Αγαπητοί μαθητές,

αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα για τα Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου, που είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα, καθώς περιέχει χρήσιμες γνώσεις για την ύλη της Γ΄ Λυκείου.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει :

- Βασική θεωρία
- Μεθοδολογίες και σχόλια
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Θέματα από την τράπεζα της Β΄ Λυκείου του υπουργείου

Καλή μελέτη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Έννοια του διανύσματος – Ορισμοί (σελ. 11-14 σχολικό)

Απάντηση :

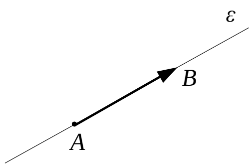
- **Διάνυσμα** $\vec{AB}$ **:** λέμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το Α και πέρας το Β.

- **Μηδενικό Διάνυσμα :** λέμε το διάνυσμα στο οποίο η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. $\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$. π.χ. $\vec{AA} = \vec{0}$.

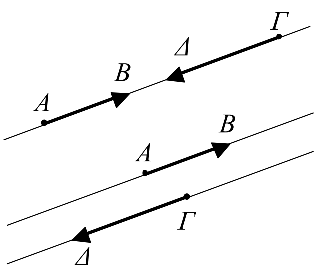
- **Μέτρο Διανύσματος** $\overrightarrow{AB}$ **:** λέμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Συμβολίζουμε με $|\vec{AB}|$. Ισχύει $|\vec{AB}| = |\vec{BA}| \geq 0$.

- **Μοναδιαίο Διάνυσμα :** λέμε το διάνυσμα με μέτρο ίσο με ένα.

- **Φορέας Διανύσματος :** λέγεται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα.



- **Παράλληλα – Συγραμμικά Διανύσματα :** λέγονται τα διανύσματα τα οποία είτε έχουν τον ίδιο φορέα, είτε έχουν παράλληλους φορείς.



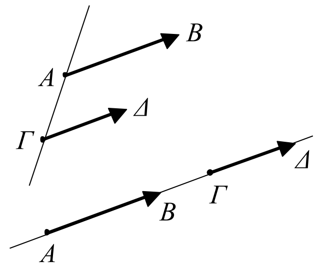
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

✓ **Ομόρροπα Διανύσματα :** Δυο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα όταν :

i. Έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

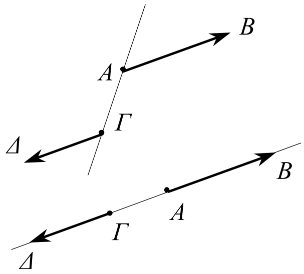
ii. Έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

Συμβολίζονται $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$.



✓ **Αντίρροπα Διανύσματα :** Δυο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρροπα όταν είναι συγγραμμικά αλλά δεν είναι ομόρροπα.

Συμβολίζονται $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$ και επίσης ισχύει ότι : $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.



✓ Δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι έχουν :

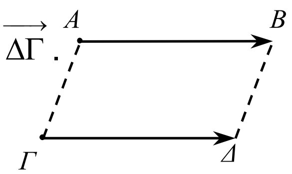
i. **Ίδια διεύθυνση,** όταν είναι παράλληλα και γράφουμε $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$

ii. **Ίδια κατεύθυνση,** όταν είναι ομόρροπα και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$

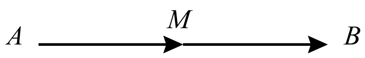
iii. **Αντίθετη κατεύθυνση,** όταν είναι αντίρροπα και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$

✓ **Ισότητα Διανυσμάτων :** Δυο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ισα, όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ισα μέτρα. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



Αν *Μ* είναι το μέσον του *ΑΒ*, τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.

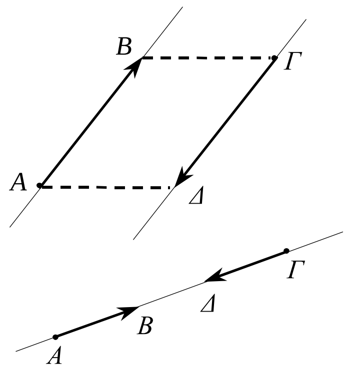


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{ο}}$: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

✓ **Αντίθετα Διανύσματα :** $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$.



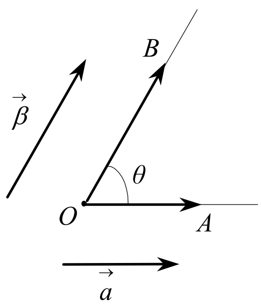
Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Ειδικότερα, έχουμε $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

✓

✓ **Γωνία Διανυσμάτων :** Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν φέρουμε με κοινή αρχή το σημείο Ο τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$**,** τότε ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που ορίζουν οι ημιευθειες ΟΑ και ΟΒ.

Συμβολίζουμε με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ και ισχύει $\theta = \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)$ με $0 \leq \theta \leq 180°$.



Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \neq 0$ τότε ισχύουν οι σχέσεις :

i. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0$

ii. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 180°$

iii. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0$ ή $\theta = 180°$

iv. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 90°$

2. Α)Τι καλούμε πρόσθεση δυο διανυσμάτων και ποιες είναι οι ιδιότητες της Πρόσθεσης Διανυσμάτων ; (σελ. 16-17 σχολικό)

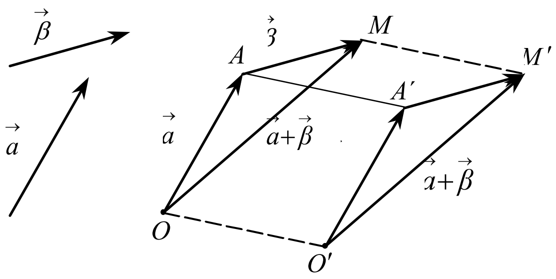
Β) Τι καλούμε αφαίρεση δυο διανυσμάτων ; (σελ. 18 σχολικό)

Απάντηση :

Α) ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

➢ **(ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)**

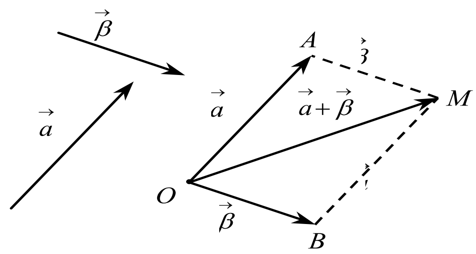
Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο *Ο* παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το *Α* παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.



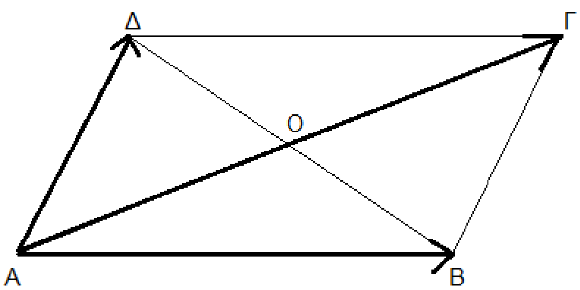
Διαδοχικά Διανύσματα : $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$ (το πέρας του ενός είναι η αρχή του άλλου)

➢ **(ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ)**

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου*. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο *Ο* πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



Κανόνας Παραλληλογράμμου : $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}$, όπου ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- **(ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ)**

(1) $\vec{a}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

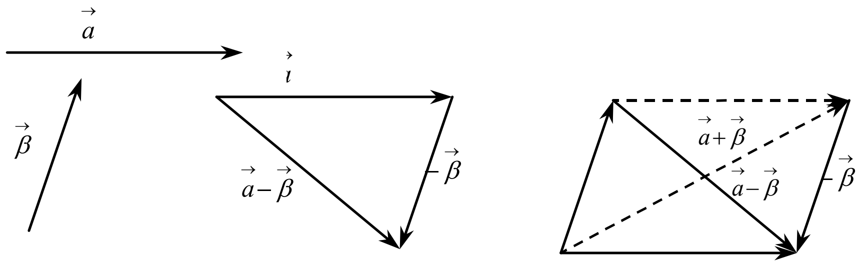
(2) $(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

(3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$.

Β) ΑΦΑΙΡΕΣΗ

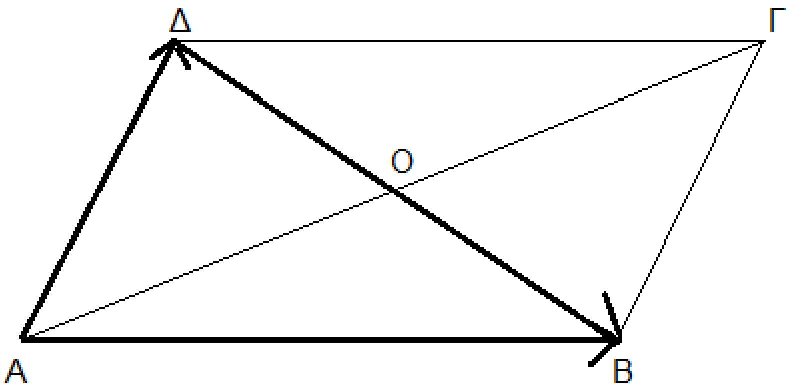
- Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$



Δηλαδή $\vec{AB}-\vec{\Gamma B}=\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$ **(τα διανύσματα έχουν κοινό τέλος)**

- Αν **δυο διανύσματα έχουν κοινή αρχή** τότε η διαφορά τους είναι $\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{AB}$.

Εφαρμογή σε παραλληλόγραμμο : $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=\vec{\Delta B}$



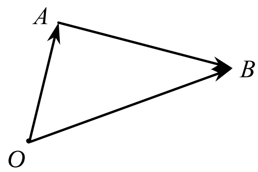
Παρατηρώ δηλαδή ότι η πρόσθεση $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}$ μας δίνει τη μια διαγώνιο του παραλληλογράμμου, ενώ η αφαίρεση $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=\vec{\Delta B}$ μας δίνει την άλλη.

3. Α. Τι καλούμε Διάνυσμα Θέσεως ή Διανυσματική Ακτίνα ενός σημείου Μ ;
Β. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ισο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής. (σελ. 19 σχολικό)

Απάντηση :

Α. Έστω *Ο* ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο *Μ* του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του *Μ*** ή **διανυσματική ακτίνα του *Μ***. Το σημείο *Ο*, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτινών των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

Β. Αν *Ο* είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ και επομένως



$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$$

4.Να αναφέρεται την τριγωνική ανισότητα για διανύσματα. (σελ. 19 σχολικό)

Απάντηση : $$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

Επιπρόσθετα να δείξετε ότι : $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|$

Απάντηση :

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

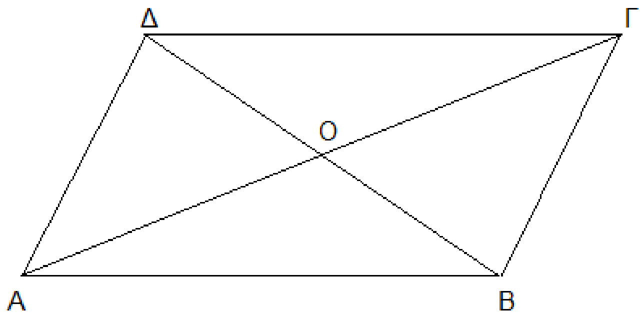
1) (Άσκηση 7 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)
Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι $\vec{P_1P_3}+\vec{P_2P_4}+\vec{P_3P_5}+\vec{P_4P_6}+\vec{P_5P_1}+\vec{P_6P_2}=\vec{0}$.
Λύση :
Στην προκειμένη περίπτωση έχω να κάνω πρόσθεση διανυσμάτων. Πρόσθεση διανυσμάτων γίνεται είτε με διαδοχικά διανύσματα, είτε με κανόνα παραλληλογράμμου. Εδώ δεν έχω παραλληλόγραμμο άρα θα χρησιμοποιήσω πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων, θα φέρω δηλαδή τα διανύσματα κατά τέτοιο τρόπο ώστε το τέλος του ενός να είναι η αρχή του επόμενου. Έχω :
$$\vec{P_1P_3}+\vec{P_3P_5}+\vec{P_2P_4}+\vec{P_4P_6}+\vec{P_5P_1}+\vec{P_6P_2}=\vec{P_1P_5}+\vec{P_2P_6}+\vec{P_5P_1}+\vec{P_6P_2}=\vec{P_1P_5}+\vec{P_5P_1}+\vec{P_2P_6}+\vec{P_6P_2}=$$
$$\vec{P_1P_1}+\vec{P_2P_2}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$$

2) Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με διανύσματα :
   i. $\vec{ΚΛ}+\vec{ΛΜ}=$
   ii. $\vec{ΚΛ}-\vec{ΜΛ}=$
   iii. $\vec{ΚΛ}-\vec{ΚΜ}=$
   iv. $\vec{ΚΛ}+\vec{ΜΚ}=$
   v. $\vec{ΚΜ}+\vec{ΜΝ}+\vec{ΛΚ}-\vec{ΛΝ}=$

   Λύση :
   i. $\vec{ΚΛ}+\vec{ΛΜ}=\vec{ΚΜ}$ (ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ)
   ii. $\vec{ΚΛ}-\vec{ΜΛ}=\vec{ΚΛ}+\vec{ΛΜ}=\vec{ΚΜ}$ (ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥ ΕΧΟΥΝ ΔΗΛ. ΚΟΙΝΟ ΤΕΛΟΣ)
   iii. $\vec{ΚΛ}-\vec{ΚΜ}=\vec{ΜΛ}$ (ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΗ ΑΡΧΗ)
   iv. $\vec{ΚΛ}+\vec{ΜΚ}=\vec{ΚΛ}-\vec{ΚΜ}=\vec{ΜΛ}$ (ΔΕΝ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΚΑΝΩ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΤΕΥΘΕΙΑΝ, ΚΑΘΩΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΥΤΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ, ΟΥΤΕ ΕΧΩ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ, ΓΙ'ΑΥΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΩ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΑΙ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΑΡΧΗ)
   v. $\vec{ΚΜ}+\vec{ΜΝ}+\vec{ΛΚ}-\vec{ΛΝ}=\vec{ΚΝ}+\vec{ΝΚ}=\vec{ΚΚ}=\vec{0}$

3) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες.
   i. $\vec{ΑΒ}+\vec{ΑΔ}=$
   ii. $\vec{ΑΒ}-\vec{ΑΔ}=$
   iii. $\vec{ΑΒ}+\vec{ΓΔ}=$
   iv. $\vec{ΔΟ}+....=\vec{ΔΓ}$
   v. $\vec{ΟΑ}+\vec{ΟΓ}=$
   vi. $\vec{ΑΒ}-....=\vec{ΔΒ}$

Λύση :



i. $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=\vec{A\Gamma}$
ii. $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=\vec{\Delta B}$
iii. $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0}$ (ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΘΕΤΑ)
iv. $\vec{\Delta O}+\vec{O\Gamma}=\vec{\Delta\Gamma}$
v. $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ (ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΘΕΤΑ)
vi. $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=\vec{\Delta B}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Να βρείτε τις γωνίες :

i. $\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)$
ii. $\left(\vec{AB},\vec{B\Gamma}\right)$
iii. $\left(\vec{B\Delta},\vec{\Delta\Gamma}\right)$
iv. $\left(\vec{B\Gamma},\vec{\Gamma\Delta}\right)$

5) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=70^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες :

i. $\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)$
ii. $\left(\vec{AB},\vec{B\Gamma}\right)$
iii. $\left(\vec{A\Gamma},\vec{B\Gamma}\right)$

6) Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με διανύσματα :

i. $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=$

ii. $\vec{AB}-\vec{\Gamma B}=$

iii. $\vec{AB}-\vec{A\Delta}=$

iv. $\vec{AB}+\vec{\Gamma A}=$

v. $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=$

vi. $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=$

vii. $\vec{BA}+\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}=$

viii. $\vec{AB}+\vec{KN}+\vec{BK}=$

ix. $\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}-\vec{BA}=$

x. $\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{BA}-\vec{B\Delta}=$

7) Να συγκριθούν τα διανύσματα :

i. $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=$ και $\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}=$

ii. $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=$ και $\vec{K\Gamma}+\vec{AK}=$

iii. $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=$ και $-\vec{\Lambda\Gamma}+\vec{\Lambda B}=$

iv. $\vec{BK}-\vec{\Lambda K}=$ και $\vec{BN}-\vec{\Lambda N}=$

8) Να υπολογιστεί το άθροισμα : $\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}+\vec{\Gamma E}+\vec{\Delta Z}+\vec{EA}+\vec{ZB}=$

9) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα :

i. $\vec{AB}+\vec{A\Delta}=$

ii. $\vec{\Delta A}-\vec{\Gamma\Delta}=$

iii. $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=$

iv. $\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Gamma}=$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Για την απόδειξη ή το μετασχηματισμό μιας ισότητας με διανύσματα,

1^{ος} τρόπος

Μεταφέρουμε τα διανύσματα στο ένα μέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις μεταξύ των διανυσμάτων και καταλήγουμε σε μια σχέση που προφανώς ισχύει. Πιο συγκεκριμένα :

- Βρίσκουμε τα διανύσματα που το τέλος του ενός είναι η αρχή του άλλου. Δηλαδή τα διαδοχικά διανύσματα και αντικαθιστούμε το άθροισμα τους εφαρμόζοντας την ισότητα : $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$
- Βρίσκουμε τα διανύσματα με κοινή αρχή και αντικαθιστούμε τη διαφορά τους, εφαρμόζοντας την ισότητα : $\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{AB}$.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε σημείο αναφοράς ένα από τα άκρα των διανυσμάτων της ισότητας (συνήθως αυτό που υπάρχει τις περισσότερες φορές) ή οποιοδήποτε άλλο και εκφράζουμε κάθε διάνυσμα της ισότητας συναρτήσει των διανυσματικών ακτινών εφαρμόζοντας την ισότητα : $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε .Να αποδείξετε ότι : $\vec{AE}+\vec{BA}=\vec{B\Gamma}-\vec{E\Delta}-\vec{\Delta\Gamma}$.

Λύση :

1^{ος} τρόπος

$$\vec{AE}+\vec{BA}=\vec{B\Gamma}-\vec{E\Delta}-\vec{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\vec{AE}+\vec{BA}-\vec{B\Gamma}+\vec{E\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{AE}+\vec{E\Delta}+\vec{BA}-\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma A}+\vec{\Delta\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{AA}=\vec{0}$$ που ισχύει.

2^{ος} τρόπος

Διαλέγω ένα από τα γράμματα που εμφανίζονται σαν σημείο αναφοράς (σ.α.)

$$\vec{AE}+\vec{BA}=\vec{B\Gamma}-\vec{E\Delta}-\vec{\Delta\Gamma}\overset{\sigma.\alpha.A}{\Leftrightarrow}\vec{AE}+\vec{AA}-\vec{AB}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}-\left(\vec{A\Delta}-\vec{AE}\right)-\left(\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{AE}-\vec{AB}=\vec{A\Gamma}-\vec{AB}-\vec{A\Delta}+\vec{AE}-\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}\Leftrightarrow\vec{0}=\vec{0}$$ που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

11)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε .Να αποδείξετε ότι : $\vec{AE}-\vec{\Gamma\Delta}=\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta E}-\vec{BA}$.

