ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Ε.Μ.Ε.
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

1995-1996

1. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $A=(\nu^2+3\nu+1)^2-1$**.**

2. Να προσδιορίσετε τους επταψήφιους αριθμούς, οι οποίοι είναι τέλεια τετράγωνα και τα τρία πρώτα ψηφία τους, στη σειρά, είναι τα 4, 0 και 0**.**

3. Έστω $E(\nu)=(-1)^\nu\cdot\nu$, όπου ο ν παίρνει τιμές 1 2, 3, ..., 1995.
Να υπολογίσετε το άθροισμα: $A=E(1)+E(2)+E(3)+\ldots+E(1995)$**.**

4. Σε μια σκακιέρα 5x5 θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε:
- δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον
- σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκι με πιόνι.

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις**.**

1996-1997

1. Έστω $\alpha\neq\pm\beta$ και ισχύει $\frac{5\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{3\beta}{\alpha+\beta}=5$ (1).
Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=\frac{10\alpha-4\beta}{\alpha+6\beta}$**.**

2. Να δειχτεί ότι η ακολουθία των αριθμών: 6, 10, 14, 18, ..., (4κ+2), ... δεν περιέχει κανένα τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού**.**

3. Σ' έναν κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένα δύο κανονικά πολύγωνα.
Το εμβαδόν του ενός είναι διπλάσιο του εμβαδού του άλλου.
Να βρεθεί η περίμετρος του μεγαλυτέρου**.**

4. Από τους 18 αριθμούς, 1, 2, 3, ..., 18, επιλέγουμε στη τύχη τέσσερις διαφορετικούς.
Να δειχτεί ότι από αυτούς τους τέσσερις υπάρχουν δύο, έστω οι α και β, με $0<\alpha-\beta\leq 5$**.**

1997-1998

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να παραστήσουμε τον πρώτο 1997 ως διαφορά δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών;

2. Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός κ, ώστε ο αριθμός

$$A=\frac{\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}}{\kappa-2}$$ να είναι ακέραιος.

3. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, αν

$$AB=3\sqrt{3}\cdot 2^{\nu-1},\ B\Gamma=2^{\nu+2}-2^{\nu+1}+2^{\nu},\ A\Gamma=2^{\nu+1}-2^{\nu}+2^{\nu-1},\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Να προσδιοριστεί το ν, αν η περίμετρος του ΑΒΓ είναι $3(3+\sqrt{3})$.

4. Έχουμε άπειρα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και στις κορυφές καθενός τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3. Μπορούμε να τοποθετήσουμε μερικά τρίγωνα, το ένα πάνω στο άλλο, ώστε σε κάθε κορυφή το άθροισμα των αριθμών να είναι 97;

1998-1999

1. Έστω $\alpha=(8^7-9\cdot8^6+9\cdot8^5-9\cdot8^4+9\cdot8^3-9\cdot8^2+9\cdot8-1)^{1000}$ και $\beta=1024^{200}\cdot625^{1000}$. Να συγκριθούν οι αριθμοί α^2 και β.

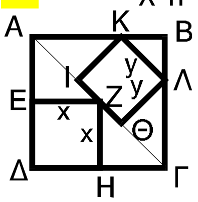
2. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A=1^1+2^2+3^3+4^4+\ldots+9^9+10^{10}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Ι το μέσον της ΑΔ. Η ΒΙ τέμνει την ΑΓ στο Ε και η ΓΙ την ΑΒ στο Ζ.
Από το Δ φέρνουμε ΔΗ//ΑΓ (Η σημείο της ΒΙ) και ΔΘ//ΑΒ (Θ σημείο της ΓΙ).
Να δειχτεί ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Να χωρίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά 4 σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα οποία να έχουν άθροισμα περιμέτρων 25.

1999-2000

1. Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΔΕΖΗ και ΘΙΚΛ είναι τετράγωνα.



Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών $\frac{(\Delta E Z H)}{(\Theta I K \Lambda)}$.

