ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ο.Ε.Φ.Ε. 2012 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

Β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o \in A$;

Μονάδες 4

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο **R** και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$.

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α. Μια συνάρτηση είναι 1–1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

β. $i^{4\nu+3}=i$, για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_o.

δ. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o, τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_o είναι η παράγωγος $f'(x_o)$.

ε. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία x_o του Δ, στα οποία ισχύει $f'(x_o) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}$ και $g(x)=\ln x+2$.

α. Να βρείτε τις συνθέσεις fog και gof και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2}=\ln x+2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(e^{-2},2)$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{(gof)(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{(fog)(x)} = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $(1+3\alpha^2)f(x)=e^{\int_x^1 2tf(t)dt}$, όπου $\alpha\in\mathbf{R}^*$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2xf^2(x)$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Μονάδες 4

β. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3\alpha^2}$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Μονάδες 4

Β. Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^\alpha tf(t)dt$ είναι ανεξάρτητη του α.

Μονάδες 4

Γ. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f.

Μονάδες 8

Δ. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία x=α, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4|\alpha|}<E<\dfrac{1}{3|\alpha|}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** με f(0)=2, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-2e^{x+2}}{x+2}=-1$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f'(-2)=1$ και $f(x)\le x+4$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Μονάδες 6

β η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_o\in(-2,0)$.

Μονάδες 6

γ. η εξίσωση $f'\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt\right)=f'(0)$ έχει μοναδική λύση στο **R** την x=5.

Μονάδες 7

δ. ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $f(|z+i|)\le f(|z|+1)$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 6