

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

2011-2012

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. **(10 μονάδες)**

A2. Πότε η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα x_0 ; **(5 μονάδες)**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές(Σ) ή λανθασμένες(Λ).

α) Ισχύει πάντα $|z|^2 = z^2$ όπου z μιγαδικός αριθμός.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

γ) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι απαραίτητα τοπικό ακροτατο της f .

δ) Το εμβαδόν που ορίζεται από την συνεχή συνάρτηση f

και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$ είναι $E(\Omega) = \int_a^b f(x) dx$

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση f έχει παράγουσα στο πεδίο ορισμού της.

(10 μονάδες=5*2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - 3 + 4i| \leq \sqrt{2}$.

B1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος $M(z)$. **(5 μονάδες)**

B2. Να βρεθεί ο μιγαδικός z με το μέγιστο μέτρο.

(6 μονάδες)

Δίνετε επίσης το σύνολο w για το οποίο ισχύει

$$|w - 4 + 3i| \leq \sqrt{2}$$

B3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι ώστε $z=w$. **(8 μονάδες)**

B4. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z-w|$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - e^x + x + 4$.

Γ1. Να δείχθεί ότι η f έχει μοναδικό ακρότατο.

(8 μονάδες)

Γ2. Να δειχθεί ότι η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

(3 μονάδες)

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f . **(4 μονάδες)**

Γ4. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, και να δειχθεί ότι $e^{e^x+x-ex-1} \geq x$ με $x > 0$.

(5 μονάδες)

Γ5. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$ και μετά το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(1)=0$ και $g'(x) = e^{-g(x)}$ με $x > 0$.

Επίσης δίνεται η συνάρτηση $h:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$$h(x)e^{xh(x)} = e^{\int_0^x th'(t)dt}, \quad x > 0$$

Δ1. Να βρεθεί ο τύπος της g . **(4 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι $h'(x) = -h^2(x)$ και να βρεθεί ο τύπος της h . **(4 μονάδες)**

Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση $f(x) = \int_1^x g(t)h(t)dt$ με $x > 0$.

Δ3. Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 0$ με $x > 0$. **(5 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε x θετικό ισχύει

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{g^2(x)}{2} . \textbf{(6 μονάδες)}$$

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής

$M(x_0, f(x_0))$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) + f\left(\frac{1}{x_0}\right) > f'(x_0) \ln x_0$

(6 μονάδες)