ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, **να αποδείξετε** ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Τι ονομάζουμε** κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης f .

β) Για κάθε συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$.

γ) Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύουν:

$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό.

ε) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατο ισχύει: $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\sqrt{1-x}$, $x\le 1$.

Β1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x^2-3x+2}$

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $f^{-1}(x)=-x^2+2x$ με $x\ge 1$ να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$, όπου $g(x)=\ln x$.

Μονάδες 4

Β4. Αν $\varphi(x)=(f^{-1}og)(x)=-(\ln x)^2+2\ln x$, $x\ge e$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση φ

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ έχει ένα σημείο καμπής που ανήκει στον άξονα x΄x.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^3+\alpha, & x\le 0 \\ \dfrac{x-\sigma\upsilon\nu x+1}{x}, & x>0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)<\frac{1}{2}x+1$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν $x\to+\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f, με τετμημένη $x_0<0$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 5

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|g(x)-g(y)|\le(x-y)^2 \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Αν $g(0)=21$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ με $x \in (-1,+\infty)$ έχει ακριβώς μια θετική και μια αρνητική λύση.

(όπου g η συνάρτηση του ερωτήματος **Δ2**)

Μονάδες 7

Δ4. Αν $\rho_1 < 0 < \rho_2$ οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοιοι ώστε : $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

Μονάδες 4

β) $0 \le f(x) < 21$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Μονάδες 4

Καλή επιτυχία