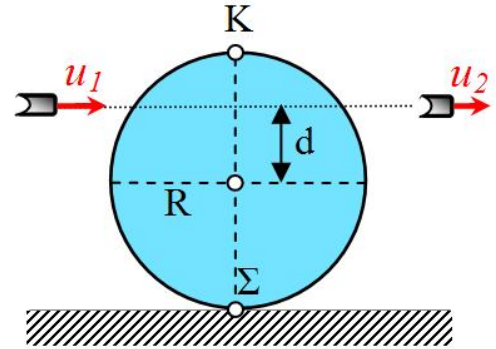


Κρούση και ολίσθηση που μετατρέπεται σε κύλιση

Ένας κύλινδρος μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,3\text{m}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,1$. Ένα βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=1000\text{m/s}$ σε διεύθυνση που απέχει απόσταση d από το κέντρο του κυλίνδρου και βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με αυτό. Το βλήμα διαπερνά τον κύλινδρο και εξέρχεται με ταχύτητα μέτρου u_2 ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική, ενώ αμέσως μετά την κρούση το σημείο επαφής Σ του κυλίνδρου με το δάπεδο αποκτά ταχύτητα μέτρου 9m/s με φορά προς τα δεξιά και το αντιδιαμετρικό του ταχύτητα 18m/s ίδιας κατεύθυνσης με αυτή του σημείου Σ .



Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου αμέσως μετά την κρούση.

β) το μέτρο της γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου αμέσως μετά την κρούση.

γ) το μέτρο της ταχύτητα u_2 τους βλήματος.

δ) την απόσταση d

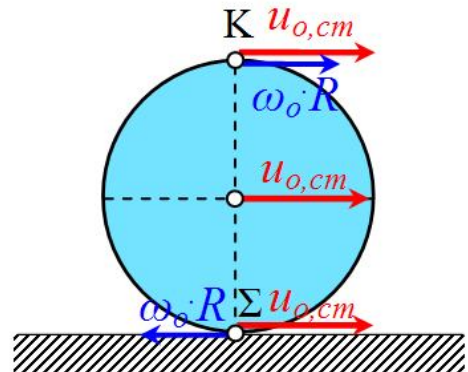
ε) την χρονική στιγμή t_1 μετά την κρούση, όπου θεωρούμε ως $t=0$, όπου ο κύλινδρος ξεκινά να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.

στ) το έργο της τριβής μέχρι την χρονική στιγμή t_1

ζ) την απόσταση d της διεύθυνσης κίνησης του βλήματος από το κέντρο του κυλίνδρου στην οποία έπρεπε να κτυπήσει το βλήμα ώστε ο κύλινδρος αμέσως μετά την κρούση να κυλιέται χωρίς ολίσθηση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση:

α) Αμέσως μετά την κρούση ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη, που μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα μίας μεταφορικής λόγω της οποίας όλα τα σημεία του κυλίνδρου έχουν ταχύτητα $u_{o,cm}$ αμέσως μετά την κρούση, και μίας περιστροφικής γύρω από ελεύθερο(νοητό) άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και έχει σταθερό προσανατολισμό κατά την διάρκεια της κίνησης, με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_o .



Η ταχύτητα του σημείου επαφής Σ του κυλίνδρου με ο δάπεδο είναι:

$$u_{\Sigma} = u_{o,cm} - \omega_o R \quad (1)$$

ενώ, η ταχύτητα του ανώτερου σημείου K της περιφέρειας κυλίνδρου με το δάπεδο είναι:

$$u_K = u_{o,cm} + \omega_o R \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2):

$$\begin{aligned} u_{\Sigma} + u_K &= 2u_{o,cm} \\ u_{o,cm} &= \frac{u_{\Sigma} + u_K}{2} = \frac{27}{2} \rightarrow u_{o,cm} = 13,5\text{m/s} \end{aligned}$$

β) Από την (2) προκύπτει ότι:

$$\omega_o = \frac{u_K - u_{o,cm}}{R} = \frac{18 - 13,5}{0,3} \rightarrow \omega_o = 15\text{ rad/s}$$

γ) Με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής:

$$mu_1 = Mu_{o,cm} + mu_2 \Rightarrow u_2 = \frac{mu_1 - Mu_{o,cm}}{m} \Rightarrow u_2 = 460 \text{ m/s}$$

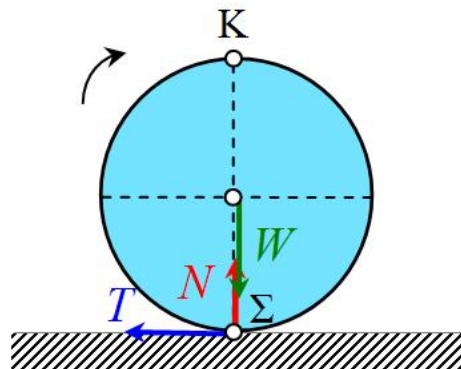
δ) Με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow mu_1 d = I\omega_o + mu_2 d \Rightarrow d = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega_o}{m(u_1 - u_2)} = \frac{MR^2 \cdot \omega_o}{2m(u_1 - u_2)} = \frac{4 \cdot 0,3^2 \cdot 15}{2 \cdot 0,1 \cdot (1000 - 460)} \\ d = 0,05 \text{ m}$$

