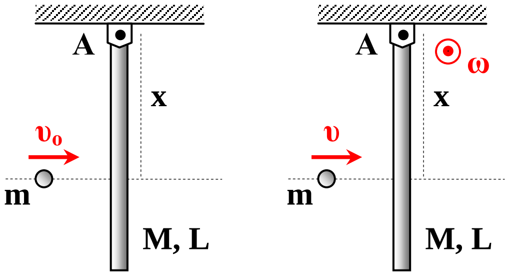
Ελαστική κρούση σώματος με ράβδο που μπορεί να στρέφεται γύρω από το άκρο της. Πότε μεγιστοποιείται η μεταφορά ενέργειας;



Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα **M**, μήκος **L**, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο της **A** και ισορροπεί κατακόρυφα. Το κινούμενο σώμα έχει μάζα **m** και κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_o}$ που ο φορέας της απέχει απόσταση **x** από το **A**.

Η κρούση που ακολουθεί είναι ελαστική, η διάρκειά της είναι αμελητέα και το βάρος **mg** του σώματος δεν προλαβαίνει να επηρεάσει την κίνησή του όσο διαρκεί η κρούση. Ζητούνται:

1. Να προσδιορίσετε την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ του σώματος και την γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση, σε σχέση με τις μάζες **m**, **M** (δηλαδή σε σχέση με το λόγο $\boldsymbol{\lambda = m/M}$ των δύο μαζών) και σε σχέση με την απόσταση **x** του σημείου πρόσκρουσης από το άκρο **A** της ράβδου ($\mathbf{0 < x \leq L}$).

2. ***(i)*** Να προσδιορίσετε την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ για τις ακραίες περιπτώσεις **m>>M** και **m<<M**. ***(ii)*** Πότε μεγιστοποιείται η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται από το σώμα στη ράβδο κατά την κρούση; ***(iii)*** Να κάνετε γενικότερα διερεύνηση της τιμής της $\boldsymbol{\upsilon}$ σε σχέση με το λόγο $\boldsymbol{\lambda = m/M}$ των δύο μαζών αλλά και σε σχέση με την απόσταση **x** του σημείου πρόσκρουσης από το άκρο **A** της ράβδου ($\mathbf{0<x\leq L}$).

3. Να προσδιορίσετε πάλι την ταχύτητα του σώματος και την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση, στην περίπτωση που ο φορέας της αρχικής ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_o}$ δεν είναι κάθετος στη ράβδο. Η τριβή κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων είναι αμελητέα.

(Ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα A: $\mathbf{I = {}^1/_3 \cdot M \cdot L^2}$)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ:</u>

(Τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μέτρα μεγεθών).

1. Εφόσον θεωρούμε ασήμαντο το βάρος του σώματος, τότε για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(A)}=0}$ άρα θα έχουμε διατήρηση της στροφορμής ως προς **Α**:

$\mathbf{m\cdot\upsilon_0\cdot x = m\cdot\upsilon\cdot x + I\cdot\omega} \Longrightarrow \mathbf{m\cdot(\upsilon_0 - \upsilon)\cdot x = I\cdot\omega}$ ή αλλιώς:

$$\mathbf{\upsilon_0 - \upsilon = I\cdot\omega/(m\cdot x)} \qquad \textit{(I)}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας τώρα έχουμε:

$$\mathbf{{}^1\!/_2\cdot m\cdot\upsilon_0^2 = {}^1\!/_2\cdot m\cdot\upsilon^2 + {}^1\!/_2\cdot I\cdot\omega^2} \Longrightarrow \mathbf{m\cdot\upsilon_0^2 = m\cdot\upsilon^2 + I\cdot\omega^2} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{m\cdot(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) = I\cdot\omega^2} \Longrightarrow \mathbf{m\cdot(\upsilon_0 - \upsilon)\cdot(\upsilon_0 + \upsilon) = I\cdot\omega^2} \qquad \textit{(II)}$$