12)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε .Να αποδείξετε ότι : $\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta E}=\vec{B\Delta}+\vec{E\Gamma}-\vec{BA}$.

13)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ.Ε. Να αποδείξετε ότι : $\vec{AE}-\vec{\Gamma\Delta}=\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta E}-\vec{BA}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΤΙ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ

Για να δείξουμε ότι δυο σημεία Α και Β ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε είτε ότι $\vec{AB}=\vec{0}$. Για να το επιτύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα Α, Β.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

14)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ώστε να ισχύει : $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=\vec{\Delta B}-\vec{E\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε συμπίπτουν.

<u>Λύση :</u>

$$\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=\vec{\Delta B}-\vec{E\Gamma}\overset{\sigma.\alpha.\Delta}{\Leftrightarrow}\vec{\Delta B}-\vec{\Delta A}-\left(\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Delta A}\right)=\vec{\Delta B}-\vec{\Delta\Delta}-\left(\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Delta E}\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta B}-\vec{\Delta A}-\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Delta A}=\vec{\Delta B}-\vec{0}-\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Delta E}\Leftrightarrow\vec{\Delta E}\Leftrightarrow\vec{0}$$ άρα τα σημεία Δ,Ε συμπίπτουν.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

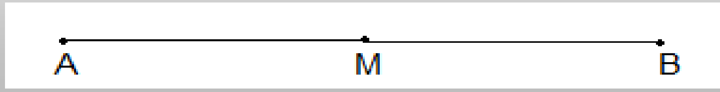
15)Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ ώστε να ισχύει : $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{\Delta B}+\vec{\Delta\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α συμπίπτουν.

16)Αν ισχύει ότι $\vec{\Delta E}-\vec{Z\Gamma}-\vec{\Delta A}=\vec{\Gamma E}-\vec{ZB}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

17)Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο για το οποίο ισχύει : $\vec{A\Gamma}+\vec{BO}=\vec{B\Delta}-\vec{\Gamma\Delta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Α συμπίπτουν.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΣΗΜΕΙΟ Μ ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Αν το σημείο Μ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε ισχύει : $\vec{AM}=\vec{MB}$ ή $\vec{AB}=2\vec{AM}$. Για να το επιτύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα Α, Β ή Μ.



<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

18)Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσον του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι : $\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta B}$.

<u>Λύση :</u> $\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta B}\overset{\sigma.\alpha.M}{\Leftrightarrow}\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{M\Gamma}-\vec{MA}-(\vec{MB}-\vec{M\Delta})\Leftrightarrow$

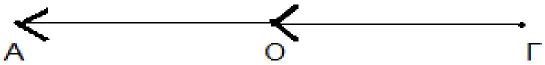
$\Leftrightarrow\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{M\Gamma}-\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{M\Delta}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\vec{0}=-\vec{MA}-\vec{MB}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\vec{MB}=-\vec{MA}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{MB}=\vec{AM}\Leftrightarrow\vec{AM}=\vec{MB}$ άρα Μ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

19)(Άσκηση 5 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)
Δίνονται τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ και έστω Ο το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : $\vec{OB}+\vec{O\Delta}=\vec{AB}-\vec{\Delta\Gamma}$.
<u>Λύση :</u>

$\vec{OB}+\vec{O\Delta}=\vec{AB}-\vec{\Delta\Gamma}\overset{\sigma.\alpha.O}{\Leftrightarrow}\vec{OB}+\vec{O\Delta}=\vec{OB}-\vec{OA}-(\vec{O\Gamma}-\vec{O\Delta})\Leftrightarrow$

$\vec{OB}+\vec{O\Delta}=\vec{OB}-\vec{OA}-\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}\Leftrightarrow\vec{0}=-\vec{OA}-\vec{O\Gamma}\Leftrightarrow\vec{OA}=-\vec{O\Gamma}\Leftrightarrow\vec{OA}=\vec{\Gamma O}$ που ισχύει αφού από εκφώνηση έχω ότι Ο μέσο ΑΓ



<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

20)Αν ισχύει $\vec{A\Gamma}-\vec{BE}=\vec{AB}-\vec{B\Gamma}+\vec{E\Delta}$, να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ.

21)Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσον του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι : $\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta B}$.

22) Δίνονται τρία μη συνευθειακα σημεία Α,Β,Γ. Αν Δ,Ε είναι σημεία που ορίζονται από τις ισότητες : $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BE}=\vec{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι :

i. $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{\Gamma E}$
ii. το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΑΒΓΔ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Για να δείξω ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να δείξω ότι δυο απέναντι πλευρές του είναι ισες και παράλληλες. Αυτό με διανύσματα το πετυχαινω με το να δείξω ότι δυο απέναντι διανύσματα είναι ισα .Για να δείξω δηλαδή ότι ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να δείξουμε μια εκ των ισοτήτων : $\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$ ή $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$. Για να το επιτύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα Α, Β, Γ ή Δ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23)(Άσκηση 4 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)

Αν για δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

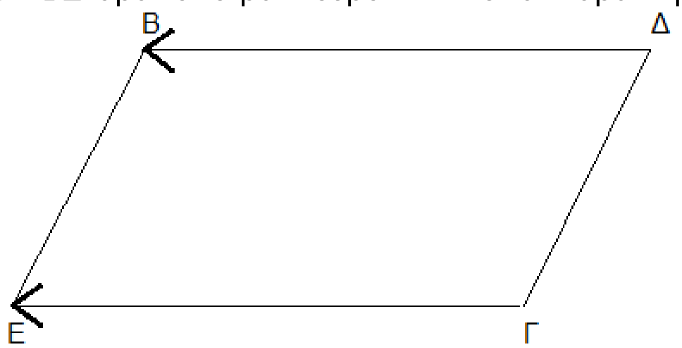
Λύση :

1^{ος} τρόπος : $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}\overset{\sigma.\alpha.B}{\Leftrightarrow}\vec{BB}-\vec{BA}+\vec{B\Gamma}-\vec{BA}=\vec{B\Delta}-\vec{BA}+\vec{BE}-\vec{BA}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{B\Gamma}=\vec{B\Delta}+\vec{BE}\Leftrightarrow\vec{B\Gamma}-\vec{B\Delta}=\vec{BE}\Leftrightarrow\vec{\Delta\Gamma}=\vec{BE}$ άρα το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

2^{ος} τρόπος : Στη σχέση που δίνεται υπάρχει σημείο αναφοράς το Α, οπότε κάνω κατευθείαν τις πράξεις. $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}\Leftrightarrow\vec{AB}+\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}-\vec{AE}=\vec{0}\Leftrightarrow$ $\vec{AB}-\vec{A\Delta}+\vec{A\Gamma}-\vec{AE}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\Delta B}+\vec{E\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{\Delta B}=-\vec{E\Gamma}\Leftrightarrow\vec{\Delta B}=\vec{\Gamma E}$ άρα το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24)Έστω ότι ισχύει : $\vec{\text{ΑΓ}} - \vec{\text{ΕΓ}} = \vec{\text{ΑΕ}} + \vec{\text{ΒΓ}} - \vec{\text{ΑΔ}}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

25)Έστω ότι ισχύει : $\vec{\text{ΑΔ}} - \vec{\text{ΒΔ}} = \vec{\text{ΔΕ}} - \vec{\text{ΔΓ}}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

26)Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Μ για το οποίο ισχύει : $\vec{\text{ΜΑ}} + \vec{\text{ΜΓ}} = \vec{\text{ΜΒ}} + \vec{\text{ΜΔ}}$. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Τριγωνική Ανισότητα : $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Αν $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 8$ να αποδείξετε ότι $5 \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 11$

Λύση :

$$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3-8| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 3+8 \Leftrightarrow |-5| \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 11 \Leftrightarrow 5 \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 11$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

28)Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 5$ να αποδείξετε ότι $3 \le |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \le 7$

29)Αν $|\vec{\text{ΟΑ}}| = 5$ και $|\vec{\text{ΟΒ}}| = 3$ να αποδείξετε ότι $2 \le |\vec{\text{ΑΒ}}| \le 8$

30)Αν $\vec{\alpha} \ne \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \ne -\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|} + \dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} \ge 1$.

31)Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\text{ΑΒ}}, \vec{\text{ΒΓ}}$ με $|\vec{\text{ΑΒ}}| = 2$, $|\vec{\text{ΒΓ}}| = 3$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Δ,Ε ισχύει ότι : $1 \le |\vec{\text{ΔΕ}} - \vec{\text{ΓΕ}} - \vec{\text{ΔΑ}}| \le 5$.

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

5. Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα : (σελ. 21 σχολικό)

Απάντηση :

Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το** $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

6. Να αναφέρεται τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα (σελ. 22 σχολικό)

Απάντηση :

(1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

(2) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

(3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

- Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

(i) $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

(ii) $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

(iii) $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

(iv) $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

(v) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

(vi) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

7. Τι καλούμε γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων ; (σελ. 23 σχολικό)

Απάντηση :

Ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$.

8. Να αναφέρεται την 1^{η} συνθήκη παραλληλίας (σελ. 24 σχολικό)

Απάντηση :

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

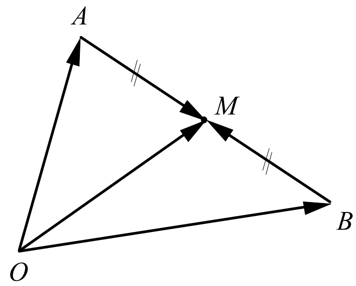
Ειδικότερα :

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$ $\quad \kappa \geq 0$
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$ $\quad \kappa \geq 0$
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

9. Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος :

Να αποδείξετε ότι : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}$ **(σελ. 25 σχολικό)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :



Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς *O*. Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου *M* του τμήματος *AB* έχουμε:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}.$$

Επομένως, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
Άρα

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}$$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΕΚΦΡΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΝΩΣΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ – ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

1) (Άσκηση 2 σελ. 26 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμία από τις περιπτώσεις :

i. $\frac{1}{2}\left(\vec{x}+\vec{\alpha}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{\beta}\right)$

ii. $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$

<u>Λύση :</u>

i. $\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})\Leftrightarrow 6\cdot\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=6\cdot\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})\Leftrightarrow 3(\vec{x}+\vec{\alpha})=2(\vec{x}+\vec{\beta})\Leftrightarrow$

$3\vec{x}+3\vec{\alpha}=2\vec{x}+2\vec{\beta}\Leftrightarrow \vec{x}=2\vec{\beta}-3\vec{\alpha}$

ii. $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}\Leftrightarrow \vec{x}+3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}-3\vec{x}\Leftrightarrow 4\vec{x}=\vec{\alpha}-7\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x}=\frac{1}{4}\vec{\alpha}-\frac{7}{4}\vec{\beta}$

2) Αν ισχύει $\vec{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{O\Gamma}}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\mathrm{O\Delta}}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ να εκφραστούν συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A\Delta}},\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}},\vec{\mathrm{\Gamma A}}$.

<u>Λύση :</u>

$\vec{\mathrm{A\Delta}}\overset{\sigma.\alpha.\mathrm{O}}{=\!=}\vec{\mathrm{O\Delta}}-\vec{\mathrm{OA}}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-\vec{\alpha}=\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ (Το $\vec{\mathrm{A\Delta}}$ ως συνάρτηση, δηλ. ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$)

$\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}\overset{\sigma.\alpha.\mathrm{O}}{=\!=}\vec{\mathrm{O\Delta}}-\vec{\mathrm{O\Gamma}}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-(4\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-4\vec{\alpha}-\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ (Το $\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ ως συνάρτηση, δηλ. ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$)

$\vec{\mathrm{\Gamma A}}\overset{\sigma.\alpha.\mathrm{O}}{=\!=}\vec{\mathrm{OA}}-\vec{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{\alpha}-(4\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{\alpha}-4\vec{\alpha}-\vec{\beta}=-3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ (Το $\vec{\mathrm{\Gamma A}}$ ως συνάρτηση, δηλ. ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$)

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

3) Αν ισχύει $\vec{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{O\Gamma}}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\mathrm{O\Delta}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να εκφραστούν συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A\Delta}},\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}},\vec{\mathrm{\Gamma A}}$.

4) Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε σημείο Ν της πλευράς ΒΓ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $\vec{\mathrm{BN}}=2\vec{\mathrm{N\Gamma}}$. Να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{\mathrm{\Delta\Gamma}},\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}$, $\vec{\mathrm{BN}},\vec{\mathrm{\Gamma N}}$, $\vec{\mathrm{AN}},\vec{\mathrm{N\Delta}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{A\Delta}}=\vec{\beta}$.

5) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ αν ισχύει η σχέση :

i. $\frac{1}{5}\left(\vec{x}-3\vec{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{x}-6\vec{\beta}\right)$.

ii. $2(\vec{x}-\vec{\alpha})-\frac{1}{2}\left(3\vec{x}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η διαδικασία είναι η ίδια που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

6) Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι :

i. $3\vec{\mathrm{AB}}-2\vec{\mathrm{A\Gamma}}=3\vec{\Delta\mathrm{B}}-2\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Delta\mathrm{A}}$

ii. $5\vec{\mathrm{AB}}+3\vec{\mathrm{B\Gamma}}+2\vec{\mathrm{B\Delta}}=7\vec{\mathrm{A\Gamma}}+4\vec{\Gamma\Delta}-2\vec{\mathrm{A\Delta}}$

7) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε, Μ για τα οποία ισχύει : $\vec{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\vec{\mathrm{A\Delta}}$ και $\vec{\mathrm{AM}}=\frac{1}{4}\vec{\mathrm{A\Gamma}}$. Να δείξετε ότι $\vec{\mathrm{MB}}=3\vec{\mathrm{EM}}$.

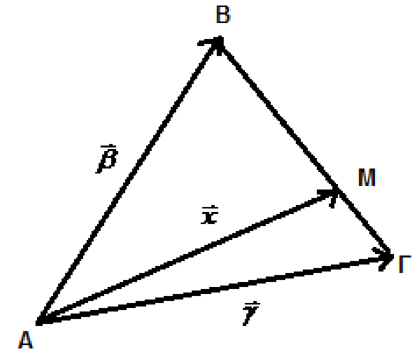
8) Έστω παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α’Β’Γ’Δ’ με Κ και Κ’ τα αντίστοιχα κέντρα τους. Να αποδεδειχθεί ότι $\vec{\mathrm{KK}'}=\frac{\vec{\mathrm{AA}'}+\vec{\mathrm{BB}'}+\vec{\Gamma\Gamma'}+\vec{\Delta\Delta'}}{4}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΑΠΟ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ, ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

9) (Άσκηση 3 σελ. 26 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Στο παρακάτω σχήμα είναι (ΒΜ)=2(ΜΓ), να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\frac{1}{3}\left(\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



Λύση :

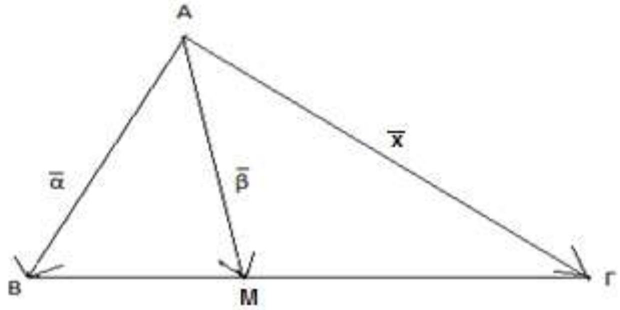
Έχω : $(\mathrm{BM}) = 2(\mathrm{M\Gamma})$ από το σχήμα και τη διεύθυνση των διανυσμάτων προκύπτει ότι : $\vec{\mathrm{BM}} = 2\vec{\mathrm{M\Gamma}}$ (1) . Η σχέση που θέλω να καταλήξω έχει $\vec{x},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ άρα πρέπει να εμφανίσω τα διανύσματα $\vec{\mathrm{AM}},\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ οπότε στην (1) σ.α. το Α.

$$\vec{\mathrm{BM}} = 2\vec{\mathrm{M\Gamma}} \overset{\sigma.\alpha.\mathrm{A}}{\Leftrightarrow} \vec{\mathrm{AM}} - \vec{\mathrm{AB}} = 2\left(\vec{\mathrm{A\Gamma}} - \vec{\mathrm{AM}}\right) \Leftrightarrow \vec{\mathrm{AM}} - \vec{\mathrm{AB}} = 2\vec{\mathrm{A\Gamma}} - 2\vec{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow 3\vec{\mathrm{AM}} = \vec{\mathrm{AB}} + 2\vec{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{x} = \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{3}\left(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}\right)$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

10) Στο παρακάτω σχήμα είναι 2(ΒΜ)=3(ΜΓ), να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.



11) Στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε¸ΒΔ=2ΔΓ. Να αποδεδειχθεί ότι $\vec{\mathrm{AB}} + 2\vec{\mathrm{A\Gamma}} = 3\vec{\mathrm{A\Delta}}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ - ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Γνωρίζουμε ότι αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$. Επίσης αν δυο διανύσματα έχουν ένα κοινό σημείο και είναι παράλληλα, τότε έχουν τον ίδιο φορέα. Άρα αν θέλουμε να δείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι **συνευθειακά,** αρκεί να δείξουμε ότι : $\vec{AB}//\vec{A\Gamma}$ δηλ. $\vec{AB} = \lambda\vec{A\Gamma}$, ή $\vec{AB}//\vec{B\Gamma}$ δηλ. $\vec{AB} = \lambda\vec{B\Gamma}$. Η διαδικασία που ακολουθώ είναι η εξής : εντοπίζουμε δυο διανύσματα που έχουν άκρα τα σημεία αυτά π.χ. $\vec{AB},\vec{B\Gamma}$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι είναι παράλληλα, δηλ. $\vec{AB} = \lambda\vec{B\Gamma}$.

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\vec{AB}$ ομόρροπο με το $\vec{A\Gamma}$ τότε αρκεί $\vec{AB} = \lambda\vec{A\Gamma}$ με $\lambda \geq 0$.

Ενώ αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\vec{AB}$ αντίρροπο με το $\vec{A\Gamma}$ τότε αρκεί $\vec{AB} = \lambda\vec{A\Gamma}$ με $\lambda \leq 0$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

<u>Περίπτωση 1</u> (Μέσα από διανυσματική ισότητα)

12) (Άσκηση 6 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{B\Lambda} + 3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, και Μ είναι συνευθειακα.