ε) Αμέσως μετά την κρούση το σημείο Σ έχει ταχύτητα $u_{o,cm} > \omega_o R$, δηλ ταχύτητα με φορά προς τα δεξιά, οπότε στο κατώτερο σημείο εμφανίζεται τριβή ολίσθησης με φορά προς τ' αριστερά. Η τριβή επιβραδύνει την μεταφορική κίνηση, ενώ παράλληλα δημιουργεί επιταχύνουσα ροπή περί τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου. Έτσι, το μέτρο της ταχύτητας u_{cm} αρχίζει να ελαττώνεται και της γωνιακής ταχύτητας να αυξάνεται. Όταν $u_{o,cm} = \omega_o R$, η ολίσθηση θα μετατραπεί σε κύλιση (χωρίς ολίσθηση).

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής

$$\Sigma F = M \cdot a_{cm} \Rightarrow T = M \cdot a_{cm} \Rightarrow \mu \cdot Mg = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \mu \cdot g$$



Από τον Θεμελιώδη Νόμο της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mu Mg = \frac{1}{2}R \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\mu \cdot g}{R}$$

Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, οπότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$u_{cm} = u_{o,cm} - a_{cm}t \Rightarrow u_{cm} = u_{o,cm} - \mu gt$$

Η περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow \omega = \omega_{o,cm} + \frac{2\mu \cdot g}{R}t$$

Η ολίσθηση γίνεται κύλιση, όταν η ταχύτητα του σημείου Σ γίνει ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$u_{\Sigma} = 0 \Rightarrow u_{cm} = \omega R \Rightarrow u_{o,cm} - \mu gt = \left(\omega_{o,cm} + \frac{2\mu \cdot g}{R}t_1 \right) \cdot R \\ u_{o,cm} - \omega_o R = 3\mu \cdot g \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{u_{o,cm} - \omega_o R}{3\mu \cdot g} = \frac{13,5 - 15 \cdot 0,3}{3 \cdot 0,1 \cdot 10} \\ t_1 = 3 \text{ s}$$

στ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας την χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ είναι:

$$u_{cm} = u_{o,cm} - \mu gt \Rightarrow u_{cm} = 10,5 \text{ m/s}$$

Η περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει:

$$\omega = \omega_{o,cm} + \frac{2\mu \cdot g}{R}t \Rightarrow \omega = 35 \text{ rad/s}$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης υπολογίζεται με Θ.Μ.Κ.Ε από $t=0$ έως t_1 :

$$\begin{aligned}
W_T &= K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow W_T = \left(\frac{1}{2} M u_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) - \left(\frac{1}{2} M u_{o,cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_o^2 \right) \\
&\Rightarrow W_T = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_o^2) + \frac{1}{2} M (u_{cm}^2 - u_{o,cm}^2) \\
&\Rightarrow W_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 4 \cdot 0,3^2 (35^2 - 15^2) + \frac{1}{2} 4 \cdot (10,5^2 - 13,5^2) \\
&\Rightarrow W_T = 0,09(1225 - 225) + 2(110,25 - 182,25) \\
&\Rightarrow W_T = 90 - 144 \\
&\quad \quad \quad \mathbf{W_T = -54J}
\end{aligned}$$

$$\zeta) \text{ A.Δ.Ο. } m u_1 = M u_{o,cm} + m u_2 \Rightarrow u_{o,cm} = \frac{m(u_1 - u_2)}{M}$$

$$\text{A.Δ.Σ. } L_{\alphaρχ} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow m u_1 d = I \omega_o + m u_2 d \Rightarrow \omega_o = \frac{m d (u_1 - u_2)}{\frac{1}{2} M R^2} = \frac{2 m d (u_1 - u_2)}{M R^2}$$

Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ο κύλινδρος αμέσως μετά την κρούση πρέπει η ταχύτητα του σημείου επαφής Σ να είναι:

$$\begin{aligned}
u_{\Sigma} &= 0 \Rightarrow u_{o,cm} = \omega_o R \Rightarrow \\
\frac{m(u_1 - u_2)}{M} &= \frac{2 m d (u_1 - u_2)}{M R^2} \cdot R \Rightarrow \\
d &= \frac{R}{2} \Rightarrow \mathbf{d = 0,15m}
\end{aligned}$$

Πέτρος Καραπέτρος
pkarapetros@hotmail.com