ανακλαστεί και έτσι θα έχω στάσιμο κύμα.

Ακόμη όμως κι αν όλα αυτά που έχουν αναφερθεί πιο πάνω συμβούν η «γεωμετρία» της χορδής θα επιτρέψει την ύπαρξη στάσιμων κυμάτων συγκεκριμένης συχνότητας ή συγκεκριμένου μήκους κύματος και όχι οποιονδήποτε. Ας πάρουμε για παράδειγμα μία χορδή κιθάρας. Τα δύο άκρα της είναι σταθερά στερεωμένα δηλαδή είναι δεσμοί. Η διαταραχή θα ανακλαστεί στα άκρα και θα έχουμε συμβολή. Για να μπορέσει όμως το μαθηματικό μοντέλο να ταιριάζει και με την πραγματικότητα θα πρέπει αν δεν αγγίξουμε πουθενά αλλού την χορδή, δηλαδή αν δεν δημιουργήσουμε πουθενά αλλού δεσμό το συνολικό μήκος της χορδής να

είναι ίσο με  $\lambda/2$  δηλαδή:  $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{u}{2f} \Rightarrow f = \frac{u}{2L}$  και

ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα. Με βάση το ότι τα δύο άκρα της χορδής θα πρέπει να είναι σταθερά μπορούμε να προχωρήσουμε και λίγο παραπέρα: Αν έχει έναν δεσμό

επιπλέον τότε ισχύει  $L = \lambda = \frac{u}{f} \Rightarrow f = \frac{u}{L}$ , αν έχει δύο

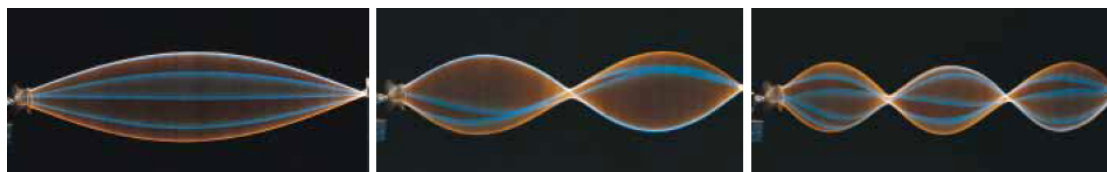
επιπλέον δεσμούς ισχύει  $L = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3u}{2f} \Rightarrow f = 3\frac{u}{2L}$ . Γενικά

δηλαδή ισχύει  $f = n \frac{u}{2L}$  (2.23) όπου  $n$  στην συγκεκριμένη

περίπτωση είναι ίσος με το πλήθος των κοιλιών που εμφανίζονται. Είναι προφανές ότι οι συχνότητες που μπορούν να υπάρξουν στην χορδή εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή σε ποια θέση βρίσκονται οι δεσμοί ή οι κοιλίες.



**Σε μια χορδή  
μπορώ να έχω  
στάσιμο κύμα  
οποιασδήποτε  
συχνότητας;**



Σχήμα 19: Η ίδια χορδή με 2, 3 και 4 δεσμούς αντίστοιχα

Συνεπώς η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής είναι συγκεκριμένη και εξαρτάται μόνο από το μήκος της χορδής και από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Στην κιθάρα παρατηρούμε ότι έχουμε έξι διαφορετικές χορδές με διαφορετικά πάχη. Αυτό γίνεται για να έχουμε διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης στην χορδή άρα και διαφορετικές

συχνότητες. Το ίδιο συμβαίνει κι όταν τις κουρδίζουμε: αυξάνουμε ή μειώνουμε την τάση με αποτέλεσμα την αλλαγή στην ταχύτητα διάδοσης και στη συχνότητα. Η ίδια λογική, η ίδια αρχή λειτουργίας υπάρχει σε όλα τα έγχορδα (βιολί, άρπα, πιάνο κλπ). Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε στις περιπτώσεις που το ένα ή και τα δύο άκρα είναι ελεύθερα να κινηθούν κατά τον άξονα y'y.

Τελευταία αφήσαμε την κουβέντα μας για την ενέργεια. Μέχρι τώρα γνωρίζαμε ότι ένα κύμα μεταφέρει ενέργεια και ορμή. Στο στάσιμο κύμα τα πράγματα δεν είναι έτσι. Τα τρέχοντα κύματα που δημιουργήσαν το στάσιμο κύμα, πράγματι μετέφεραν ενέργεια. Η ενέργεια που μετέφεραν δεν χάθηκε αλλά μεταφέρθηκε σε κάθε στοιχειώδες κομμάτι της χορδής που κάνει ταλάντωση. Έτσι υπάρχουν σημεία τα οποία ταλαντώνονται με ενέργεια  $E_{\max} = \frac{1}{2}D(2A)^2$ , άλλα

σημεία με ενέργεια  $E_{\max} = \frac{1}{2}DA^2$  ενώ άλλα παραμένουν διαρκώς ακίνητα, άρα δεν έχουν ενέργεια. Γενικότερα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ενέργεια με την οποία ταλαντώνεται το κάθε σημείο δίνεται από την σχέση:

$$E_{\max} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E_{\max} = \frac{1}{2}D \left( 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right)^2 \quad (2.24)$$

Λογικά λοιπόν από την στιγμή που έχω την δημιουργία ενός στάσιμου κύματος το κάθε σημείο ταλαντώνεται με την δική του ενέργεια δηλαδή η ενέργεια δεν μπορεί να μεταφερθεί από σημείο σε σημείο όπως στο τρέχων κύμα. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε πολύ εύκολα αφού οι δεσμοί είναι διαρκώς ακίνητοι δεν θα έχουν ενέργεια. Κάθε άλλο σημείο, εκτός των δεσμών έχει ενέργεια η οποία από δυναμική μετατρέπεται σε κινητική, από κινητική σε δυναμική κ.ο.κ. όπως σε μία απλή αρμονική ταλάντωση.