<u>Λύση :</u>

Σε αυτή την περίπτωση διαλέγω ένα από τα Κ, Λ, και Μ (όποιο θέλω) ως σημείο αναφοράς και αναλύω την διανυσματική ισότητα που δίνεται.

$$\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{B\Lambda} + 3\vec{AM} \overset{\sigma.\alpha.K}{\Leftrightarrow} \vec{KK} - \vec{KA} + 3\left(\vec{KK} - \vec{KB}\right) - 2\left(\vec{KA} - \vec{KB}\right) = \vec{K\Lambda} - \vec{KB} + 3\left(\vec{KM} - \vec{KA}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\vec{KA} - 3\vec{KB} - 2\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{K\Lambda} - \vec{KB} + 3\vec{KM} - 3\vec{KA} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{K\Lambda} + 3\vec{KM} \Leftrightarrow \vec{K\Lambda} = -3\vec{KM}$$

Άρα $\vec{K\Lambda}//\vec{KM}$ και άρα Κ,Λ,Μ συνευθειακα.

<u>Περίπτωση 2</u> (Μέσα από μεμονωμένες διανυσματικές σχέσεις)

13)Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{O\Gamma} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$, να αποδεδειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

<u>Λύση :</u>

Για ν.δ.ο Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, αρκεί ν.δ.ο. δυο διανύσματα που έχουν άκρα τα σημεία αυτά π.χ. $\vec{AB},\vec{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

$$\vec{AB} \overset{\sigma.\alpha.O}{=\!=} \vec{OB} - \vec{OA} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} - \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$$

$$\vec{B\Gamma} \overset{\sigma.\alpha.O}{=\!=} \vec{O\Gamma} - \vec{OB} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma} - 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} = 8\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + 6\vec{\gamma} = 2(4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}) = 2\vec{AB}$$

Άρα $\vec{B\Gamma} = 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{B\Gamma}//\vec{AB}$ άρα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

14)Αν για τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ισχύει $3\vec{EB}+5\vec{AB}+7\vec{EA}+2\vec{A\Delta}-10\vec{E\Gamma}=\vec{0}$ να αποδειχτεί ότι τα σημεία Β,Γ,Δ είναι συνευθειακά.

15) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\nu}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\vec{u}=2\vec{\alpha}-\frac{8}{3}\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

16) Αν ισχύει $3\vec{OA}-8\vec{OB}+5\vec{O\Gamma}=\vec{0}$
i. να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
ii. να βρείτε τη σχετική θέση των Α,Β,Γ.

17) Αν για τα σημεία Μ,Α,Β,Γ ισχύει : $3\vec{MA}+4\vec{MB}-7\vec{M\Gamma}=\vec{0}$,
i. να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά
ii. να βρείτε τη σχετική θέση των Α,Β,Γ.

18)Αν $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=3\vec{\beta}$ και $\vec{O\Gamma}=6\vec{\beta}-\vec{\alpha}$, να αποδεδειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

19) Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$. Έστω σημείο Ε για το οποίο ισχύει $\vec{AE}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να αποδεδειχθεί ότι τα σημεία Γ,Δ και Ε είναι συνευθειακά.

20) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει : $\vec{AB}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{B\Gamma}=-4\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{\Gamma\Delta}=-5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Να δηχθεί ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

21) Αν τα διανύσματα θέσης των σημείων Α,Β,Γ ως προς το σημείο Ο είναι $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{y}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\vec{z}=4\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+10\vec{\gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

22)Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύει : $\vec{AE}=\frac{1}{5}\vec{A\Delta}$ και $\vec{AZ}=\frac{1}{6}\vec{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι Ε,Ζ,Β συνευθειακα.

23)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε, Ζ για τα οποία ισχύει : $\vec{A\Delta}=\vec{\Delta B}$, $\vec{AZ}=\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BE}=3\vec{B\Gamma}$.
i. Να γράψετε τα $\vec{\Delta E},\vec{\Delta Z}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB},\vec{A\Gamma}$
ii. Να δείξετε ότι Δ,Ε,Ζ συνευθειακα.

24)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}}=\frac{1}{2}$.

i. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\mathrm{AM}}$ ως συνάρτηση των $\vec{\mathrm{AB}}$ και $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$.

ii. Έστω επίσης σημείο Δ για το οποίο ισχύει : $\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}=4\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Gamma}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Δ, Μ είναι συνευθειακά.

25) Αν ισχύει : $(\kappa+2)\vec{\mathrm{MA}}+3\vec{\mathrm{MB}}=(\kappa+5)\vec{\mathrm{M\Gamma}}$, να αποδείξετε ότι σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

26) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $\vec{\mathrm{A\Delta}}=x\vec{\mathrm{AB}}+y\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ με x+y=1. Να αποδεδειχθεί ότι το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ΒΓ.

27) Αν τα σημεία Α,Γ δε συμπίπτουν και ισχύει $\vec{\mathrm{O\Gamma}}=(1-\lambda)\vec{\mathrm{OA}}+\lambda\vec{\mathrm{OB}}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

28) Δίνεται ένα τρίγωνο και οι αριθμοί $\mu,\nu\in\Re$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε $\vec{\mathrm{A\Delta}}=\mu\vec{\mathrm{AB}}+\nu\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{AE}}=\nu\vec{\mathrm{AB}}+\mu\vec{\mathrm{A\Gamma}}$. Να αποδεδειχθεί ότι ΔΕ//ΒΓ.

29)Αν ισχύει η σχέση $2\vec{\mathrm{A\Lambda}}+3\vec{\mathrm{B\Lambda}}+2\vec{\mathrm{MB}}=\vec{\mathrm{AK}}+\vec{\mathrm{AM}}+\vec{\mathrm{BK}}$ να αποδεδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\mathrm{K\Lambda}},\vec{\mathrm{M\Lambda}}$ είναι αντίρροπα.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

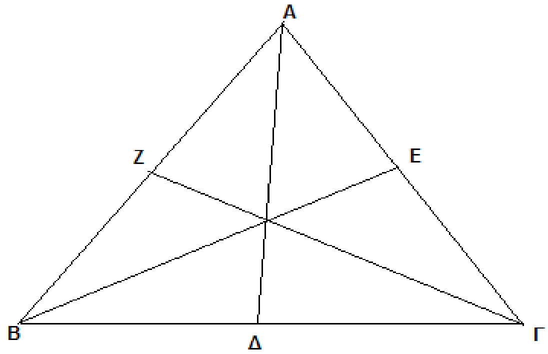
Αν $\vec{\mathrm{AB}}$ διάνυσμα και Μ είναι το μέσο του, τότε ισχύει : $\vec{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{\mathrm{OA}}+\vec{\mathrm{OB}}}{2}$ όπου Ο σημείο αναφοράς.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

30)(Άσκηση 7 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι : $\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{BE}}+\vec{\mathrm{\Gamma Z}}=\vec{0}$.

<u>Λύση :</u>



Έχω: $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}+\dfrac{\vec{BA}+\vec{B\Gamma}}{2}+\dfrac{\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}}{2}=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{BA}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}}{2}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\vec{AB}+\vec{BA}+\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma A}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma B}}{2}=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{AA}+\vec{AA}+\vec{BB}}{2}=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{0}}{2}=\vec{0}$ που ισχύει.

31)(Άσκηση 8 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Αν Κ,Λ,Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει : $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM}$.

<u>Λύση :</u>

Έχω : $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\dfrac{\vec{OB}+\vec{O\Gamma}}{2}+\dfrac{\vec{O\Gamma}+\vec{OA}}{2}+\dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2} \Leftrightarrow$

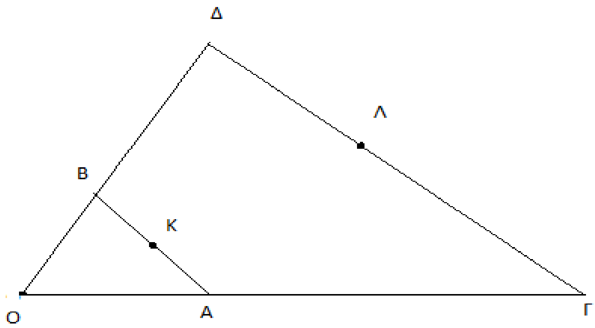
$\Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\dfrac{\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{O\Gamma}+\vec{OA}+\vec{OA}+\vec{OB}}{2} \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\dfrac{2\vec{OA}+2\vec{OB}+2\vec{O\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\dfrac{2(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$ που ισχύει.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

32)Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ΒΔ, ΔΓ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι : $\vec{AK}+\vec{A\Lambda}-\vec{AM}=\vec{A\Delta}$.

33)Στο παρακάτω σχήμα τα Κ,Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν είναι $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma}=3\vec{\alpha}$ και $\vec{O\Delta}=3\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο,Κ,Λ είναι συνευθειακα.



34)Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων Α,Β,Γ ως προς το σημείο Ο αντίστοιχα.

i. Να βρείτε τα διανύσματα θέσης των παρακάτω σημείων, ως προς $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$
   - Δ
   - Ε , το οποίο είναι μέσον του ΑΔ
   - Ζ για το οποίο ισχύει : $2\vec{\mathrm{AZ}}=\vec{\mathrm{Z\Gamma}}$

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

35)Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

i. $\vec{\mathrm{MN}}=\dfrac{\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{\Gamma B}}}{2}$

ii. $\vec{\mathrm{BM}}+\vec{\mathrm{\Gamma N}}=\dfrac{\vec{\mathrm{BA}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}}{2}$

36)Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ τυχαίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδεδειχθεί ότι $\vec{\mathrm{A\Gamma}}+\vec{\mathrm{B\Delta}}=2\vec{\mathrm{K\Lambda}}$

37)Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Κ το κέντρο του και Μ το μέσο του ΚΓ.

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Delta}}=4\vec{\mathrm{AM}}-2\vec{\mathrm{A\Gamma}}$

ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\mathrm{BM}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\mathrm{BA}}$ και $\vec{\mathrm{B\Gamma}}$.

38)Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδεδειχθεί ότι $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}=2\vec{\mathrm{MN}}$.

39)Έστω τραπέζιο ΟΑΒΓ με $\vec{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$, $\vec{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{\gamma}$, $\vec{\mathrm{\Gamma B}}=2\vec{\mathrm{OA}}$. Αν Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{\mathrm{\Gamma A}},\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{E\Delta}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$. Κατόπιν να αποδεδειχθεί ότι $\vec{\mathrm{\Gamma A}}=2\vec{\mathrm{E\Delta}}$.

40)Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ,Λ των ΑΒ , ΓΔ αντίστοιχα. Αν το σημείο Ο είναι μέσον του ΚΛ και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι : $\vec{\mathrm{MA}}+\vec{\mathrm{MB}}+\vec{\mathrm{M\Gamma}}+\vec{\mathrm{M\Delta}}=4\vec{\mathrm{MO}}$

41)Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Μ,Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Να αποδεχθεί ότι : $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{\Gamma B}}+\vec{\mathrm{\Gamma\Delta}}=4\vec{\mathrm{MN}}$.

42)Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

i. $\vec{\mathrm{K\Lambda}}=\dfrac{\vec{\mathrm{A\Delta}}+\vec{\mathrm{B\Gamma}}}{2}$

ii. $\vec{\mathrm{\Lambda A}}+\vec{\mathrm{\Lambda B}}+\vec{\mathrm{K\Gamma}}+\vec{\mathrm{K\Delta}}=\vec{0}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6</u> : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΤΙ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ

Για να δείξουμε ότι δυο σημεία Α και Β ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε είτε ότι $\vec{AB} = 0$. Για να το πετύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα Α, Β.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

43)Αν ισχύει $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} = \vec{NA} + 2\vec{NB} + 3\vec{N\Gamma}$, να δείξετε ότι τα σημεία Μ,Ν ταυτίζονται.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7</u> : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Για προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Μ από μια διανυσματική ισότητα, αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{AM}$ (Α : γνωστό σημείο) , συναρτήσει γνωστών διανυσμάτων. Για να το πετύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα σταθερά σημεία, όχι όμως το Μ.
Συχνά :

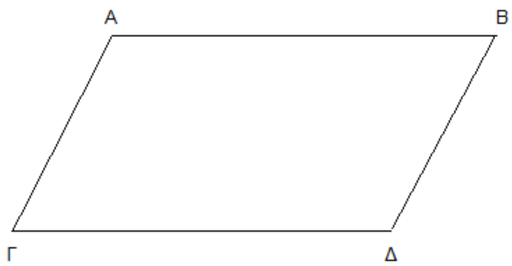
- Αν $\vec{AM} = \vec{0}$ τότε το Μ ταυτίζεται με το Α
- Αν $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ ή $\vec{AM} = \vec{MB}$ τότε το Μ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

44)(Άσκηση 5 σελ. 28 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta}$

<u>Λύση :</u>



$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta} \overset{\sigma.\alpha.A}{\Leftrightarrow} \vec{AA} - \vec{AM} + \vec{AB} - \vec{AM} + \vec{A\Gamma} - \vec{AM} = \vec{A\Delta} - \vec{AM} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AB} + \vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} = 2\vec{AM} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{AM} \xLeftrightarrow{\substack{\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma} \\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota} \\ AB\Gamma\Delta \\ \pi\alpha\rho/\mu o}} 2\vec{AB} = 2\vec{AM} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AM} \Leftrightarrow B \equiv M$$

Δηλ. το σημείο Μ ταυτίζεται με το Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

45)Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ, ώστε να ισχύει : $\vec{\Gamma M}+\vec{\Delta M}-\vec{AM}=\vec{\Gamma A}-\vec{B\Delta}$.

46)Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ του χώρου.

i. Να δείξετε ότι $\vec{MA}+\vec{M\Gamma}=\vec{MB}+\vec{M\Delta}$

ii. Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ, ώστε να ισχύει : $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{0}$.

47)Έστω τα σημεία Α, Β . Να βρείτε σημείο Ο ώστε να ισχύει : $\vec{O\Gamma}+3\vec{BO}=\vec{O}$.

48)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε : $\vec{MA}-2\vec{MB}+3\vec{M\Gamma}=\vec{0}$.

49) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Μ τέτοιο ώστε : $2\vec{AM}-\vec{\Gamma M}=\vec{MB}-2\vec{AB}$

50) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}$.

51)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

i. Να βρείτε το σημείο Ο αν ισχύει : $2\vec{OA}+3\vec{OB}+6\vec{O\Gamma}=\vec{0}$

ii. Να δείξετε ότι $\vec{OM}=\frac{2}{11}\vec{AM}+\frac{3}{11}\vec{BM}+\frac{6}{11}\vec{\Gamma M}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΤΙ ΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟ

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{u}$, το οποίο είναι εκφρασμένο ως συνάρτηση διανυσμάτων που το ένα άκρο τους είναι μεταβλητό (μη σταθερό), είναι σταθερό. Για να το πετύχω, αναλύω τη διανυσματική ισότητα με σημείο αναφοράς ένα από τα σταθερά σημεία, ώστε να κάνουμε απαλοιφή του μεταβλητού σημείου.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52)(Άσκηση 8 σελ. 29 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Δίνονται τα σημεία Α,Β και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u}=3\vec{MA}-5\vec{MB}+2\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

Λύση :

$\vec{u}=3\vec{MA}-5\vec{MB}+2\vec{M\Gamma}\overset{\sigma.\alpha.A}{=\!=}3(\vec{AA}-\vec{AM})-5(\vec{AB}-\vec{AM})+2(\vec{A\Gamma}-\vec{AM})=$

$=-3\vec{AM}-5\vec{AB}+5\vec{AM}+2\vec{A\Gamma}-2\vec{AM}=-5\vec{AB}+2\vec{A\Gamma}$ άρα : $\vec{u}=-5\vec{AB}+2\vec{A\Gamma}$ σταθερό ανεξάρτητο του Μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

53) Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ. Να αποδεδειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u}=5\vec{MA}-8\vec{MB}+3\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του σημείου Μ.

54) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}=2\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{M\Gamma}-2\vec{M\Delta}$ είναι σταθερό.

55) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ισχύει κ+λ+μ=0 , να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ, το διάνυσμα $\vec{u}=\kappa\vec{MA}+\lambda\vec{MB}+\mu\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΑΠΟ ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν έχουμε μια διανυσματική ισότητα και θέλουμε να αποδείξουμε μια ισότητα πραγματικών αριθμών ή να λύσουμε μια εξίσωση με άγνωστο ή αγνώστους πραγματικούς αριθμούς, τότε μετασχηματίζουμε τη διανυσματική ισότητα στη μορφή :

- $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=\mu$

  ή
- $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$ με $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι παράλληλα άρα $\Leftrightarrow\kappa=0$ και $\lambda=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

56)(Άσκηση 10 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{A\Gamma}=\lambda\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}=\mu\vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1$.

Λύση :

$\vec{A\Gamma}=\lambda\vec{AB}$ (1)

$\vec{B\Gamma}=\mu\vec{AB}\overset{\sigma.\alpha.A}{\Leftrightarrow}\vec{A\Gamma}-\vec{AB}=\mu\vec{AB}\Leftrightarrow\vec{A\Gamma}=\mu\vec{AB}+\vec{AB}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lambda\vec{AB}=(\mu+1)\vec{AB}\Leftrightarrow\lambda=\mu+1\Leftrightarrow\lambda-\mu=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

57) Αν Β και Γ δεν ταυτίζονται και ισχύει η ισότητα $2\vec{A\Delta}+3\vec{B\Gamma}=\vec{0}$, να βρείτε το x ώστε να ισχύει : $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=x\vec{B\Gamma}$.

58) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του. Αν ισχύει $\kappa\vec{AB}+\lambda\vec{A\Gamma}=3\vec{B\Gamma}+2\vec{AM}$, να βρείτε τα κ,λ.

59) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Gamma}=\vec{\beta}$ και $\vec{\Delta\Gamma}=2\vec{\alpha}$. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του.

i. Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$, $\vec{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

ii. Αν $\vec{AM}=\lambda\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BM}=\mu\vec{B\Delta}$, να βρείτε τα λ,μ .