και διαιρώντας ***(II)*** με ***(I)*** παίρνουμε:

$$\mathbf{\upsilon_0 + \upsilon = \omega\cdot x} \qquad \textit{(III)}$$

Από τις σχέσεις ***(I)*** και ***(III)*** με πράξεις προκύπτουν η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ και η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$:

$\mathbf{\dfrac{\upsilon_0+\upsilon}{\upsilon_0-\upsilon} = \dfrac{3\cdot m\cdot x^2}{M\cdot L^2}}$ ή αν θέσουμε $\boxed{\mathbf{\lambda = \dfrac{m}{M}}}$ και $\boxed{\mathbf{\kappa = \dfrac{x}{L}}}$:

$\mathbf{\dfrac{\upsilon_0+\upsilon}{\upsilon_0-\upsilon} = 3\cdot\lambda\cdot\kappa^2}$ από όπου προκύπτει:

$$\boxed{\mathbf{\upsilon = \frac{3\lambda\kappa^2-1}{3\lambda\kappa^2+1}\cdot\upsilon_0}} \qquad \textit{(IV)}$$

και με αντικατάσταση στην ***(III)***:

$$\boxed{\mathbf{\omega = \frac{6mx}{3mx^2+ML^2}\cdot\upsilon_0}} \qquad \textit{(V)}$$

---

2. Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι:

$$\boxed{\mathbf{\upsilon = \frac{3\lambda\kappa^2-1}{3\lambda\kappa^2+1}\cdot\upsilon_0}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{\omega = \frac{6mx}{3mx^2+ML^2}\cdot\upsilon_0}}$$

$$\text{με} \quad \boxed{\mathbf{\lambda = \frac{m}{M}}},\ \mathbf{0 \le \lambda < \infty} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{\kappa = \frac{x}{L}}},\ \mathbf{0 < \kappa \le 1}$$

(i) Αν το σώμα έχει πολύ μικρότερη μάζα από τη ράβδο, δηλαδή **m << M** τότε ισχύει $\mathbf{\lambda\to 0}$ και $\boxed{\mathbf{\upsilon = -\upsilon_0}}$, δηλαδή ***το σώμα αναπηδά προς τα πίσω με ίδια κατά μέτρο ταχύτητα***.

Στην περίπτωση αυτή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου παραμένει μηδέν: $\boxed{\boldsymbol{\omega = 0}}$.

(ii) Αν το σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη ράβδο, δηλαδή $\mathbf{m >> M}$ τότε ισχύει $\mathbf{1/\lambda \to 0}$ και $\boxed{\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0}}$, δηλαδή ***το σώμα συνεχίζει να κινείται με την ίδια ταχύτητα***.

Στην περίπτωση αυτή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου έχει μέτρο: $\boxed{\boldsymbol{\omega = \frac{3 \cdot \upsilon_0}{x}}}$, δηλαδή η τιμή της εξαρτάται από το σημείο πρόσκρουσης. Όσο πιο κοντά στον άξονα γίνει η πρόσκρουση τόσο μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα αποκτά η ράβδος.

Οι δύο αυτές περιπτώσεις θυμίζουν τις ακραίες περιπτώσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης κινούμενου με ακίνητο σώμα που συναντάμε στο κεφάλαιο των κρούσεων.

(ii) Παρατηρούμε ότι ***όταν ικανοποιείται η συνθήκη*** $\boxed{\mathbf{3 \cdot \lambda \cdot \kappa^2 - 1 = 0}}$ ***τότε η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση <u>μηδενίζεται</u>***:

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε τους λόγους **λ**, **κ** και λύσουμε ως προς την απόσταση **x**, προκύπτει η σχέση:

