

# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2009 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**Α.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι  $f'(x_0)=0$

**Μονάδες 9**

**Β. α.** Πότε η ευθεία  $y=\lambda x+\beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  ;

**Μονάδες 3**

**β.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a,b]$ ;

**Μονάδες 3**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

**α.** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$  .

**β.** Αν  $0 < a < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  .

**γ.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a,b]$  τότε έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα  $f(a)$  και  $f(b)$ .

**δ.** Για τις συναρτήσεις  $f, g$  που έχουν συνεχείς παραγώγους στο  $[a,b]$  ισχύει:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b .$$

**ε.** Αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της συνάρτησης  $f(x)$ , η  $f(x)=y$  έχει λύση ως προς  $x$  τότε η  $f$  είναι 1 - 1.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{1}{z} = -1$  ,  $z \in \mathbf{C}$  και  $z_1, z_2$  οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $z_1 \cdot z_2 = 1$  και  $z_1^3 = 1$  .

**Μονάδες 4**

**β.**  $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbf{R}$ .

**Μονάδες 4**

**γ.**  $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$  .

**Μονάδες 4**

**δ.** αν  $f(x)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[0,1]$  με  $f(0)-2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  και  $f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$  τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$ , ώστε  $f(x_0)=3x_0-2$ .

**Μονάδες 7**

ε. αν  $\Gamma$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $w=2z_1+2z_2$  και  $A, B$  οι εικόνες των  $z_1$  και  $z_2$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται η συνάρτηση  $f(x)=x+2+2\ln x$ .

α. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

γ. Αν  $g(x)=\frac{x \ln x}{x+2}$  να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0>0$  ώστε:  $g(x)\geq g(x_0)$  για κάθε  $x>0$ .

**Μονάδες 7**

δ. Να δείξετε ότι για κάθε  $x>2$  ισχύει:  $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $(0,+\infty)$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:  $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{e^x}$  και  $f(1)=\frac{1}{e}$ .

A. Να δείξετε ότι  $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ .

**Μονάδες 8**

B. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x=1$ .

**Μονάδες 2**

β. Να δείξετε ότι  $\int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$ .

**Μονάδες 7**

Γ. Αν  $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}$ , να βρείτε το εμβαδόν  $E(t)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$ , τον  $x$ ' $x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=t$  με  $t>1$ .

**Μονάδες 5**

Δ. Να βρείτε το  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$ .

**Μονάδες 3**