60)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ για το οποίο ισχύει : $\vec{B\Delta}=3\vec{A\Gamma}-4\vec{AB}$

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta}\uparrow\uparrow\vec{B\Gamma}$

ii. Να βρείτε το $x\in\Re$, ώστε να ισχύει $x\vec{A\Gamma}=3\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}$

61)Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ,Δ με το Β να μην ταυτίζεται με το Α, για τα οποία ισχύει : $\vec{\Delta\Gamma}=3\vec{A\Gamma}-2\vec{AB}$

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta}\uparrow\downarrow\vec{B\Gamma}$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $x\vec{\Delta\Gamma}-x\vec{AB}=(x+2)\vec{B\Gamma}$

62)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύει ότι : $\vec{AM}=\lambda\vec{AB}+\mu\vec{A\Gamma}$ και $\vec{BM}=\lambda\vec{A\Gamma}+\mu\vec{BA}$. Να αποδεδειχθεί ότι :

i. $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$

ii. το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10</u> : ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

63)(Άσκηση 7 σελ. 29 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Αν G, G΄ είναι τα βαρύκεντρα δυο τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, να αποδείξετε ότι $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}=3\vec{GG'}$

<u>Λύση :</u>

Έχω : $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}=3\vec{GG'}\overset{\sigma.\alpha.O}{\Leftrightarrow}\vec{OA'}-\vec{OA}+\vec{OB'}-\vec{OB}+\vec{O\Gamma'}-\vec{O\Gamma}=3(\vec{OG'}-\vec{OG})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{O\Gamma'}-(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})=3\vec{OG'}-3\vec{OG}$ (1) Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ.25 έχω ότι $\vec{OG}=\dfrac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})\Leftrightarrow 3\vec{OG}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}$ άρα και

$\vec{OG'}=\dfrac{1}{3}(\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{O\Gamma'})\Leftrightarrow 3\vec{OG'}=\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{O\Gamma'}$

Άρα η (1) γίνεται

$(1)\Leftrightarrow\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{O\Gamma'}-(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})=\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{O\Gamma'}-(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})\Leftrightarrow\vec{0}=\vec{0}$ που ισχύει.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

64)Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με κέντρα βάρους τα σημεία G,Θ αντίστοιχα. Να αποδεδειχθεί ότι :

i. $\vec{\mathrm{A}\Delta}+\vec{\mathrm{BE}}+\vec{\Gamma\mathrm{Z}}=3\vec{G\Theta}$

ii. τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους αν και μόνο αν $\vec{\mathrm{A}\Delta}+\vec{\mathrm{BE}}+\vec{\Gamma\mathrm{Z}}=\vec{0}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11</u> : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

- **ΟΡΙΣΜΟΣ** Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι **γεωμετρικός τόπος** είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή <u>χαρακτηριστική</u> ιδιότητα.
- **ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΙ**
  - Έστω το σταθερό διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και το σημείο Α. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\vec{\mathrm{MA}}=\lambda\vec{\alpha}$ είναι ευθεία παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και διέρχεται από το Α.
  - Έστω Α,Β σταθερά σημεία του επίπεδου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\left|\vec{\mathrm{MA}}\right|=\left|\vec{\mathrm{MB}}\right|$ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.
  - Έστω το σταθερό σημείο Α και ρ>0. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\left|\vec{\mathrm{MA}}\right|=\rho$ είναι κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ρ.
  - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επίπεδου που ισαπέχουν από δυο ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι οποίες :
    i. δεν είναι παράλληλες, είναι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές.
    ii. είναι παράλληλες, είναι μεσοπαράλληλος αυτών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αν C είναι ο γεωμετρικός τόπος και Ι η κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα, τότε το τυχαίο σημείο Μ που έχει την ιδιότητα Ι ανήκει στο C και αντιστρόφως το τυχαίο στοιχειό του C έχει την ιδιότητα Ι. Οπότε για την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου που τα σημεία του έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα Ι

- ✓ υποθέτουμε ότι C ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος και Μ τυχαίο σημείο του, που έχει την ιδιότητα Ι. Ισχύει : $\mathrm{M}\in C\Leftrightarrow\mathrm{M}$:έχει την ιδιότητα Ι $\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\mathrm{M}$:έχει μια βασική ιδιότητα. Από τη βασική ιδιότητα που έχει το Μ προσδιορίζεται και ο γεωμετρικός τόπος C.
- ✓ Αν θέλουμε να βρούμε :
  - ❖ Που βρίσκονται τα σημεία Μ του επίπεδου που έχουν μια κοινή ιδιότητα Ι ή
  - ❖ Που κινείται ένα σημείο Μ που έχουν μια ιδιότητα Ι .

  Τότε με την υπόθεση ότι το σημείο Μ έχει την ιδιότητα Ι και με συνεπαγωγές καταλήγουμε ότι το Μ έχει μια από τις βασικές ιδιότητες, οπότε προσδιορίζεται το σύνολο C που βρίσκεται το Μ.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

65) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΓΔ με $|\vec{\Gamma\Delta}| = 3$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε : $3|\vec{MB} - \vec{AB}| = |\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{M\Gamma}|$.

<u>Λύση :</u>
Έστω (C) ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Είναι $M \in C \Leftrightarrow$

$$3|\vec{MB} - \vec{AB}| = |\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{M\Gamma}| \xLeftrightarrow[\Leftrightarrow 2\vec{M\Delta}=\vec{MA}+\vec{MB}]{\vec{M\Delta}=\frac{\vec{MA}+\vec{MB}}{2}\Leftrightarrow} 3|\vec{MB} + \vec{BA}| = |2\vec{M\Delta} - 2\vec{M\Gamma}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|\vec{MA}| = |2(\vec{M\Delta} - \vec{M\Gamma})| \Leftrightarrow 3|\vec{MA}| = |2\vec{\Gamma\Delta}| \Leftrightarrow 3|\vec{MA}| = 2|\vec{\Gamma\Delta}| \Leftrightarrow 3|\vec{MA}| = 2\cdot 3 \Leftrightarrow |\vec{MA}| = 3$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος (C) είναι κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ρ=2.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

66) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + \vec{M\Gamma}|$.

67) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επίπεδου για τα οποία ισχύει : $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{M\Gamma} - \vec{M\Delta}|$

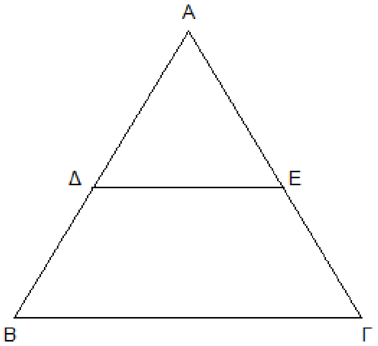
68)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\vec{MB} = \lambda\,\vec{A\Gamma} + (1-\lambda)\,\vec{AB}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ καθώς το λ μεταβάλλεται στο R.

69)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\vec{A\Gamma} - \lambda\,\vec{BM} = (\lambda+1)\,\vec{M\Gamma}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ καθώς το λ μεταβάλλεται στο R.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 12</u> : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

70)(Εφαρμογή σελ. 24 σχολικού βιβλίου) Να αποδείξετε με τη βοήθεια των διανυσμάτων το γνωστό Θεώρημα της Γεωμετρίας που λέει ότι «Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισο με το μισό της.»
<u>Λύση :</u>



Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Θα δείξουμε ότι $\mathrm{\Delta E} = // \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Έχουμε : $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \overset{\sigma.\alpha.\Lambda}{===} \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AE}} - 2\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}) = 2\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$. Άρα $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} // \overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ (1)

Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}} \Rightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|}{2}$ Δηλ. $\mathrm{\Delta E} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (2). Από (1) και (2) $\mathrm{\Delta E} = // \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

71) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

72) Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}}{2}$.

73) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ//ΓΔ, και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

i. $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}}{2}$
ii. το ΜΝ είναι παράλληλο στις βάσεις του τραπεζίου.

74) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Λ, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{N\Lambda}} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Έστω επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \vec{\beta}$.

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
ii. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΓΛ;

75) Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

76) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς ΓΔ τέτοιο, ώστε ΕΔ=2ΕΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1, 1.2, 1.3

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 18603

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 18604

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ZB}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Ζ, και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 20054

Θεωρούμε τα σημεία Ρ,Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{\mathrm{P\Lambda}} = 2\overrightarrow{\mathrm{PK}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PM}}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ,Λ και Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}} + 3\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{AK}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BK}}$$

Όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου. (Μονάδες 15)

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

10. Να δείξετε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$. (σελ. 31 σχολικό)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

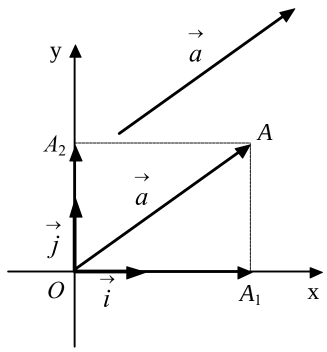
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου.

Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ (1)

Αν x,y είναι οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το $\vec{\alpha}$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.



Στην παραπάνω κατασκευή οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί. Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική. Πράγματι, έστω ότι ισχύει και $\vec{\alpha}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

Τότε θα έχουμε $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j} \Leftrightarrow (x-x')\vec{i}=(y'-y)\vec{j}$

Αν υποθέσουμε ότι $x\neq x'$, δηλαδή ότι $x-x'\neq 0$, τότε θα ισχύει : $\vec{i}=\dfrac{y'-y}{x-x'}\vec{j}$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i}\,//\,\vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x=x'$, που συνεπάγεται ότι και $y=y'$. Ώστε:

"Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ".

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως, ενώ οι αριθμοί x,y λέγονται συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Oxy. Πιο συγκεκριμένα, ο x λέγεται **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ και ο y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$.

11. Πότε είναι ισα δυο διανύσματα ; (σελ. 32 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Από τον τρόπο που ορίστηκαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος προκύπτει ότι:

“Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες”.

Δηλ. έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Τα δυο διανύσματα είναι ισα, δηλαδή $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ αν ισχύει $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

12. Πως ορίζονται οι Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων (σελ. 32 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Ισχύουν :

- $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
- $\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ έχουμε:

$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$.

<u>Για παράδειγμα</u>, αν $\vec{\alpha}=(1,-1)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$, τότε

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(1,-1)+(1,2)=(2,1)$,

$2\vec{\alpha}=2(1,-1)=(2,-2)$,

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,-1)-(1,2)=(1,-1)+(-1,-2)=(0,-3)$,

$2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(1,-1)-(1,2)=(2,-2)+(-1,-2)=(1,-4)$

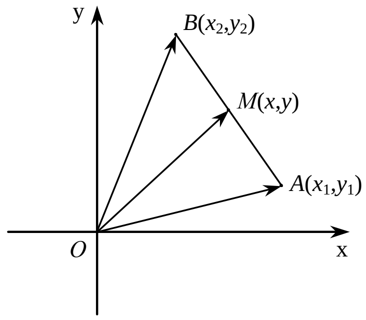
<u>Γενικά :</u>

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε :

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
- $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
- $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$
- $\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow x_1=0$ και $y_1=0$
- $\vec{\alpha}\neq\vec{0}\Leftrightarrow x_1\neq 0$ ή $y_1\neq 0$

13. <u>Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος</u> (σελ. 33 σχολικό)
Αν θεωρήσουμε δύο σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου *M* του *AB*, να αποδείξετε ότι :
$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ & $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ :</u>



Επειδή $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, και

$\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$,

Έχουμε : $(x, y) = \dfrac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Επομένως ισχύει

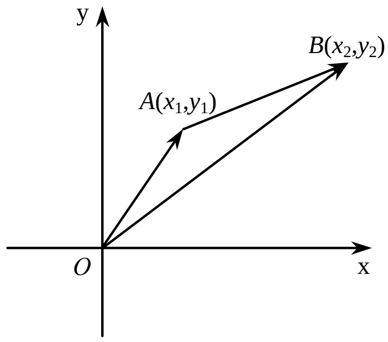
$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

<u>Δηλαδή</u> έστω δυο σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B} = (x_2, y_2)$. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι $x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_{\mathrm{M}} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Αν τα σημεία Α,Β είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Μ τότε το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

<u>Για παράδειγμα</u>, να βρεθεί το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν Α(1,6) και Β(-3,2).
$x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$, $y_{\mathrm{M}} = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$ άρα Μ(-1,4)

14. <u>Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα</u> (σελ. 33 σχολικό)
Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ :</u>



Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
Επειδή, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$,
$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$,
έχουμε: $(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

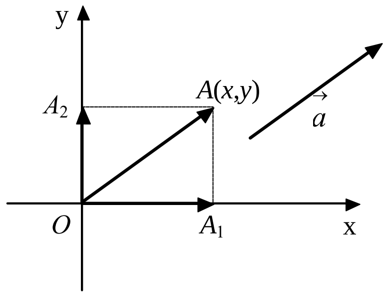
<u>Δηλαδή</u> έστω το διάνυσμα $\vec{\mathrm{AB}}$ με άκρα τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B} = (x_2, y_2)$. Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\mathrm{AB}}$ είναι $\vec{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
<u>Για παράδειγμα</u>, αν είναι Α(3,-5) , Β(-2,4) να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος ΑΒ. $\vec{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-2-3, 4+5) = (-5, 9)$

15. <u>Μέτρο Διανύσματος</u> (σελ. 34 σχολικό)

Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ :</u>

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και *A* το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του *A* στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο *A* έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(\mathrm{OA}_1)=|x|$ και $(\mathrm{OA}_2)=|y|$.



Έτσι θα έχουμε:

$|\vec{\alpha}|^2=(\mathrm{OA})^2=(\mathrm{OA}_1)^2+(\mathrm{A}_1\mathrm{A})^2=(\mathrm{OA}_1)^2+(\mathrm{OA}_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$.

Επομένως: αν $\vec{\alpha}=(x,y)$ τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>Δηλαδή</u> έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$. Το μετρό του διανύσματος είναι : $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

<u>Για παράδειγμα</u>, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=(-3,4)$

$\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

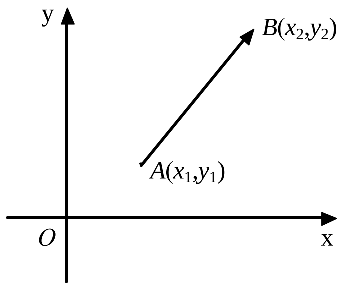
16. Η απόσταση των σημείων $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ **(σελ. 35 σχολικό)**

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ :</u>

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων *A* και *B* είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο θα ισχύει:

$(\mathrm{AB})=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



<u>Δηλαδή</u> έστω δυο σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}=(x_2,y_2)$. Όπως είδαμε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. Συνεπώς το μετρό του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ θα είναι $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$. Αυτή όμως είναι στην ουσία και η απόσταση των σημείων Α και Β $\left(\mathrm{AB}\right)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

<u>Για παράδειγμα</u>, αν $\mathrm{A}(2,-7)$ και $\mathrm{B}(5,-3)$, να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β.

$\left(\mathrm{AB}\right)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(-3+7)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

17. Να αναφέρεται τη $2^{η}$ συνθήκη παραλληλίας (σελ. 37 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Ορίζουσα των διανυσμάτων ονομάζουμε τον αριθμό : $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-y_1x_2$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, δηλαδή $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$. ($2^{η}$ συνθήκη παραλληλίας)

<u>Για παράδειγμα</u>,

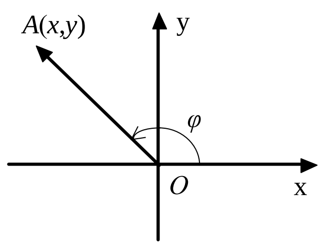
Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\sqrt{3},-1)$ και $\vec{\beta}=(3,-\sqrt{3})$ είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}=-3+3=0$, ενώ

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,2)$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+3=7\neq 0$.

18.Τι ορίζεται ως Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος (σελ. 38 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Τη γωνία ϕ, που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$**. Είναι φανερό ότι $0\leq\phi<2\pi$.



Για τη γωνία ϕ, όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει $\varepsilon\varphi\phi=\frac{y}{x}$.

Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$, με $x\neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με λ. Επομένως: $\boxed{\lambda=\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\phi}$

Είναι φανερό ότι αν $\vec{\alpha}=(x,y)$

— Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda=0$ και το διάνυσμα είναι οριζόντιο (παράλληλο στον x΄x) δηλ. $\vec{\alpha}//x'x \Leftrightarrow y=0$.

— Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα είναι κατακόρυφο (παράλληλο στον y΄y) δηλ. $\vec{\alpha}//y'y \Leftrightarrow x=0$.

ΘΥΜΗΣΟΥ ! ! !

1^{o} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\varepsilon\phi 0^\circ = 0$

$\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varepsilon\phi 45^\circ = 1$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1$

$\varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\varepsilon\phi 90^\circ = \Delta.\text{O}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{2} = \Delta.\text{O}.$

2^{o} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\varepsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varepsilon\phi 135^\circ = -1$ ή $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4} = -1$

$\varepsilon\phi 120^\circ = -\sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

3^{o} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\varepsilon\phi 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varepsilon\phi 225^\circ = 1$ ή $\varepsilon\phi\frac{5\pi}{4} = 1$

$\varepsilon\phi 240^\circ = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

19. Να αναφέρεται τη 3^{η} συνθήκη παραλληλίας (σελ. 38 σχολικό)

Απάντηση :

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως.

Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής: $\boxed{\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$

Επίσης : Τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{\text{AB}} // \vec{\text{AΓ}} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\text{AB}}, \vec{\text{AΓ}}\right) = 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Αν $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(3,2)$ τότε να υπολογίσετε :
   i. $2\vec{\alpha}$ ii. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ iii. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ iv. $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$
   Λύση :
   i. $2\vec{\alpha}=2(2,-1)=(4,-2)$
   ii. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2,-1)+(3,2)=(5,1)$
   iii. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(2,-1)-(3,2)=(-1,-3)$
   iv. $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=2(2,-1)-3(3,2)=(4,-2)-(9,6)=(-5,-8)$

2. Να βρεθεί το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν Α(1,6) και Β(-3,2).
   Λύση : $x_{\text{M}}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1$, $y_{\text{M}}=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{6+2}{2}=4$ άρα Μ(-1,4)

3. Αν είναι Α(3,-5) , Β(-2,4) να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος ΑΒ.
   Λύση : $\overrightarrow{\text{AB}}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(-2-3,4+5)=(-5,9)$

4. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{AB}}=(4,-3)$ και το σημείο Α(2,-4). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Β.
   Λύση : Έστω $\text{B}=(x_2,y_2)$ τότε : $\overrightarrow{\text{AB}}=(4,-3)\Leftrightarrow(x_2-x_1,y_2-y_1)=(4,-3)\Leftrightarrow$
   $(x_2-2,y_2+4)=(4,-3)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-2=4\\y_2+4=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=6\\y_2=-7\end{cases}$ άρα $\text{B}=(6,-7)$

5. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=(-3,4)$
   Λύση : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

6. Αν $\text{A}(-4,-2)$ και $\text{B}(2,-2)$, να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β.
   Λύση : $(\text{AB})=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2+4)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{36}=6$

7. Αν $\vec{\alpha}=(-5,\sqrt{5})$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{5},1)$, να εξετάσετε αν είναι παράλληλα.
   Λύση : Έχω : $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}-5 & \sqrt{5}\\ -\sqrt{5} & 1\end{vmatrix}=-5\cdot1-\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{5}\right)=-5+5=0$ άρα $\vec{\alpha}/\!/\vec{\beta}$

8. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης καθώς και η γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα x΄x, τα ακόλουθα διανύσματα :
   i. $\vec{\alpha}=(3,\sqrt{3})$ ii. $\vec{\beta}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ iii. $\vec{\gamma}=(\sqrt{2},-\sqrt{6})$
   Λύση :
   i. $\vec{\alpha}=(3,\sqrt{3})$, $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\omega=\dfrac{\pi}{6}$ ή $\omega=30^{\circ}$

ii. $\vec{\beta}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\lambda_{\vec{\beta}}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-1$ άρα $\varepsilon\phi\omega=-1 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{3\pi}{4}$ ή $\omega=135^\circ$

iii. $\vec{\gamma}=(\sqrt{2},-\sqrt{6})$ $\lambda_{\vec{\gamma}}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{6}{2}}=-\sqrt{3}$ άρα $\varepsilon\phi\omega=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{3}$ ή $\omega=120^\circ$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

9. Αν $\vec{\alpha}=(3,2)$ και $\vec{\beta}=(-1,5)$ τότε να υπολογίσετε :
   i. $3\vec{\alpha}$ ii. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ iii. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ iv. $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$.
    i. Να βρείτε τα ακόλουθα διανύσματα : α) $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ β) $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-\vec{v}$
    ii. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ αν : $2(\vec{\alpha}-\vec{x})-3\vec{\beta}=\vec{x}-\vec{\alpha}$

11. Να βρεθεί το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν Α(-1,7) και Β(3,5).

12. Στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ το Μ είναι μέσο. Αν Α(2,5) και Μ(-1,7) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(4,-2), Β(-3,8) και Γ(-5,-6). Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$.

14. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων :
    i. $\vec{\alpha}=(3,-4)$ ii. $\vec{\beta}=(-8,6)$

15. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων Α και Β σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
    i. $A(-2,7)$ και $B(4,-1)$ ii. $A(3,-5)$ και $B(3,2)$

16. Αν $\vec{\alpha}=(-\sqrt{3},1)$ και $\vec{\beta}=(-3,\sqrt{3})$, να εξετάσετε αν είναι παράλληλα.

17. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης για τα ακόλουθα διανύσματα :
    i. $\vec{\alpha}=(-4,8)$ ii. $\vec{\beta}=(-8,0)$ iii. $\vec{\gamma}=(0,10)$ iv. $\vec{\alpha}=3\vec{i}-12\vec{j}$ v. $\vec{\beta}=-2\vec{i}$ vi. $\vec{\delta}=12\vec{i}+3\vec{j}$

18. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν τα ακόλουθα διανύσματα με τον άξονα x΄x :
    i. $\vec{\alpha}=(1,\sqrt{3})$ ii. $\vec{\beta}=(\sqrt{3},1)$ iii. $\vec{\gamma}=(-\sqrt{2},\sqrt{6})$ iv. $\vec{\delta}=(\sqrt{2},-\sqrt{6})$

19. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα x΄x όταν :
    i. Α(3,0) , $B(0,-\sqrt{3})$ ii. Α(1,5) , Β(-2,5) iii. Α(3,-2) , Β(3,2) iv. Α(2,1) , $B(1,1+\sqrt{3})$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΑΞΟΝΕΣ – ΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΤΟ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

20. Έστω Oxy σύστημα συντεταγμένων και Α(-1,2) , $\vec{OB}=(3,1)$
    i. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α από τους άξονες.
    ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσης του Α ως προς το Ο καθώς και τις συντεταγμένες του Β.
    iii. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu}=3\vec{OA}-2\vec{OB}$.

21. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει :
    i. $x=3$ ii. $|x|=3$ iii. $|y|=3$ iv. $|x|>3$ v. $|x|<3$ v. $|x|=|y|$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΙΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Τα δυο διανύσματα είναι ισα, δηλαδή $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ισες δηλ. ισχύει $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

22. (Άσκηση 4 σελ. 39 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
    Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-3\lambda+2,2\lambda^2-3\lambda-2\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\lambda^2-5\lambda+6,-3\lambda^2+7\lambda-2\right)$.
    Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.
    <u>Λύση :</u>

$$\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6\\ \kappa\alpha\iota\\ 2\lambda^2-3\lambda-2=-3\lambda^2+7\lambda-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda=4\\ \kappa\alpha\iota\\ 5\lambda^2-10\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \kappa\alpha\iota\\ 5\lambda(\lambda-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \kappa\alpha\iota\\ \lambda=0,\acute{\eta},\lambda=2\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda=2.$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

23. Να βρεθούν οι τιμές του λ,μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,-2\mu)$ και $\vec{\beta}=(\mu-1,\lambda-8)$ να είναι ισα.

24. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(2\lambda^2-\lambda+3,\lambda^2-1\right)$ και $\vec{\beta}=\left(\lambda^2+2\lambda+1,\lambda+1\right)$ να είναι ισα.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(x^2+y^2,x\right)$ και $\vec{\beta}=(2xy+4,6-y)$. Να βρείτε τα x,y ώστε τα διανύσματα να είναι ισα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $\vec{\alpha}=\vec{0}$, $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, $\vec{\alpha}// x'x$, $\vec{\alpha}// y'y$

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ τότε ισχύουν :

- $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow x_1=0$ και $y_1=0$
- $\vec{\alpha}\neq\vec{0} \Leftrightarrow x_1\neq 0$ ή $y_1\neq 0$
- $\vec{\alpha}// x'x \Leftrightarrow y_1=0$
- $\vec{\alpha}// y'y \Leftrightarrow x_1=0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26. (Άσκηση 3 σελ. 39 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-4,\lambda^2-3\lambda+2\right)$, $\lambda\in\Re$. Για ποια τιμή του λ είναι :

i. $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}// x'x$

Λύση :

i. $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2-4=0\\ \kappa\alpha\iota\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2, \acute{\eta}, \lambda=-2\\ \kappa\alpha\iota\\ \lambda=1, \acute{\eta}, \lambda=2\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=2$

ii. Αφού $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=2$, τότε $\vec{\alpha}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \lambda\neq 2$

Και $\vec{\alpha}// x'x \Leftrightarrow y_1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=1, \acute{\eta}\lambda=2$

Άρα τελικά $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}// x'x$ αν $\lambda=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

27. Αν $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-4,\lambda^2+2\lambda\right)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει :

i. $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}// x'x$ iii. $\vec{\alpha}// y'y$

28. Αν $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2-5\lambda+6,\lambda^2-3\lambda+2\right)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει :

i. $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}// x'x$ iii. $\vec{\alpha}// y'y$

29. Αν $\vec{\alpha}=\left(\lambda^2+3\lambda,\lambda^2-9\right)$ να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει :

i. $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}// x'x$ iii. $\vec{\alpha}// y'y$ iv) αν $\vec{\beta}=\left(\lambda-5,3\lambda-1\right)$, τότε $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Γραμμικός συνδυασμός δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in\Re$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

30. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v}=(6,5)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων : $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$.

Λύση :

Για να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, αρκεί να βρούμε δυο αριθμούς $\kappa,\lambda\in\Re$ τέτοιοι ώστε : $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$. Όμως $\vec{v}=(6,5)$, $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$. Άρα $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow(6,5)=\kappa(1,2)+\lambda(2,-3)\Leftrightarrow(6,5)=(\kappa,2\kappa)+(2\lambda,-3\lambda)\Leftrightarrow$ $(6,5)=(\kappa+2\lambda,2\kappa-3\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+2\lambda=6\cdot(-2)\\2\kappa-3\lambda=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\kappa-4\lambda=-12\\2\kappa-3\lambda=5\end{cases}$ άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχω : $-7\lambda=-7\Leftrightarrow\lambda=1$ και αντικαθιστώντας στην 1η $\kappa+2\cdot1=6\Leftrightarrow\kappa=4$

Άρα $\vec{v}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

31. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(8,17)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων : $\vec{\beta}=(-2,1)$ και $\vec{\gamma}=(4,5)$.

32. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v}=(6,5)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων : $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$.

33. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-1,2)$.
   i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$
   ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v}=(3,2)$ ως γραμμικός συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\gamma},\vec{\delta}$

34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ και $\vec{\beta}=(y-2)\,\vec{i}+(x+6)\,\vec{j}$, με $x,y\in\Re$, για τα οποία ισχύει $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,-6)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των x,y
   ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=-10\vec{i}+4\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

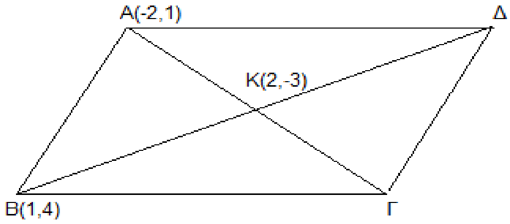
35. Δίνονται τα σημεία : $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(x+2y,x+1)$ και $\Gamma(y-3,2x-4)$ με $x,y\in\Re$ για τα οποία ισχύει : $\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Gamma}}=(-12,10)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των x,y
   ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v}=(-4,14)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\mathrm{A\Gamma}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B = (x_2, y_2)$. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Αν τα σημεία Α,Β είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Μ τότε το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

36. (Εφαρμογή 1 σελ. 35 σχολικού βιβλίου)
Αν $A(-2,1)$ και $B(1,4)$ είναι δυο κορυφές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $K(2,-3)$ το κέντρο του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.
Λύση :



Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ και $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$, επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται τότε το Κ θα είναι μέσο και του ΑΓ και του ΒΔ, έτσι έχουμε :

Κ μέσο ΑΓ άρα : $x_K = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{-2 + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -2 + x_\Gamma = 4 \Leftrightarrow x_\Gamma = 6$

$y_K = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -3 = \dfrac{1 + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 + y_\Gamma = -6 \Leftrightarrow y_\Gamma = -7$ Άρα Γ(6,-7)

Κ μέσο ΒΔ άρα : $x_K = \dfrac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{1 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 1 + x_\Delta = 4 \Leftrightarrow x_\Delta = 3$

$y_K = \dfrac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow -3 = \dfrac{4 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 4 + y_\Delta = -6 \Leftrightarrow y_\Delta = -10$ Άρα Δ(3,-10)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

37. Δίνονται τα σημεία $A(x, 2y-4)$, $B(-2x-y, 3x-y)$ και $M(y, x-1)$ με $x, y \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \Re$ ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

38. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Α(2,5) ως προς το Μ(3,1).

39. Οι τετμημένες δυο σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x - 19 = 0$. Να βρεθούν τα λ ώστε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη 3.

40. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με Α(1,2) και Β(-1,0) και Κ(0,3) το κέντρο του, να βρείτε τα Γ,Δ.

41. Το σημείο Α(4,2) ανήκει σε κύκλο με κέντρο Κ(3,5). Να βρεθεί το αντιδιαμετρικό σημείο του Α.

42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν τα σημεία Κ(2,-2), Λ(4,-4) και Μ(-1,-3) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, και ΓΑ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ

Έστω το διάνυσμα $\vec{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$. Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(2,-5), Β(-3,5) και $\vec{A\Gamma} = (5,-4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες
    i. Του διανύσματος $\vec{AB}$
    ii. Του σημείου Γ

Λύση :

i. Έχουμε $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-3-2, 5+5) = (-5,10)$

ii. Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. Έχουμε $\vec{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) \Leftrightarrow (5,-4) = (x_\Gamma - 2, y_\Gamma + 5) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_\Gamma - 2 = 5 \\ y_\Gamma + 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 7 \\ y_\Gamma = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(-3,5), Β(2,7) και $\vec{A\Gamma} = (7,-6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες
    i. Του σημείου Γ
    ii. των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$.

45. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{AB} = (5,4)$ και το σημείο Α(3,-2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Β.

46. Αν είναι Α(-2,1) , Β(3,-2) και ισχύει : $2\vec{AM} - 3\vec{BM} = \vec{0}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

47. Αν Α(1,-3) και Β(-2,1), να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu} = 2\vec{OA} - 3\vec{OB}$

48. Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(0,5). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε να ισχύει : $\vec{MA} = \frac{2}{3}\vec{MB}$.

49. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) , Β(4,1) , Γ(2,4). Να βρεθεί σημείο Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα Α,Β,Γ,Δ να είναι παραλληλόγραμμο.

50. Δίνονται τα σημεία Α(1,3) , Β(6,8) , Γ(-2,2). Να βρεθεί σημείο Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα Α,Β,Γ,Δ να είναι παραλληλόγραμμο.

51. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(2,5) , Β(4,-8) και Γ(-4,3). Να βρείτε τις συντεταγμένες :
    i. Του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,
    ii. Της κορυφής Δ.

52. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με Α(-1,3), Β(6,4) και Γ(5,-1). Να βρείτε τις συντεταγμένες :
    i. του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
    ii. τις κορυφής Δ

53. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με Α(1,5) και Β(7,3). Επίσης για το σημείο τομής Μ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ισχύει ότι : $\vec{AM} = (1,-4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες :
    i. Του σημείου Μ
    ii. Των κορυφών Γ και Δ.

54. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με Β(3,5), Γ(5,-1) και Δ(-1,-1). Να βρείτε:
    i. Τις συντεταγμένες της κορυφής Α
    ii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{AΓ}$
    iii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{AΓ} - \frac{7}{2}\vec{AΔ}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8</u> : ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ 2 ΣΗΜΕΙΩΝ

- Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x_\alpha, y_\alpha)$. Το μετρό του διανύσματος είναι : $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}$.
- Έστω δυο σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$. Όπως είδαμε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Συνεπώς το μετρό του διανύσματος $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ θα είναι $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Αυτή όμως είναι στην ουσία και η απόσταση των σημείων Α και Β $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4,-3)$ και $\vec{\beta} = (x,7)$ με $x \in \Re$. Να βρείτε :
    i. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
    ii. Τον αριθμό x, ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$.

<u>Λύση :</u>

i. $\vec{\alpha} = (4,-3)$, έχω $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

ii. $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 2(4,-3) + (x,7) \Leftrightarrow \vec{\gamma} = (8,-6) + (x,7) \Leftrightarrow \vec{\gamma} = (x+8,1)$

Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+8)^2 + 1^1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x+8)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 16x + 63 = 0$ έχω $\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 63 = 256 - 252 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-16 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -9 \end{cases}$$

56. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,6).
   i. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από το Β.
   ii. Να βρείτε σημείο Γ που ανήκει στον άξονα x΄x, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με $(\Gamma\text{A})=(\Gamma\text{B})$

<u>Λύση :</u>

i. $(\text{AB})=\sqrt{(x_{\text{B}}-x_{\text{A}})^2+(y_{\text{B}}-y_{\text{A}})^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

ii. Το $\Gamma\in x'x\Leftrightarrow\Gamma(x,0)$. Επίσης $(\Gamma\text{A})=(\Gamma\text{B})\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(6-0)^2}\Leftrightarrow$

$(1-x)^2+4=[-(1+x)]^2+36\Leftrightarrow(1-x)^2+4=(1+x)^2+36\Leftrightarrow$

$1-2x+x^2+4=1+2x+x^2+36\Leftrightarrow-4x=32\Leftrightarrow x=-8$ άρα $\Gamma(-8,0)$

<u>**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**</u>**:**

57. Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μοναδιαίο.

58. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,-2)$, να υπολογιστούν τα : i. $\left|-2\vec{\alpha}\right|$ ii. $\left|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|$

59. Δίνονται τα σημεία Α(x,-2), Β(16,x+2) και Γ(5,x), με $x\in\Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\Re$ ισχύει ότι : $\left|2\vec{\text{AB}}+3\vec{\text{B}\Gamma}\right|=\left|\vec{\text{A}\Gamma}\right|$

60. Δίνονται τα σημεία $\text{A}(\lambda,1)$ και $\text{B}(-1,\lambda+3)$ με $\lambda\in\Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι 5.

61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(6,-8)$ και $\vec{\beta}=(x,2x+15)$ με $x\in\Re$. Να βρείτε :
   i. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
   ii. Τον αριθμό x, ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{5}$.

62. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος : $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-4,8\right)$.

63. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος : $\vec{\alpha}=\left(-3,\dfrac{|\vec{\alpha}|+3}{2}\right)$.

64. Αν $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο στον x΄x, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος : $\vec{\alpha}=(4,-2)-|\vec{\alpha}|(1,-1)$.

65. Αν $\vec{\alpha}=(\lambda,\lambda+1)$, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $\left|-3\vec{\alpha}\right|=15$.

66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του. Αν Α(-1,3) , Β(-2,-3) και Γ(2,4) , να βρείτε
   i. τις συντεταγμένες του $\vec{\text{AM}}$ ii. το $\left|\vec{\text{AM}}\right|$

67. Να βρεθεί ένα σημείο Μ του άξονα x’x το οποίο απέχει από τα σημεία Α(1,2) και Β(3,-4).

68. Δίνονται τα σημεία Β(1,2) και Γ(-1,6). Να βρείτε το σημείο Α του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με (ΑΒ)=(ΑΓ).

69. Δίνονται τα σημεία Α(3,8) και Β(9,4). Να βρείτε το σημείο Γ του άξονα x΄x, το οποίο ισαπέχει από τα Α,Β.

70. Δίνονται το σημείο Α(3,-1). Να βρείτε το σημείο Β του άξονα y΄y, το οποίο απέχει από το Α απόσταση 5.

71. Δίνονται τα σημεία Α(-2,5) και Β(-10,-3). Να βρείτε :
    i. σημείο του άξονα x΄x που να ισαπέχει από τα Α,Β .
    ii. σημείο της ευθείας (ε): y=-1 που να ισαπέχει από τα Α,Β.

72. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,0) , Β(-1,1) και Γ(0,-1). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

73. Δίνονται τα σημεία Β(1,2) και Γ(-1,6), να βρείτε σημείο του άξονα x΄x τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή Α.

74. Δίνονται τα σημεία Α(2,2), Β(0,-1), Γ(-5,-2) και Δ(1,7). Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

75. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,0), Β(5,2) και Γ(1,2). Αν για τα Δ, Ε ισχύει $\vec{\mathrm{A\Delta}} = -3\vec{\mathrm{\Delta\Gamma}}$ και $\vec{\mathrm{BE}} = -3\vec{\mathrm{E\Gamma}}$ να δείξετε ότι :
    i. ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο
    ii. $\vec{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{2}\vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{AE}}$.

