

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2009 ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.

Μονάδες 5

Β. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta}$.

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

β. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει κάθε κατακόρυφη ευθεία σε ένα το πολύ σημείο.

γ. Αν D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους με $D=D_x=D_y=0$, τότε το σύστημα έχει πάντα άπειρο πλήθος λύσεων.

δ. Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ ισχύει $\alpha\gamma < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ε. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda + 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda - 2)y = -5 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τις τιμές των οριζουσών D, D_x, D_y .

Μονάδες 6

β. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ .

Μονάδες 12

γ. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε το λ ώστε:

$$\left| \frac{5}{x_0} - \frac{5}{y_0} \right| = 1.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (1-\lambda)x + 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbf{R}$ η οποία έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2 .

α. Να δείξετε ότι $|1 - \lambda| > 2$.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ .

Μονάδες 6

γ. Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του λ τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

$$K = x_1 + x_2, \quad \Lambda = x_1 x_2 \quad \text{και} \quad M = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $\lambda x_1 x_2^2 + \lambda x_1^2 x_2 + 3x_1 + 3x_2 = 5$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 5, & -5 \leq x < 2 \\ x + \beta, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ για την οποία ισχύουν $f(-2) = f(4)$ και $f(2) = f(-1)$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = -5$.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\lambda^4 + 2)x + f(1)$ και $\varepsilon_2: y = f(-3) + (13\lambda^2 - 34)x$ να είναι παράλληλες.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

Μονάδες 10