**...και λίγα ακόμη μαθηματικά....**

Η εξίσωση της φάσης σε ένα στάσιμο κύμα δίνεται από την σχέση  $\phi = \frac{2\pi t}{T} = \omega t$ , δηλαδή είναι περίπτωση φάσης

όπως στην απλή αρμονική ταλάντωση. Όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε στο δίπλα σχήμα, υπάρχουν σημεία τα οποία βρίσκονται στο μέγιστο θετικό πλάτος την ίδια χρονική στιγμή που άλλα σημεία βρίσκονται στο μέγιστο αρνητικό πλάτος. Αυτό μπορούμε να πούμε ότι είναι αποτέλεσμα του πρώτου όρου στο στάσιμο κύμα δηλαδή του

$$A = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

σε ποια θέση βρίσκεται ξεκινάει την  $t=0$  από το μέγιστο θετικό ή από το μέγιστο αρνητικό πλάτος. Το ίδιο ακριβώς θα μπορούσαμε να πετύχουμε αν θεωρούσαμε ότι τα μεν σημεία που βρίσκονται στο μέγιστο θετικό πλάτος ξεκινούν με αρχική φάση μηδέν, ενώ τα σημεία που ξεκινούν από το

**Ας μιλήσουμε για ενέργεια....**



*Σε ένα στάσιμο κύμα υπάρχουν μόνο δύο διαφορές φάσης:  $\Delta\phi=0$  αν τα σημεία βρίσκονται ανάμεσα σε δύο δεσμούς ή  $\Delta\phi=\pi$  αν τα σημεία βρίσκονται εκατέρωθεν δεσμού.*

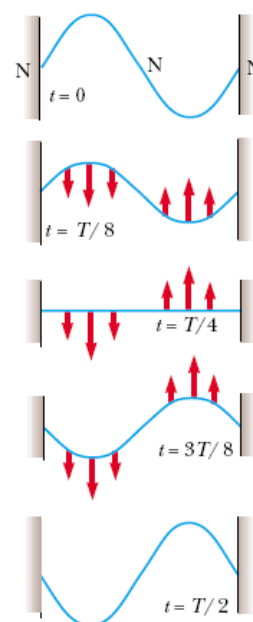
μέγιστο αρνητικό πλάτος, ξεκινούν με μία αρχική φάση  $\pi$ . Σε κάθε περίπτωση, η διαφορά φάσης δύο οποιονδήποτε σημείων που βρίσκονται εκατέρωθεν δεσμού είναι  $\pi$ , ενώ δύο σημεία που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς δεσμούς έχουν διαφορά φάσης μηδέν. Η εικόνα βέβαια που βλέπουμε δίπλα δεν ανταποκρίνεται στην μαθηματική εξίσωση που έχουμε δώσει, αλλά δεν παύει να δείχνει την πραγματικότητα, το πώς ταλαντώνονται τα σημεία της χορδής.

Για να βρούμε την ταχύτητα ενός σημείου της χορδής στο στάσιμο κύμα, θα πρέπει να παραγωγίσουμε την σχέση της απομάκρυνση ή να σκεφτούμε ότι αφού στην πραγματικότητα πρόκειται για ταλάντωση, η σχέση θα έχει την ίδια μορφή. Είναι δηλαδή:

$$u = \frac{dy}{dt} \Rightarrow u = \frac{2\pi}{T} 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (2.25)$$

Τελευταίο αφήσαμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, αφού δεν έχουμε να σχολιάσουμε κάτι το ιδιαίτερο. Η χάραξή του γίνεται με το να βρούμε διαδοχικές τιμές και να τις καταγράψουμε στο χαρτί.

Ανακεφαλαιώνοντας θα καταγράψουμε τις διαφορές των στασίμων από τα τρέχοντα κύματα:



Σχήμα 20: Διαδοχικά στιγμιότυπα στάσιμου

Τρέχοντα Κύματα	Στάσιμα Κύματα
Όλα τα σημεία εξ' αιτίας ενός τρέχοντος κύματος εκτελούν ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους.	Εξ' αιτίας ενός στάσιμου κύματος τα σημεία ταλαντώνονται με διαφορετικά πλάτη.
Μέσω ενός τρέχοντος κύματος έχουμε μεταφορά ενέργειας	Μέσω ενός στάσιμου κύματος δεν έχουμε μεταφορά ενέργειας
Κάθε στιγμή τα σημεία του μέσου, λόγω ενός τρέχοντος κύματος, έχουν διαφορετικές φάσεις	Κάθε στιγμή τα σημεία του μέσου, λόγω ενός στάσιμου κύματος, ή έχουν την ίδια φάση ή έχουν διαφορά φάσης $\pi$
Δύο σημεία του μέσου, λόγω ενός τρέχοντος κύματος, μπορούν να έχουν οποιαδήποτε διαφορά φάσης	Δύο σημεία του μέσου, λόγω ενός στάσιμου κύματος, μπορούν να έχουν διαφορά φάσης ή μηδέν ή $\pi$