76. Η αρχή Ο(0,0) ενός συστήματος συντεταγμένων παριστάνει ένα σταθμό εκπομπής σημάτων, ενώ τα σημεία Α(3,2) και Β(5,1) παριστάνουν θέσεις δυο πλοίων. Η θέση ενός τρίτου πλοίου παριστάνεται από το σημείο Γ για το οποίο ισχύει : $\vec{\mathrm{O\Gamma}} = 2\vec{\mathrm{OA}} - \vec{\mathrm{OB}}$
    i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ
    ii. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής (μέγιστη απόσταση που μπορεί να φτάσει το σήμα) είναι 5 μονάδες, να βρείτε με ποια από τα 3 πλοία μπορεί να επικοινωνήσει ο σταθμός. (Θέμα εξετάσεων)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ **(1^{η} συνθήκη παραλληλίας)**
- Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Ορίζουσα των διανυσμάτων ονομάζουμε τον αριθμό : $\det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, δηλαδή $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0$. **(2^{η} συνθήκη παραλληλίας)**
- Τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{\mathrm{AB}} // \vec{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}\right) = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

77. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \Re$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 4)$ και $\vec{\beta} = (9, x)$ είναι παράλληλα.

Λύση : $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 4 \\ 9 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$

78. (Άσκηση 5 σελ. 39 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, x)$ είναι ομόρροπα.

Λύση : $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

- Για $x = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (4,2) = 2(2,1) = 2\vec{\alpha}$, δηλ $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$
- Για $x = -2$ τότε $\vec{\alpha} = (-2,1)$, $\vec{\beta} = (4,-2) = -2(-2,1) = -2\vec{\alpha}$, δηλ $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.
  Άρα $x = 2$.

79. (Εφαρμογή σελ. 38 σχολικό βιβλίο)

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \Re$ για τις οποίες τα σημεία $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}\left(-\mu^2, 3\right)$ και $\Gamma\left(-5\mu, 9\right)$ είναι συνευθειακα.

Λύση : Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{\mathrm{AB}} // \vec{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}\right) = 0$

Έχω $\vec{\mathrm{AB}} = \left(-\mu^2 - 1, 3 - 0\right) = \left(-\mu^2 - 1, 3\right)$ και $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \left(-5\mu - 1, 9 - 0\right) = \left(-5\mu - 1, 9\right)$

Τότε $\vec{\mathrm{AB}} // \vec{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu^2 - 1 & 3 \\ -5\mu - 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$9(-\mu^2 - 1) - 3(-5\mu - 1) = 0 \Leftrightarrow -9\mu^2 - 9 + 15\mu + 3 = 0 \Leftrightarrow -9\mu^2 + 15\mu - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$3\mu^2 - 5\mu + 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = \frac{2}{3}$

80. (Άσκηση 6 σελ. 39 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Αν $\vec{u}=(3,4)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικο με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

Λύση : Έστω $\vec{v}$ το διάνυσμα που ψάχνω, τότε $\vec{v}//\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}=\lambda\vec{u}$ (1)

Επίσης $|\vec{v}|=2|\vec{u}| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |\lambda\vec{u}|=2|\vec{u}| \Leftrightarrow |\lambda|\cdot|\vec{u}|=2|\vec{u}| \xLeftrightarrow{|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5\neq 0} |\lambda|=2 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$

- Για $\lambda=2$ τότε (1) $\vec{v}=2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}=2(3,4) \Leftrightarrow \vec{v}=(6,8)$
- Για $\lambda=-2$ τότε (1) $\vec{v}=-2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}=-2(3,4) \Leftrightarrow \vec{v}=(-6,-8)$

__ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ__:

81. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλα :
i. $\vec{\alpha}=(0,2)$ και $\vec{\beta}=(-3,4)$ ii. $\vec{\alpha}=(-6,8)$ και $\vec{\beta}=(9,-12)$

82. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε τα σημεία Α(-3,1) , Β(λ,3) και Γ(-5,1-λ) , να είναι κορυφές τριγώνου. (Υπόδειξη : αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου, αρκεί να δείξουμε ότι τα Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά, δηλ. $\det\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)\neq 0$)

83. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x\in\Re$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,3)$ και $\vec{\beta}=(4,x)$ είναι παράλληλα.

84. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-6)$, $\vec{\beta}=(-4,8)$ και $\vec{\gamma}=(-2,1)$.
   i. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.
   ii. Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ δεν είναι παράλληλα.
   iii. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v}=(\lambda,\lambda-6)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\alpha}+4\vec{\gamma}$.

85. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x\in\Re$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,-1)$ και $\vec{\beta}=(-9,x)$ είναι αντίρροπα.

86. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$, $\vec{\beta}=(-2,5)$ και $\vec{\gamma}=(0,-1)$.
   i. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.
   ii. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε 2 συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (δηλ. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$)

87. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α(-3,-1) , Β(-1,3) και Γ(2,9) είναι συνευθειακά.

88. Δίνονται τα σημεία Α(1,-2) , Β(3,4) και Γ(μ,4μ-3). Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu\in\Re$ τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

89. Δίνονται τα σημεία Α(-3,-1) , Β(-5,-3) , Γ(-4,7) και Δ(-2,3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται. (δηλ. ότι τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι παράλληλα)

90. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \Re$ για τις οποίες τα σημεία Α(1,x+3) , Β(x,8) και Γ(-4,-10) είναι συνευθειακά

91. Αν $\vec{\alpha} = (3,-2)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι αντίρροπο προς το $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από αυτό.

92. Αν $\vec{\alpha} = (-5,8)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι ομόρροπο προς το $\vec{\alpha}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.

93. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\alpha} = (-3,4)$.

94. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-6,8)$. Να βρεθεί :

i. το μετρό του $\vec{\alpha}$

ii. ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με μετρό τριπλάσιο από το $\vec{\alpha}$.

95. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2,1)$ και $\vec{\beta} = (-8,4-2\lambda)$.

i. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Για λ=5 να βρείτε διάνυσμα $\vec{\nu}$ που να είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μετρό διπλάσιο του $\vec{\beta}$.

96. Δίνονται τα σημεία Α(0,1) , Β(-2,0) και Γ(1,3).

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

97. Δίνονται τα σημεία Α(λ-1,-2) , Β(-1,0) και Γ(λ-3,2λ).

i. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε τα σημεία Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Για λ=-1, να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

98. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,2) , Β(7,0) και Γ(1,4). Αν Δ είναι το μέσον της διαμέσου ΑΜ και για το σημείο Ε ισχύει $2\vec{AE} = \vec{E\Gamma}$, τότε :

i. να βρείτε τα σημεία Δ, Ε

ii. να δείξετε ότι τα σημεία Β,Δ,Ε είναι συνευθειακά .

99. Δίνονται τα σημεία Α(κ-3,-2), Β(7-κ,κ) και Γ(κ-6,-11), με $\kappa \in \Re$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \Re$

i. Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι παράλληλο στον άξονα y΄y.

ii. Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

100. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=(\kappa^2+2\kappa+5,3\lambda-\mu^2)$ και $\vec{\beta}=(4\lambda-\lambda^2,15+6\kappa\mu)$, με $\kappa,\lambda,\mu\in\Re$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ισα, να βρείτε :
   i. Τους αριθμούς κ,λ,μ
   ii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
   iii. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$.

101. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις :
$3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=(-2,9)$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=(10,-5)$
   i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$
   ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(4,7)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$
   iii. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\lambda,6-\lambda)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

102. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(1,3) , Β(-5,1) και $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=(2,-8)$. Να βρείτε :
   i. Τις συντεταγμένες του Γ
   ii. Τις συντεταγμένες των μέσων Μ και Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα
   iii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\mathrm{MN}}$

103. Δίνεται παραλληλόγραμμο με Α(3,4), Β(8,5) και Γ(7,2).
   i. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
   ii. Να βρείτε σημείο Ε του y΄y , ώστε $\vec{\mathrm{AE}}//\vec{\mathrm{B\Delta}}$
   iii. Να βρείτε σημείο Ζ του x΄x , ώστε $\vec{\mathrm{BZ}}//\vec{\mathrm{A\Gamma}}$
   iv. Αν Μ είναι το μέσο του ΕΖ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ – ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ x΄x

- Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$. Με αρχή την αρχή των αξόνων Ο παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$. Γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x΄x ορίζουμε τη γωνία που διαγράφει ο ημιάξονας x΄x μέχρι να συμπέσει με την ημιευεια ΟΑ. Αν η γωνία αυτή είναι η $\hat{\phi}$ τότε ισχύει : $0\le\hat{\phi}\le 2\pi$.

- Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$. Αν $x_1\neq 0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος ορίζεται ο αριθμός $\lambda=\frac{y_1}{x_1}=\varepsilon\phi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x΄x.

- Αν $x_1=0$ τότε δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης και το διάνυσμα είναι κατακόρυφο (παράλληλο στον y΄y) δηλ. $\vec{\alpha}//y'y\Leftrightarrow x_1=0$.

- Αν $y_1=0$ τότε και λ=0 οπότε το διάνυσμα είναι οριζόντιο (παράλληλο στον x΄x) δηλ. $\vec{\alpha}//x'x\Leftrightarrow y_1=0$.

- Αν δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα τότε ισχύει $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$. (3η συνθήκη παραλληλίας)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

104. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\kappa+2,\kappa^2-2\kappa\right)$, με $\kappa\in\Re$ και $\vec{\beta}=(-1,-4)$.

i. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$

ii. Αν $\lambda_{\vec{\alpha}}=3$ να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\Re$.

iii. Για $\kappa=-1$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

Λύση :

i. $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-1}=4$

ii. Έχω $\lambda_{\vec{\alpha}}=3\Leftrightarrow\frac{\kappa^2-2\kappa}{\kappa+2}=3\Leftrightarrow\kappa^2-2\kappa=3\kappa+6\Leftrightarrow\kappa^2-5\kappa-6=0\Leftrightarrow\kappa=6$ ή $\kappa=-1$.

iii. Για $\kappa=-1$, $\vec{\alpha}=\left(-1+2,(-1)^2-2(-1)\right)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(1,3)$

$\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=3(1,3)+2(-1,-4)\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(3,9)+(-2,-8)\Leftrightarrow\vec{\gamma}=(1,1)$

Για να βρω τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x, αρκεί να βρω τον συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{\gamma}$. Δηλ $\lambda_{\vec{\gamma}}=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1$ άρα $\varepsilon\phi\omega=1\Leftrightarrow\omega=45^\circ$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

105. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-3,-2)$. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v}=3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ καθώς και η γωνία που σχηματίζει με τον x΄x.

106. Δίνονται τα σημεία Α(μ-3,2) και Β(3μ,μ-3). Να βρείτε το $\mu \in \Re$ ώστε το $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

107. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\mu,\mu+2)$, με $\mu \in \Re^*$, και $\vec{\beta}=(6,8)$.

   i. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$

   ii. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{2}$, να βρείτε :

   Α. τον αριθμό μ

   Β. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x

   Γ. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}=-7\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x

108. Δίνονται τα σημεία Α(μ-5,2) και Β(3μ,μ). Να βρείτε το $\mu \in \Re$ ώστε το $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{4\pi}{3}$.

109. Δίνονται τα σημεία Α(μ-1,2) και Β(2,3μ). Να βρείτε το $\mu \in \Re$ ώστε το $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

110. Δίνονται τα σημεία Α(3x,y) και Β(4x+3y,2y). Να βρείτε το $x, y \in \Re$ ώστε το $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135° και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$

111. Έστω ότι στο σύστημα αναφοράς Oxy είναι Α(x-y,3y) και $\vec{OB}=(2x-y, x-y)$, όπου $x, y \in \Re$. Να βρείτε τα $x, y \in \Re$ ώστε το $\vec{OA}$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 315° και να είναι $\left|\vec{AB}\right|=4$.

112. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=\left(3,-2-\left|\vec{\beta}\right|\right)$ και $\vec{\beta}=\left(4-\left|\vec{\alpha}\right|,\sqrt{3}\right)$.

   i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

   ii. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

   iii. Αν $\vec{\gamma}=(\mu,2-\mu)$, να βρείτε το $\mu \in \Re$ ώστε $\vec{\gamma}\,//\,\vec{\alpha}$.

113. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa,\mu+4)$ και $\vec{\beta}=(\mu,\kappa-9)$ με $\kappa,\mu\in\Re^*$, έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -3 αντίστοιχα. Να βρείτε :

i. Τις τιμές των κ,μ

ii. Τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

114. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,\lambda-5)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-3,6)$, με $\lambda\in\Re$, για τα οποία ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{5}$.

i. Να βρείτε τον αριθμό λ

ii. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x.

iii. Να βρείτε το $\kappa\in\Re$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\kappa,\kappa-6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 18605

Δίνονται τα διανύσματα: $\overrightarrow{OA}$=2$\vec{i}$+4$\vec{j}$,$\overrightarrow{OB}$=3$\vec{i}$+$\vec{j}$,$\overrightarrow{O\Gamma}$=5$\vec{i}$-5$\vec{j}$,όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων xx’ και yy’ αντίστοιχα.

Α)Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ (Μονάδες:12)

Β)Να εξετάσετε αν τα Α,Β,Γ μπορούν να είναι κορυφές τριγώνου (Μονάδες:13)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 20148

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{\beta}=2\vec{i}-5\vec{j}$ και $\vec{\gamma}=(7,3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΙΔΙΚΟΣ : 20061

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεί $\mathrm{A}(1,1)$, $\Gamma(4,3)$, $\Delta(2,3)$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β. *(Μονάδες 16)*

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ :20055

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1,3)$, $B(\alpha,4)$ και $\Gamma(-4,5\alpha+4)$, $\alpha\in R$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα $A,\ B,\ \Gamma$ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 20071

Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2\alpha,4\alpha-2)$ και $B(5\alpha+1,-\alpha)$, $\alpha\in Z$

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}|=10$.
(Μονάδες 12)

β) Έστω $\alpha=2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ : 22518

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$
(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 ΚΩΔΙΚΟΣ : 22561

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία Ε,Ζ στην ΑΔ και στη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ (Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$. (Μονάδες 12)

γ) Τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακα. (Μονάδες 5)

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

20. Τι καλούμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$; (σελ. 41 σχολικό)

Απάντηση :

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\phi}$, όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Προσοχή : Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ είναι αριθμός και όχι διάνυσμα.

ΘΥΜΗΣΟΥ ! ! !

1^{Ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\sigma\upsilon\nu 0^\circ=1$

$\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 60^\circ=\frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 90^\circ=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$

2^{Ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$\sigma\upsilon\nu 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 120^\circ=-\frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

21. Ποιες είναι οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$; (σελ. 41 σχολικό)

Απάντηση :

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$. Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\,\text{συν}0=|\alpha|^2$. Επομένως $\boxed{\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2}$.

22. Ποια είναι η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου; (σελ. 42 σχολικό)

Απάντηση :

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

Δηλαδή:

"Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους".

23. Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου :

1) $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\ \lambda\in\mathbf{R}$

2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)

3) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\nparallel y'y)$

(σελ. 43 σχολικό)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Πράγματι, αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

1) $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα, $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

2) $$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})&=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\&=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

3) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\dfrac{y_1}{x_1}\dfrac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$

24. Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων (σελ. 43 σχολικό)

Απάντηση :

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$ και επομένως, $\boxed{\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}}$.

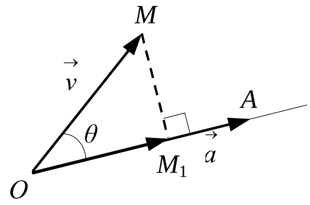
Είναι όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

Επομένως, $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

25. Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα (σελ. 45 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. Δηλαδή, $\overrightarrow{OM_1} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O.

Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}) = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M} = \vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{OM_1} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

Επομένως: $\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ – ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν γνωρίζουμε τα μέτρα δυο διανυσμάτων $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ και τη μεταξύ τους γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε : το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. Επίσης χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να υπολογίσουμε αντίστοιχα και άλλα εσωτερικά γινόμενα.

Αν μας δίνονται τα διανύσματα με συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135°$. Να υπολογισθούν το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u> $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 135° \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$.

Να βρείτε :

i. Το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
ii. Το $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$
iii. Το $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$
iv. Το $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta})$

Λύση :

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

ii. $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2 \overset{\substack{\text{Ιδιότητα}\\ \vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2}}{=\!=\!=\!=} |\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2=\sqrt{2}^2+(2\sqrt{2})^2=2+8=10$

iii. $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2\cdot2\sqrt{3}+|\vec{\beta}|^2=2+4\sqrt{3}+8=10+4\sqrt{3}$

iv. $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta})=8\vec{\alpha}^2-10\vec{\alpha}\vec{\beta}+12\vec{\alpha}\vec{\beta}-15\vec{\beta}^2=8|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-15|\vec{\beta}|^2=$

$=8\cdot2+2\cdot2\sqrt{3}-15\cdot8=4\sqrt{3}-104$

3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(3,-6)$

Λύση : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2=2\cdot3+(-3)\cdot(-6)=6+18=24$

4. (Άσκηση 1 σελ. 47 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,5)$, τότε

i. Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
ii. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa,\lambda\in\Re$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ισο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

Λύση :

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1\cdot2+3\cdot5=13$

$(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})=-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-6\cdot13=-78$

$(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=3|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2\overset{*}{=}$

$3\sqrt{10}^2-2\cdot13-\sqrt{29}^2=30-26-29=-25$

$*|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$ (Θυμήσου αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$)

ii. Έχω $\vec{u}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow 2\kappa+5\lambda=0$ Επειδή $\vec{u}\cdot\vec{\beta}=0 \overset{\text{Ιδιότητα}}{\Longleftrightarrow} \vec{u}\perp\vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 120°$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

6. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 6$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60°$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

7. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 7$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

8. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, με $|\vec{\alpha}| = 9, |\vec{\beta}| = 4$ να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 150°$. Να βρείτε :
   i. Το $|\vec{\alpha}|$ ii. Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

10. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογισθούν τα εσωτερικά γινόμενα :
   i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ iii. $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$ iv. $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

11. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :
   i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ iii. $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

12. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις : ‘
   i) $\vec{\alpha} = (3,5)$ και $\vec{\beta} = (4,2)$ ii) $\vec{\alpha} = (2,-3)$ και $\vec{\beta} = (1,5)$ iii) $\vec{\alpha} = (-4,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-6)$

13. Αν $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (1,3)$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :
   i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii. $(-\vec{\alpha}) \cdot (2\vec{\beta})$ iii. $\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)$

14. Δίνονται τα σημεία Α(3,1) , Β(2,-5) , Γ(-4,3) και Δ(-1,-2). Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-8,1)$ με $\lambda\in\Re$, για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$. Να βρείτε :
    i. Το λ   ii. Το εσωτερικό γινόμενο $\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με Α(3,5) , Β(x,x-4) και Γ(-5,11), όπου $x\in\Re$, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=-32$.
    i. Να βρείτε το x
    ii. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma N}$

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Αν ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=28$, να βρείτε :
    i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
    ii. Το $\left|\vec{\beta}\right|$
    iii. Το εσωτερικό γινόμενο $(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$

18. Έστω ΑΔ το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρά α=4. Να υπολογιστούν οι αριθμοί :
    i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ ii. $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\left|\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|$

Για να υπολογίσουμε το μέτρο οποιουδήποτε διανύσματος της μορφής : $\vec{\nu}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, υπολογίζουμε πρώτα το $|\vec{\nu}|^2=\vec{\nu}^2=\left(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\right)^2=\ldots$ και μετά το $|\vec{\nu}|$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3,\left|\vec{\beta}\right|=4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u> $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=3\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=12\frac{1}{2}=6$

$|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-4\cdot6+4\left|\vec{\beta}\right|^2=9-24+4\cdot16=49$ Άρα $|\vec{\gamma}|^2=49\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=7$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}, |\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

22. Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=1$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

23. Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

24. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

25. Αν $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\alpha}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\nu}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ 2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για να υπολογίσουμε τη γωνία οποιονδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, χρησιμοποιούμε τον τύπο : $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$, $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$. Αν τα διανύσματα μου δίνονται με συντεταγμένες δηλ. $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε : $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$. Να βρεθεί η γωνία θ των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u> $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=$

$=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, δηλ. $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$ ή $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^\circ$

27. (Άσκηση 7 σελ. 47 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

<u>Λύση :</u>

Έχω $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Επίσης : $\sigma\upsilon\nu(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ (1)

Πρέπει να υπολογίσω το $\vec{u} \cdot \vec{v}$, το $|\vec{u}|$ και το $|\vec{v}|$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4|\vec{\beta}|^2 = 2 - 1 - 4 = -3$
- $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16|\vec{\beta}|^2 = 4 - 8 + 16 = 12$

Άρα $|\vec{u}|^2 = 12 \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 2\sqrt{3}$

- $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + |\vec{\beta}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$

Άρα $|\vec{v}|^2 = 3 \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{3}$

Άρα η (1) $\sigma\upsilon\nu(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$, δηλ. $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ ή $(\vec{u}, \vec{v}) = 120°$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$. Να βρεθεί η γωνία θ των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

29. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = \frac{1}{7}\vec{i} + \vec{j}$. Να βρεθεί η γωνία θ των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, όπου το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $120°$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$.

31. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και τα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{u} = -7\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

32. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120°$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

33. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(4,3), Β(1,2), Γ(6,7). Να υπολογιστεί η γωνία Α του τριγώνου.

34. Αν Α(4,1) Β(8,2) και Γ(1,3) , να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι αμβλεία.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για 2 διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

35. (Άσκηση 3 σελ. 47 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $\vec{\alpha} = (1,0)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$, να βρείτε τον $\lambda \in \Re$, ώστε

i. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

ii. Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

<u>Λύση :</u>

i. $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} 1 + \lambda \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

* $|\vec{\alpha}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$

ii. $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} + \lambda\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} + \lambda|\vec{\beta}|^2 = 0 \overset{**}{\Leftrightarrow} 1 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

** $|\vec{\beta}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

36. (Άσκηση 5 σελ. 47 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa \in \Re$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

<u>Λύση :</u>

Έχω $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 2 \cdot 3 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\kappa\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa\vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha}\vec{\beta} - \kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$3\kappa|\vec{\alpha}|^2 + 6 \cdot 3 - 3\kappa - 2|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow 12\kappa + 18 - 3\kappa - 18 = 0 \Leftrightarrow 9\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

37. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε τα παρακάτω διανύσματα να είναι κάθετα :

i. $\vec{\alpha} = (3,-5)$ και $\vec{\beta} = (10, x)$ ii. $\vec{\alpha} = (2x,1)$ και $\vec{\beta} = (4x^2,-1)$

iii. $\vec{\alpha} = (x,4)$ και $\vec{\beta} = (2,-1)$ iv. $\vec{\alpha} = (3x,-3)$ και $\vec{\beta} = (x,4)$

38. Να δείξετε ότι για κάθε λ$\in \Re$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 1)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 2,-1)$ δεν είναι κάθετα.

39. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,3)$ και $\vec{\beta}=(-6,\lambda+2)$, με $\lambda\in\Re$. Να βρείτε :
    i. Τον αριθμό λ ii. Για ποια τιμή του $\mu\in\Re$ είναι $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp(\mu\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

40. Δίνονται δυο κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{6}$. Να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\vec{v}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{w}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

41. Δίνονται δυο κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\beta}|=\sqrt{15}$ και $(\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})=5$
    i. Να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$
    ii. Να αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

42. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(-3,4-\lambda)$, με $\lambda\in\Re$, για τα οποία ισχύει : $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(13\vec{\alpha}+3\vec{\beta})$
    i. Να βρείτε το λ
    ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu\in\Re$, το διάνυσμα $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta}=(\mu,\mu-8)$

43. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,-3)$ και $\vec{\beta}=(6,x+2)$ είναι κάθετα
    i. Να βρείτε το $x\in\Re$
    ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in\Re$, το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\delta}=(1,5)$.

44. Δίνονται δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.
    i. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$
    ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in\Re$ τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{w}=\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

45. Αν $|\vec{\alpha}|=3$, και $|\vec{\beta}|=6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

46. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\vec{v}=(1,2)$ και έχει μέτρο $\sqrt{5}$.

47. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου. Αν είναι $\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\perp(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$

48. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(0,0), Β(α,β), Γ(α+2,β) και Δ(2,0). Να αποδειχθεί ότι :
   i. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο,
   ii. Αν ΒΓ=2ΑΒ και Μ είναι το μέσο της ΑΔ, τότε $\overrightarrow{\mathrm{MB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}$

49. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(1,2), Β(3,4), Γ(5,4) και Δ(3,-2). Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ, παίρνουμε τμήμα ΓΕ, έτσι ώστε ΒΓ=2ΓΕ. Αν Κ, Λ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}} \perp \overrightarrow{\mathrm{NE}}$.

50. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{\mathrm{A}} = 90°)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Μ, Ν των ΔΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{\mathrm{BN}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

51. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. Αν $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, να αποδειχθεί ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίση με $\dfrac{\pi}{3}$.

52. Αν $\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 6$ και $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}| = 2\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι :
   i. Τα σημεία Α, Β ,Γ είναι συνευθειακά
   ii. Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία Α και Β
   iii. $\mathrm{A\hat{P}B} = 90°$
   iv. το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. (Θέμα εξετάσεων)

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει μια σχέση της μορφής $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$, με $\kappa, \lambda, \mu \in \Re$ και γνωρίζουμε τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\gamma}|$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε καθένα από τα εσωτερικά γινόμενα : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$. Αν π.χ θέλουμε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τότε :

$\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = -\mu\vec{\gamma}$ μετά υψώνουμε και τα 2 μέλη στο τετράγωνο $(\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})^2 = (-\mu\vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow$ ... και μετά από πράξεις λύνω ως προς $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

53. (Άσκηση 4 σελ. 49 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = 3$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

<u>Λύση :</u>

- Για το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ έχω : $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

  άρα : $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (-\vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow 4|\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = |\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow$

  $16 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 1 = 9 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = -8 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2$

- Για το $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ έχω : $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha}$

άρα : $(\vec{\beta}+\vec{\gamma})^2=(-2\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \left|\vec{\beta}\right|^2+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+\left|\vec{\gamma}\right|^2=4\left|\vec{\alpha}\right|^2 \Leftrightarrow$

$1+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+9=16 \Leftrightarrow 2\vec{\beta}\vec{\gamma}=6 \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma}=3$

- Για το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ έχω : $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$

άρα : $(2\vec{\alpha}+\vec{\gamma})^2=(-\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4\left|\vec{\alpha}\right|^2+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\left|\vec{\gamma}\right|^2=\left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$

$16+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}+9=1 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\gamma}=-24 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}=-6$

Άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-2+3-6=-5$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

54. Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=3$, $\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+4\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε :
   i. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
   ii. Να υπολογίσετε τη γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

55. Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|=1$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}=2$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$.

56. Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε :
   i. Το $\left|\vec{\gamma}\right|$ ii. Το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-7$

57. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|=2$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)$ και $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}\right)$.

58. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $\left|\vec{\alpha}\right|=3$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$
   i. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
   ii. Να βρείτε το $\left|\vec{\gamma}\right|$
   iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\vec{\alpha}+x\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}-x\vec{\beta})=17$.

59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=3$, $\left|\vec{\gamma}\right|=2\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$. Να υπολογίσετε :
   i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
   ii. Την τιμή της παράστασης : $A=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

60. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, για το οποίο είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{\gamma}$.
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$=-6

61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{2}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$.

i. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ ii. $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$ iii. $\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6</u> : ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

62. (Άσκηση 2 σελ. 48 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Να αποδείξετε ότι :

i. $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$

ii. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\dfrac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$

<u>Λύση :</u>

i. Θα ξεκινήσω από το 1^{o} μέλος και θα προσπαθήσω να φτάσω στο 2^{o} :
$|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2+\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=$
$=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$

ii. Θα ξεκινήσω από το 2^{o} μέλος και θα προσπαθήσω να φτάσω στο 1^{o} :
$\dfrac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\dfrac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2=\dfrac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v})^2-\dfrac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})^2=\dfrac{1}{4}(\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2)-\dfrac{1}{4}(\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2)=$
$\dfrac{1}{4}\vec{u}^2+\dfrac{1}{2}\vec{u}\vec{v}+\dfrac{1}{4}\vec{v}^2-\dfrac{1}{4}\vec{u}^2+\dfrac{1}{2}\vec{u}\vec{v}-\dfrac{1}{4}\vec{v}^2=\dfrac{1}{2}\vec{u}\vec{v}+\dfrac{1}{2}\vec{u}\vec{v}=\boldsymbol{\vec{u}\vec{v}}$.

63. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, να αποδειχτεί ότι:

i. $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ii. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\leq\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

<u>Λύση :</u>

i. Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε:

$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta\big|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\text{συν}\theta|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Η ισότητα ισχύει μόνο, αν $\sigma\upsilon\nu\theta=\pm1$, δηλαδή, μόνο αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

ii. Επίσης, έχουμε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2\leq(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

Η ισότητα ισχύει, όπως και προηγουμένως, μόνο όταν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

64. Να αποδείξετε ότι : $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2$

65. Να αποδείξετε ότι : $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2-\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

66. Να αποδείξετε ότι : $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2\geq 4\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$

67. Αν ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$, να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{\alpha}\right|$

68. Αν ισχύει ότι $\left|\vec{\beta}\right|=2\left|\vec{\alpha}\right|$ και $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|4\vec{\beta}-5\vec{\alpha}\right|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

69. Αν ισχύει ότι $\left|\vec{\beta}\right|=3\left|\vec{\alpha}\right|$ και $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

70. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

71. Αν $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$ τότε να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

72. Έστω x,y δυο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $x^2+y^2=25$. Να αποδειχτεί ότι $\left|6x-8y\right|\leq 50$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ή $\left|\vec{\alpha}\right|$, $\left|\vec{\beta}\right|$.

Προσδιορισμός διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ή $\left|\vec{\alpha}\right|$, $\left|\vec{\beta}\right|$ μέσα από σχέσεις με μέτρα, καθετότητες και συνθήκες παραλληλίας.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73. Έστω $\vec{\alpha}=(-2,4)$ και διάνυσμα $\vec{\delta}$ για το οποίο ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=-40$ και $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\delta}$. Να βρείτε το $\vec{\delta}$.

Λύση :

Έστω $\vec{\delta}=(x,y)$. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=-40\Leftrightarrow -2x+4y=-40\Leftrightarrow -x+2y=-20$ (1)

$\vec{\alpha}\,//\,\vec{\delta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\delta})=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-2 & 4\\ x & y\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -2y-4x=0\Leftrightarrow 2y=-4x\Leftrightarrow y=-2x$ (2)

Η (1) λόγο της (2) γίνεται $-x+2y=-20\Leftrightarrow -x+2(-2x)=-20\Leftrightarrow -5x=-20\Leftrightarrow x=4$ και (2) : $y=-8$. Άρα $\vec{\delta}=(4,-8)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

74. Έστω $\vec{\alpha} = (-1,2)$.

  i. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ ώστε $\vec{\nu} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\nu}| = 5$.

  ii. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ ώστε $\vec{u} // \vec{\alpha}$ και $\vec{a} \cdot \vec{u} = \sqrt{45}$.

75. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (1,-2)$ και $\vec{\gamma} = (4,-3)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\gamma}$ και έχουν μέτρο 5.

76. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$ και $\vec{\gamma} = (-1,0)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ώστε να είναι $|\vec{\nu}| = 10$ και $\vec{\nu} \perp \vec{\gamma}$.

77. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$.

78. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

79. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{5}$ να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$.

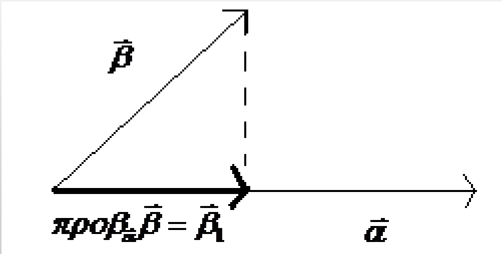
80. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και ότι για κάθε $\kappa, \lambda \in \Re$ ισχύει : $(3\kappa\vec{\alpha} + 4\lambda\vec{\beta}) \perp (\lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta})$

  i. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

  ii. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8</u> : ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Επειδή η προβολή ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ σε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$, έχουμε : $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$ (1) . Οπότε , για να βρούμε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ αρκεί να βρούμε το λ, που προσδιορίζεται από την ισότητα : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}$.

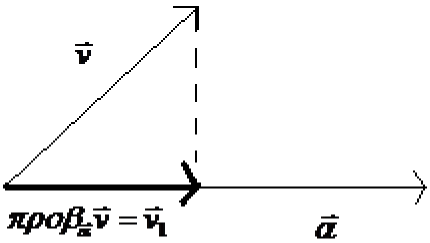


<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

81. (Εφαρμογή 1 σελ. 46 σχολικού βιβλίου)

Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$, αν $|\vec{\alpha}| = \dfrac{1}{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ είναι ιση με $\phi = \dfrac{\pi}{6}$.

<u>Λύση :</u>



1^{ον} Έστω $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \vec{v}_1$

2^{ον} $\vec{v}_1 // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \lambda\vec{\alpha}$

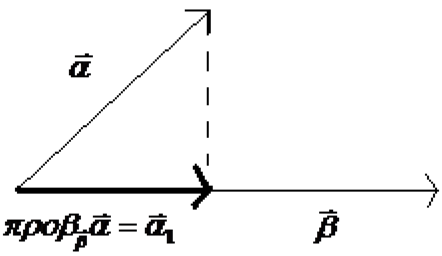
3^{ον} $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \lambda|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sigma\upsilon\nu\phi = \lambda\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \lambda\cdot\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Άρα $\vec{v}_1 = 3\vec{\alpha}$.

82. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha} = (5,-5)$ πάνω στο $\vec{\beta} = (1,-3)$.

<u>Λύση :</u>



1^{ον} Έστω $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1$

2^{ον} $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = \lambda\vec{\beta}$

3^{ον} $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}_1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lambda\left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$

$5\cdot 1 + (-5)\cdot(-3) = \lambda\sqrt{1^2+(-3)^2}^{\,2} \Leftrightarrow 5+15 = \lambda\sqrt{10}^{\,2} \Leftrightarrow 20 = 10\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Άρα $\vec{\alpha}_1 = 2\vec{\beta} = 2(1,-3) = (2,-6)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

83. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha} = (-1,2)$ πάνω στο $\vec{\beta} = (3,1)$.

84. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha} = (4,7)$ πάνω στο $\vec{\beta} = (3,4)$.

85. Αν $\left|\vec{\alpha}\right| = 1$, $\left|\vec{\beta}\right| = 2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = 60^\circ$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

86. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα , να βρείτε την προβολή του $\vec{\nu} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

87. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,-1) , Β(-1,4), Γ(3,-2) και ΑΜ διάμεσος. Να υπολογίσετε την προβολή του $\vec{\mathrm{AM}}$ πάνω στο $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$.

88. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος του. Αν 2(ΑΒ)=(ΑΓ)=2 και η γωνία Α είναι 60 μοίρες να υπολογίσετε την προβολή του $\vec{\mathrm{AM}}$ πάνω στο $\vec{\mathrm{A\Gamma}}$.

89. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\left|\vec{\alpha}\right| = 3$, $\left|\vec{\beta}\right| = 12$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ (συναρτήσει του $\vec{\alpha}$).

90. Αν $\left|\vec{\alpha}\right| = 1$ και $\left|\vec{\beta}\right| = 2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = 120^\circ$ καθώς και το διάνυσμα $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

i. Να βρεθεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
ii. Το $\left|\vec{\delta}\right|$
iii. Η γωνία $\left(\vec{\delta},\vec{\alpha}\right)$
iv. Η προβολή του $\vec{\delta}$ στο $\vec{\beta}$.

91. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$,

i. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

ii. Να βρείτε διανύσματα $\vec{x}$ ώστε :
- $\vec{x}//(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$ και
- $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}-\vec{x})$

iii. Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}$.

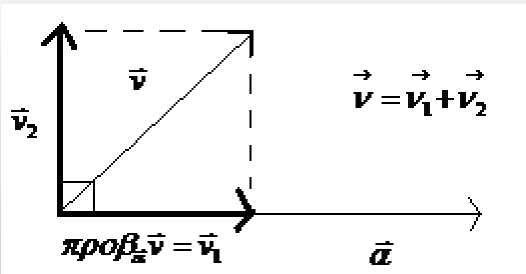
92. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$.

i. Να βρείτε διανύσματα $\vec{x}$ ώστε :
- $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και
- $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$.

ii. Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}$.

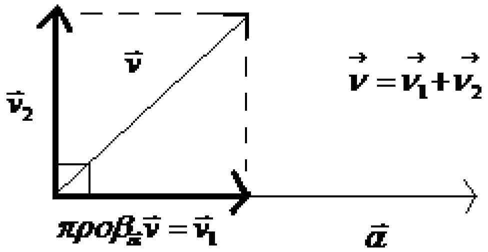
<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9</u> : ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ 2 ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Αν θέλουμε να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ σε δυο συνιστώσες, τότε γράφουμε $\vec{v}=\vec{p}+\vec{q}$ και προσδιορίζουμε από τα δεδομένα τα $\vec{p},\vec{q}$. <u>Ειδικότερα</u>, αν θέλουμε να αναλύσουμε το $\vec{v}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει την διεύθυνση ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$, τότε γράφουμε : $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ και είναι $\vec{v}_1=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.