2. Δίνεται η παράσταση $P(x)=(\alpha+\beta)^2x^2-4(\alpha+\beta)x+\gamma^2+4$, όπου οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι με $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\gamma\geq0$.
Η παράσταση αυτή παίρνει την τιμή 0 για $x=1$.
Να βρεθούν οι αριθμοί α, β και γ.

3. **α)** Να αποδείξετε ότι, αν το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός είναι άρτιος.
β) Ο ακέραιος αριθμός α δεν διαιρείται με το 5 και ο αριθμός $A=\alpha^2+2\alpha+3$ είναι άρτιος.
Να βρεθεί το ψηφίο των μονάδων του α.

4. **α)** Αν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ με $xy\neq0$, να δειχτεί ότι $y\neq3$ και $x=3+\frac{9}{y-3}$.
β) Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

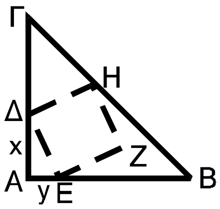
2000-2001

1. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right)$.
β) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{1999\cdot2000\cdot2001}$.

2. Για τους αριθμούς α, β, x, y ισχύει $xy-\alpha\beta=1$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+x^2+y^2+\alpha x+\beta y>1$.

3. **α)** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση x^4+4y^4.
β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y\geq2$,
να αποδείξετε ότι ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος.

4. Στο σχήμα έχουμε: (α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
(β) ΑΔ=x, ΑΕ=y, ΑΓ=2x+y



(γ) Το ΔΕΖΗ είναι τετράγωνο με $(\Delta EZH)=\frac{2}{5}(AB\Gamma)$.

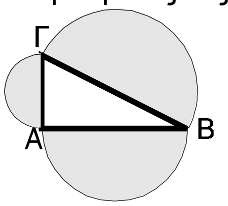
Να υπολογίσετε: **1)** το λόγο $\frac{x}{y}$, **2)** το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

2001-2002

1. Να υπολογιστεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=2002\cdot\left[(-1)^{2001}+(-1)^{2002}\right]^2-[(-2)^{-3}]^2+\frac{1}{64}.$$

2. Στο σχήμα, δίνεται ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ και ΑΓ, ισούται με το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ.



Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $Π=(2+α+α^2)^2-α^3$.

4. **α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι:

$$\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2<\frac{\nu}{\nu+1}.$$

β. Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2<\frac{1}{1001}$.

2002-2003

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών α, β με α>β ο αριθμός $κ=\frac{(2\alpha+1)^2-(2\beta+1)^2}{4}$ είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο κ είναι πρώτος, δηλαδή κ>1 και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και κ.

2. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) με ΑΒ=ΑΓ=α. Φέρουμε ευθεία xAy έτσι ώστε $x\hat{A}Γ=30^o$. Από τα Γ και Β φέρουμε κάθετες προς την xAy που την τέμνουν στα Δ και Ε, αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΓΔΕ συναρτήσει του α.

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w ισχύει:

$$x^2+10y^2+10z^2+9w^2=6(xy+yz+zw).$$

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους x και w.

4. Είναι δυνατόν το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων να ισούται με τον κύβο ενός θετικού ακεραίου;

2003-2004

1. Αν $\alpha \in P$, $\alpha \neq \pm 1$ και οι πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+y}{1+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2+\alpha^4}{x^2-xy+y^2}, \qquad \frac{x-y}{1-\alpha^2} = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{x^2+xy+y^2}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή του x.

2. Να εξεταστεί, αν υπάρχουν ακέραιοι α, β που να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(E): \alpha^2+\beta^2=2003.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΒΓ=8 και διάμεσο ΑΜ.
Η μεσοκάθετη της διαμέσου ΑΜ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε.
Οι ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των πλευρών ΕΜ, ΜΓ και ΕΓ του τριγώνου ΕΜΓ αντίστοιχα.
Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς ΑΓ.

4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\alpha>0$, $\beta>1$ και

$$\alpha\beta+1=\beta^2+\beta+\alpha.$$

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του α.