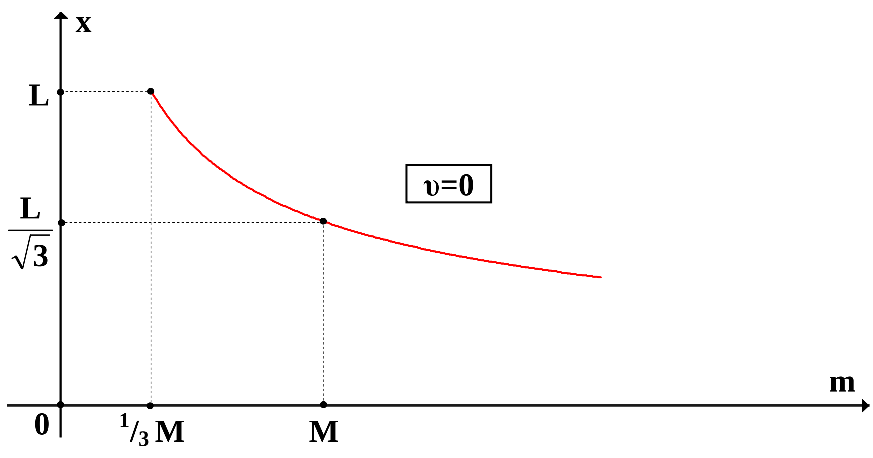
$$\boxed{\mathbf{x = L\sqrt{\frac{M}{3m}}}}$$

Αν δηλαδή θέλουμε να μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση, τότε όσο μεγαλύτερη μάζα έχει η ράβδος τόσο πλησιέστερα στο ελεύθερο άκρο της πρέπει να πέσει το σώμα. Η απόσταση **x** όμως δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή **L** και έτσι βρίσκουμε:

$$\mathbf{x \leq L} \implies \mathbf{L\sqrt{\frac{M}{3m}} \leq L} \implies \boxed{\mathbf{M \leq 3 \cdot m}}$$

Προφανώς η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται στη ράβδο στην περίπτωση αυτή είναι μέγιστη (μεταφορά 100%):

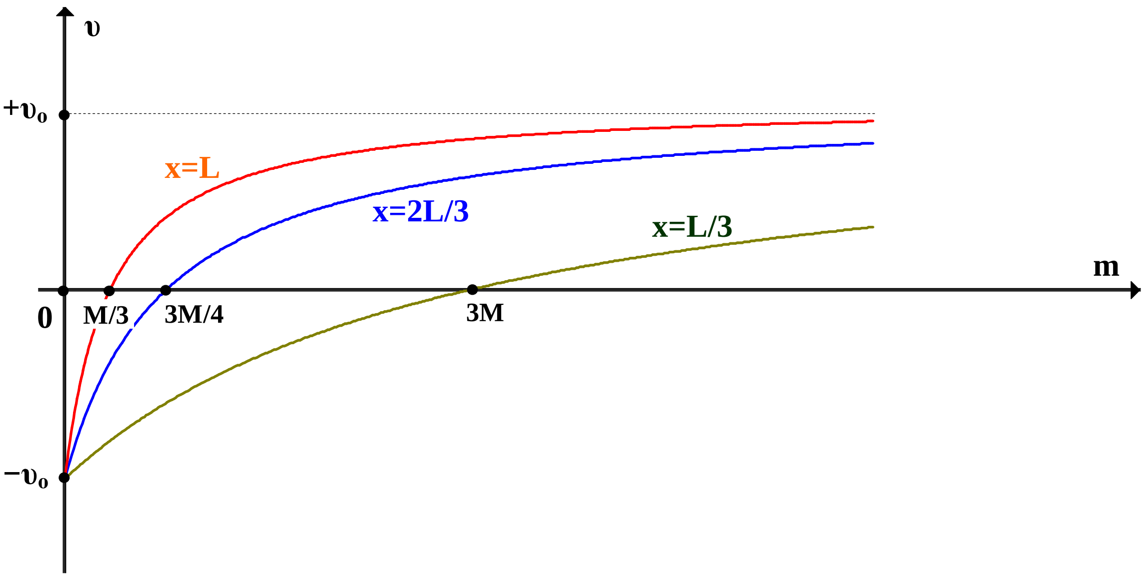
Αν $\boxed{\mathbf{m \geq M/3}}$, τότε $\boxed{\boldsymbol{\upsilon = 0}}$ όταν $\boxed{\mathbf{x = L\sqrt{\frac{M}{3m}}}}$



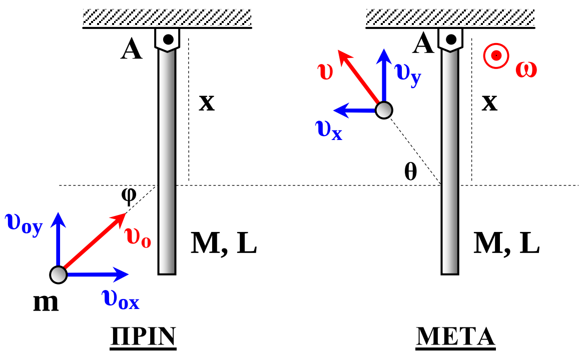
(iii) Διερεύνηση της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ σε σχέση με το λόγο $\boldsymbol{\lambda = m/M}$ των δύο μαζών και το λόγο $\boldsymbol{\kappa = x/L}$:

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται γενικότερα η εξάρτηση της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ του κινούμενου σώματος από τη σχέση των δύο μαζών.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{\mathbf{3\lambda\kappa^2 - 1}}{\mathbf{3\lambda\kappa^2 + 1}} \cdot \boldsymbol{\upsilon_0}$ έγινε ενδεικτικά για τρεις τιμές της απόστασης **x**.



3. Στην περίπτωση αυτή έχουμε πλάγια κρούση και αναλύουμε τις ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon_0}$ και $\boldsymbol{\upsilon}$ σε άξονες:



Οι κρουστικές δυνάμεις μεταξύ σώματος και ράβδου είναι κάθετες στη ράβδο αφού δεν υπάρχει τριβή, επομένως η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος παραμένει αμετάβλητη.

Εφόσον μεταφέρεται ενέργεια από το σώμα στη ράβδο, αυτό θα έχει σαν συνέπεια να μειωθεί το μέτρο της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_0}$ του σώματος, άρα και της συνιστώσας $\boldsymbol{\upsilon_{ox}}$ που είναι κάθετη στη ράβδο, αφού ή άλλη συνιστώσα δεν μεταβλήθηκε.

Έτσι η γωνία ανάκλασης **θ** του σώματος θα είναι γενικά μεγαλύτερη από τη γωνία πρόσπτωσης **φ**.

Ισχύει:

$\boldsymbol{\upsilon_y = \upsilon_{oy} = \upsilon_o \cdot \eta\mu\varphi}$

$\boldsymbol{\upsilon_{ox} = \upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$

και οι άγνωστοι είναι η **ω** και η $\boldsymbol{\upsilon_x}$ μετά την κρούση (και βέβαια η γωνία **θ**).

Από τη διατήρηση της στροφορμής ως προς **Α** έχουμε:

$$\mathbf{m \cdot \upsilon_{ox} \cdot x = m \cdot \upsilon_x \cdot x + I \cdot \omega} \implies \mathbf{m \cdot (\upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \upsilon_x) \cdot x = I \cdot \omega} \quad \textit{(VI)}$$

και από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_o^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 + \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \implies$$
$$m \cdot \upsilon_o^2 = m \cdot (\upsilon_o^2 \cdot \eta\mu^2\varphi + \upsilon_x^2) + I \cdot \omega^2 \implies$$
$$m \cdot \upsilon_o^2 \cdot (1 - \eta\mu^2\varphi) = m \cdot \upsilon_x^2 + I \cdot \omega^2 \implies$$
$$m \cdot \upsilon_o^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi = m \cdot \upsilon_x^2 + I \cdot \omega^2 \implies$$
$$m \cdot (\upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \upsilon_x) \cdot (\upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \upsilon_x) = I \cdot \omega^2 \qquad \textit{(VII)}$$

Διαιρώντας την ***(VII)*** με την ***(VI)*** παίρνουμε:

$$\upsilon_o \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \upsilon_x = \omega \cdot x \qquad \textit{(VIII)}$$

και από τις ***(VI)*** και ***(VIII)*** βρίσκουμε τις $\boldsymbol{\upsilon_x}$ και **ω**.