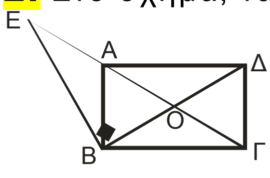
2004-2005

1. Αν $\alpha=1$, $\beta=-1$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$A=\alpha^3+\beta^3+10\alpha-7\beta\sqrt{6} \quad \text{και} \quad B=100(2\alpha+\beta)-(8\alpha^3-2)\beta\sqrt{7}$$

και να βρείτε ποιος από τους αριθμούς Α και Β είναι μεγαλύτερος.

2. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ισόπλευρα πλευράς α.



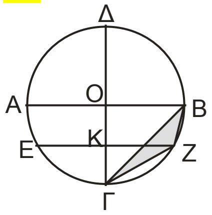
Η ΒΕ είναι κάθετη προς τη ΒΔ. Να υπολογίσετε:

1) Τη γωνία $A\hat{E}B$.

2) Τα τμήματα ΕΑ, ΕΒ και ΕΔ συναρτήσει του α.

3. Οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι και γνωρίζουμε ότι:
αν το εξαπλάσιο του αριθμού β πολλαπλασιαστεί επί τον αριθμό α+1, προκύπτει αριθμός μικρότερος του 0 και μεγαλύτερος του –10.
Να βρεθούν οι ακέραιοι α και β.

4. Στο σχήμα έχουμε κύκλο (Ο,R) και κάθετες διαμέτρους ΑΒ⊥ΓΔ.



Η χορδή ΕΖ είναι μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΓ.

Να υπολογίσετε:

1) Τις χορδές ΓΖ και ΖΒ συναρτήσει της ακτίνας R**.**

2) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΖ συναρτήσει της ακτίνας R**.**

2005-2006

1. Να λυθεί η εξίσωση (Ε): $x+2x+3x+\ldots+100x=2^2\cdot 5^3\cdot 101$**.**

2. Δίνονται τα κλάσματα: $K=\dfrac{33.333.333.331}{33.333.333.334}$ και $\Lambda=\dfrac{22.222.222.221}{22.222.222.223}$.

Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί**;**

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου ΑΔ=α, ΒΓ=β, ΑΒ=α+β και η πλευρά ΑΒ είναι κάθετος προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ.

Να υπολογιστεί η απόσταση της κορυφής Α από το μέσον της πλευράς ΓΔ συναρτήσει των α και β**.**

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\varepsilon)(\varepsilon+\alpha)=(\alpha+\gamma)(\gamma+\varepsilon)(\varepsilon+\beta)(\beta+\delta)(\delta+\alpha);$$

2006-2007

1. Δίνεται ο αριθμός $A=2^{92}\cdot 5^{90}\cdot 3^4\cdot 7^2$.

Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει το Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του**.**

2. Να προσδιοριστούν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{4}=\frac{6}{\gamma}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6.
Είναι ΜΚ⊥ΑΒ, ΜΛ⊥ΑΓ και $K_1\Lambda_1$ η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $KK_1\Lambda_1\Lambda$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια.
Κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο.
Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

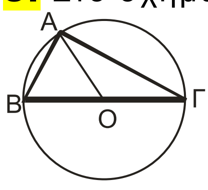
2007-2008

1. Αν ισχύει 12β+26α=1, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{5}{12}-(24\beta+52\alpha)^{-2}-(72\beta+156\alpha)^{-1}.$$

2. Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της γυμναστικής και θα πληρώνουν 3.000€ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο.
Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 ημέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 ημέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 ημέρες ακόμα.
Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

3. Στο σχήμα το Ο είναι το κέντρο του κύκλου και επιπλέον ΑΒ=2$\sqrt{7}$ και ΑΓ=6.



1) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.
2) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά ΒΓ.
3) Ε είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_1 είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφανείας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ.
Να αποδειχτεί ότι $\frac{E_1}{E}>\frac{2}{3}$.

4. Έστω τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός Α=αβγ, όπου α, β, γ ψηφία (α>0). Αν εναλλάξουμε το πρώτο και το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396.

Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α.
Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α**.**