<u>**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**</u>

93. (Εφαρμογή 2 σελ. 46 σχολικού βιβλίου)
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,1)$ και $\vec{v}=(1,2)$. Να αναλυθεί το $\vec{v}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.
<u>Λύση :</u>



1ον Έστω $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\vec{v}_1$

2ον Έστω $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

3ον $\vec{v}_1 // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{v}_1=\lambda\vec{\alpha}$

4ον $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\lambda|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$

$$3\cdot1+1\cdot2=\lambda\sqrt{3^2+1^2}^{\,2} \Leftrightarrow 5=\lambda\sqrt{10}^{\,2} \Leftrightarrow 5=10\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{10} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα $\vec{v}_1=\frac{1}{2}\vec{\alpha}=\frac{1}{2}(3,1)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}_2=(1,2)-\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\vec{v}_2=\left(1-\frac{3}{2},2-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \vec{v}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

94. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{u}=(-9,19)$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}=(5,-3)$.

95. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(4,-3)$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\beta}=(1,-2)$.

96. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}=(5,10)$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}=(3,-4)$.

97. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}=(8,1)$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-1)$.

98. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,7)$ και $\vec{\beta}=(1,-3)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Έστω Α, Β σταθερά σημεία. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα όποια ισχύει :

- $\vec{MA} \perp \vec{MB}$ ή $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ είναι κύκλος με διάμετρο ΑΒ.
- $A\hat{M}B = 90^{\circ}$ είναι επίσης κύκλος διαμέτρου ΑΒ.
- $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$ είναι ευθεία ε κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

99. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α και Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα όποια ισχύει : $\left|\vec{MA} - 2\vec{MB}\right| = \sqrt{\vec{MA}^2 + 4\vec{MB}^2}$.

100. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{\Gamma B} \cdot \overrightarrow{AM}$.

101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ διάμεσος του. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα όποια ισχύει : $\vec{M\Delta} \cdot \vec{AB} = \vec{M\Delta} \cdot \vec{\Gamma A}$.

102. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επίπεδου ενός τριγώνου ΑΒΓ για τα όποια ισχύει : $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{MA} \cdot \vec{A\Gamma}$.

103. Έστω Α και Β δυο σταθερά σημεία. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\left|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\right| = \left|2\vec{MA} - 3\vec{MB}\right|$

104. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\left|3\vec{MA} + 4\vec{MB}\right| = \left|3\vec{MA} - 4\vec{MB}\right|$

105. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\left|\vec{MA} + 2\vec{MB}\right| = \left|2\vec{MA} + \vec{MB}\right|$

106. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\vec{BM}^{\,2} = 16 - 2\vec{BM} \cdot \vec{AB}$

107. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 9$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11</u> : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΠΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Πολλές προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούν να αποδειχτούν με τη βοήθεια των διανυσμάτων.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

108. Να αποδειχτεί ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου η όποια βαίνει σε διάμετρο είναι ορθή.

109. Έστω ΑΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

110. Έστω ΑΔ το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$.

111. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα έτσι, ώστε ΒΖ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AE} \perp \mathrm{\Delta Z}$.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.5</u>

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_18556

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ.(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_18581

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20056

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_18598

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}=(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3)$ και $\vec{A\Gamma}=(1,6)$, όπου $\kappa\in\Re$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ να είναι κάθετα. (Μονάδες 9)

γ) Για κ=1 να βρείτε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ _20059

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}=(x^2,x-1)$ είναι κάθετα. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_18558

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB}$=(-4,-6) και $\overrightarrow{A\Gamma}$=(2,-8).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος τ τριγώνου ΑΒΓ.(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία. (Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφ του Β και Γ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20053

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|=4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8$

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}=\vec{0}$.(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20070

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9$, $2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$

α)Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

β)Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20058

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},3)$.Να υπολογίσετε:

α)τη γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ (Μονάδες 10)

β)το διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\cdot\vec{\alpha}$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}=7$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\left|\vec{\beta}\right|$ (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_ 20050

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ 20057

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\beta})$ (Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_22505

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $\vec{u}\perp\vec{v}$ και $|\vec{\alpha}|=\left|\vec{\beta}\right|=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_20069

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-3)$ και $\vec{\beta} = (1, \frac{1}{2})$

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_22519

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν :

$$\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7},1\right) \text{ και } \vec{\alpha}+7\vec{\beta} = (\mu+2, 7-2\mu),\ \mu \in \Re .$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ. (Μονάδες 10)

β) Αν $\mu = 2$ τότε :

i. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} = (3,-4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_22524

Έστω $\vec{\alpha} = (2,-3)$ και $\vec{\beta} = (-5,1)$ δυο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}}$ (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_22527

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει :

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad \text{(Μονάδες 12)}$$

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ιση με μονάδα και $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta} = \vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 ΚΩΔΙΚΟΣ_22530

Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ ώστε $\vec{AB} = (-1,4)$ και $\vec{A\Gamma} = (3,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, αμβλεία ή ορθή. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 ΚΩΔΙΚΟΣ_18606

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{ΟΒ}=(1,2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ}$ και $\overrightarrow{ΟΒ}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 4)
β) Αν Γ(α,β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=(\alpha-4,\beta+2)$ (Μονάδες 5)
ii. Να αποδείξετε ότι $4\alpha+3\beta=10$ (Μονάδες 6)
iii. Αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΒ}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 ΚΩΔΙΚΟΣ_18618

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμία από τις ισότητες : $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ και $|\vec{u}+\vec{v}|=||\vec{u}|-|\vec{v}||$
(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
ii. Να αποδείξετε ότι : $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=\vec{0}$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 ΚΩΔΙΚΟΣ_18616

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60°$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta},\kappa\in R$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (Μονάδες 3)
β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$ τότε :
i) Να αποδείξετε ότι κ= - 2 (Μονάδες 6)
ii) Να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
iii) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα (Μονάδες 8)

2 *Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ*

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

26. Τι ονομάζουμε εξίσωση μιας γραμμής C ; (σελ. 57 σχολικό)

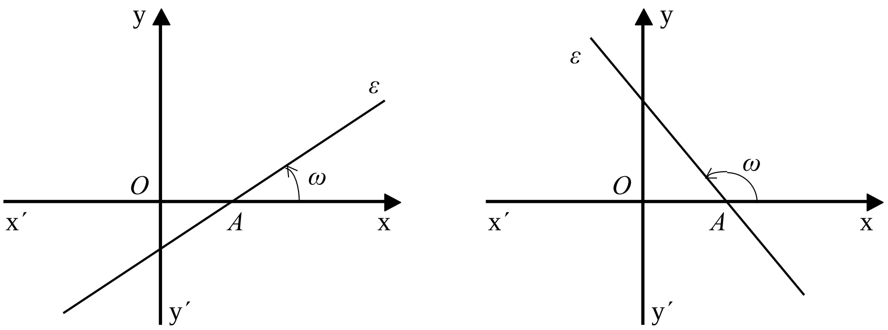
<u>Απάντηση :</u>

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής *C*, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της *C*, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

27. Γωνία ευθείας με τον x΄x – Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας (σελ. 58 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο *A*.



Τη γωνία *ω* που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το *A* κατά τη *θετική φορά* μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$***. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία *ω* ισχύει $0^0 \le \omega < 180^0$ ή σε ακτίνια $0 \le \omega < \pi$. Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας *ε* ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$ δηλ. $\boxed{\lambda = \varepsilon\phi\omega}$. Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία. Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".

28. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δυο γνωστά σημεία. (σελ. 59 σχολικό)

Απάντηση :
Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι : $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας ε, δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ε, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

29. Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών (σελ. 60 σχολικό)

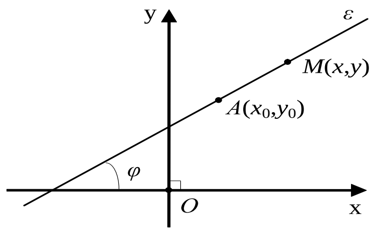
Απάντηση :
Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

$\boxed{\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$ και $\boxed{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1}$

30. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, έχει εξίσωση : $\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)}$ (σελ. 60 σχολικό)

Απόδειξη :
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.
Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$. Επομένως, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$ ή $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)}$$

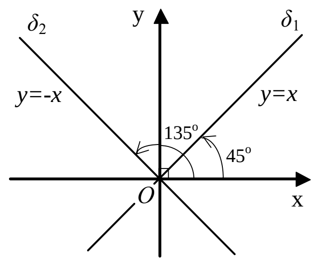


31. Ειδικές περιπτώσεις ευθειών. (σελ. 61 - 62 σχολικό)

Απάντηση :

- Όταν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη, δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της *M* έχει τετμημένη x_0 και άρα η εξίσωσή της είναι: $\boxed{x = x_0}$
- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ* είναι $y-\beta=\lambda(x-0)$, η οποία τελικά γράφεται $\boxed{\boldsymbol{y=\lambda x+\beta}}$.
- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*, τότε η εξίσωσή της είναι $y-0=\lambda(x-0)$ ή $\boxed{\boldsymbol{y=\lambda x}}$.

  Έτσι, οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ αντιστοίχως.



- Αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση $y-y_0=0(x-x_0)$, δηλαδή $\boxed{\boldsymbol{y=y_0}}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> :

- Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης οποιουδήποτε διανύσματος παράλληλου της ε.
- Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x έχει συντελεστή διεύθυνσης: λ=0. **(**$(\varepsilon)//x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=0$**)**
- Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθεία παράλληλη του άξονα y'y. **(**$(\varepsilon)//y'y \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=$ **--** δεν ορίζεται**)**
- Αν $\lambda_\varepsilon>0$ τότε η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x
- Αν $\lambda_\varepsilon<0$ τότε η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x
- Αν ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ και μια ευθεία (ε) είναι παράλληλα τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης δηλ. $\vec{\delta}//(\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\delta}}=\lambda_\varepsilon$ (<u>Rem</u>. Αν $\vec{\delta}=(x,y)$ τότε $\lambda_{\vec{\delta}}=\dfrac{y}{x}$)

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

1) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω ίση με :

   α) $60°$ β) $45°$ γ) $\dfrac{\pi}{2}$ δ) $0°$ ε) $\dfrac{3\pi}{4}$ στ) $120°$

Λύση :

ΘΥΜΗΣΟΥ ! ! !

εφ$0°$=εφ0=0	
εφ$30°$=εφ$\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	εφ$120°$=εφ$\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$
εφ$45°$=εφ$\frac{\pi}{4}$=1	εφ$135°$=εφ$\frac{3\pi}{4}=-1$
εφ$60°$=εφ$\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$	εφ$150°$=εφ$\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
εφ$90°$=εφ$\frac{\pi}{2}$= --	

α) $\omega=60°$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi 60°=\sqrt{3}$

β) $\omega=45°$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi 45°=1$

γ) $\omega=\frac{\pi}{2}$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi\frac{\pi}{2}=$-- δεν ορίζεται

δ) $\omega=0°$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi 0°=0$

ε) $\omega=\frac{3\pi}{4}$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}=-1$

στ) $\omega=120°$, άρα $\lambda=\varepsilon\phi\omega=\varepsilon\phi 120°=-\sqrt{3}$

2) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-\sqrt{3})$, να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x.

Λύση : $(\varepsilon)//\vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon}=\lambda_{\vec{\delta}} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon}=\frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $\omega=150°$ ή $\omega=\frac{5\pi}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω ίση με :

α) $30°$ β) $45°$ γ) $\frac{\pi}{3}$ δ) $90°$ ε) $0°$ στ) $\frac{2\pi}{3}$ ζ) $135°$

4) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(5,-5)$, να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x.

5) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(1,-\sqrt{3})$, να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :

Αν μια ευθεία ε περνάει από τα σημεία: $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$, διότι αν $x_1 = x_2$ η ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα x'x, άρα δεν έχουμε συντελεστή διεύθυνσης).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(-3,-5) και Β(-9,1). Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει η (ΑΒ) με τον άξονα x΄x;

Λύση : $\lambda_{\mathrm{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-(-5)}{-9-(-3)} = \dfrac{6}{-9+3} = \dfrac{6}{-6} = -1$, δηλ. $\lambda_{\mathrm{AB}} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = -1$, άρα $\omega = 135^{\circ}$ ή $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(2,-1) και Β(5,2). Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει η (ΑΒ) με τον άξονα x΄x;

8) Δίνονται τα σημεία Α(5,-2) , Β(3,8) και Γ(α,α+1), με $\alpha \in \Re$.
   i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
   ii. Αν η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης 3, να βρείτε :
      1) Τον αριθμό α,
      2) Τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΓ με τον άξονα x΄x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :

Μια ευθεία γενικά έχει τη μορφή (ε) : $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda\in\Re$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης.

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία δυο ευθειών **λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.** Αν το σύστημα έχει μια λύση οι ευθείες τέμνονται, αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται ενώ αν είναι αδύνατο τότε οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα x΄x , **θέτουμε y=0 στην εξίσωση της.**
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα y΄y , **θέτουμε x=0 στην εξίσωση της.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Δίνονται οι ευθείες (ε) : $y=2x+4$ και (ζ) : $y=\frac{7}{2}x+1$. Να βρείτε :

i. λ_ε , λ_ζ
ii. το σημείο τομής των (ε) και (ζ)
iii. τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες

Λύση :

i. (ε) : $y=2x+4$ άρα $\lambda_\varepsilon=2$, (ζ) : $y=\frac{7}{2}x+1$ άρα $\lambda_\zeta=\frac{7}{2}$

ii. Για να βρω το σημείο τομής των (ε) και (ζ) θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους : $\begin{cases} y=2x+4 \\ y=\frac{7}{2}x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+4 \\ 2y=7x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=4 \\ -7x+2y=2 \end{cases} \cdot(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=-8 \\ -7x+2y=2 \end{cases}$ προσθέτω κατά μέλη και έχω $-3x=-6 \Leftrightarrow x=2$ άρα πάω στην πρώτη και έχω : $4\cdot 2-2y=-8 \Leftrightarrow 8-2y=-8 \Leftrightarrow 2y=16 \Leftrightarrow y=8$. Άρα το σημείο τομής των (ε) και (ζ) είναι το σημείο $\mathrm{A}(2,8)$

iii. Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον x΄x θέτω $y=0$ στην εξίσωση της : $(\varepsilon): y=2x+4 \overset{y=0}{\Leftrightarrow} 0=2x+4 \Leftrightarrow x=-2$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον x΄x είναι το $\mathrm{B}(-2,0)$
Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον y΄y θέτω $x=0$ στην εξίσωση της : $(\varepsilon): y=2x+4 \overset{x=0}{\Leftrightarrow} y=2\cdot 0+4 \Leftrightarrow y=4$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον y΄y είναι το $\Gamma(0,4)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10)Δίνονται οι ευθείες (ε) : $y=2x-6$ και (ζ) : $y=-3x+19$. Να βρείτε :

i. λ_ε , λ_ζ
ii. το σημείο τομής των (ε) και (ζ)
iii. τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ)

Α. Η εξίσωση ευθείας που περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{y-y_0=\lambda(x-x_0)}$.

Ειδικότερα:

- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον y'y (δηλ. είναι κατακόρυφη) και περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$, έχει εξίσωση: $x=x_0$ (ο συντελεστής διεύθυνσης λ δεν ορίζεται)
- Αν είναι παράλληλη του x'x (δηλ. είναι οριζόντια) και περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση: $y=y_0$.
- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή Ο(0,0) των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε έχει εξίσωση y=λx. Ειδικότερα :
- Οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις y=x και y=-x αντιστοίχως.
- Αν μια ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α(0,β) έχει εξίσωση : $y = \lambda x + \beta$

Β. Η εξίσωση ευθείας που περνάει από δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, αν $x_1 \neq x_2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11)Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2,-5) και :

i. έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
ii. είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
iii. είναι παράλληλη στον άξονα y΄y
iv. και από το σημείο Β(-2,7)

Λύση :

i. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $A(2,-5)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=3 άρα :

$$(\varepsilon): y - y_0 = \lambda(x - x_0) \overset{x_0=2,\, y_0=-5,\, \lambda=3}{<\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!>} y - (-5) = 3(x-2) \Leftrightarrow y + 5 = 3x - 6 \Leftrightarrow y = 3x - 11$$

ii. Η (ε) είναι παράλληλη στον x΄x άρα είναι της μορφής $(\varepsilon): y = y_0$ και επειδή διέρχεται από το $A(2,-5)$, τότε $(\varepsilon): y = -5$

iii. Η (ε) είναι παράλληλη στον y΄y άρα είναι της μορφής $(\varepsilon): x = x_0$ και επειδή διέρχεται από το $A(2,-5)$, τότε $(\varepsilon): x = 2$

iv. Η (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(2,-5)$ και $B(-2,7)$ τότε : $\lambda_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7-(-5)}{-2-2} = \dfrac{12}{-4} = -3$, άρα

$$(\varepsilon): y - y_1 = \lambda_{AB}(x - x_1) \Leftrightarrow y - (-5) = -3(x-2) \Leftrightarrow y + 5 = -3x + 6 \Leftrightarrow y = -3x + 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12)Δίνονται τα σημεία Α(1,-4), Β(4,5) και Γ(4,-2). Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών :
α) (ΑΒ) β) (ΒΓ)

13)Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(2,-1) και :

i. έχει συντελεστή διεύθυνσης 2
ii. είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
iii. είναι παράλληλη στον άξονα y΄y
iv. και από το σημείο Β(5,2)

14)Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και :
i. έχει συντελεστή διεύθυνσης -1
ii. είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
iii. είναι παράλληλη στον άξονα y΄y
iv. και από το σημείο Β(1,-1)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ & ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ)

- Δύο ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλ. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντιθετοαντίστροφους, δηλ. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15)Να βρείτε τον αριθμό $\mu \in \Re$ για τον οποίο :
i. Οι ευθείες $y = (3\mu - 5)x + 4$ και $y = -x + 12$ είναι παράλληλες.
ii. Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = (\mu - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)x - 3$ είναι κάθετες.

Λύση :
i. Έστω $(\varepsilon): y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $(\zeta): y = -x + 12$. $(\varepsilon)//(\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow 3\mu - 5 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = \frac{4}{3}$

ii. Έστω $(\varepsilon_1): y = (\mu - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)x - 3$. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow$

$(\mu - 1)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \mu - \frac{\mu^2}{2} - 1 + \frac{\mu}{2} = -1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\mu - \mu^2 - 2 + \mu = -2 \Leftrightarrow \mu^2 - 3\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\mu(\mu - 3) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ ή $\mu - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu = 3$

16)Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(-2,3) η οποία :
i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=5x-7
ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : y=$\frac{1}{4}$x+21
iii. Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ (ή $\omega = 45°$)
iv. Είναι παράλληλη με τον x΄x.
v. Είναι παράλληλη με τον y΄y.
vi. Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2,8)$
vii. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)

Λύση :

i. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0) \overset{x_0=-2,y_0=3}{<=====>} y-3=\lambda_\varepsilon(x+2)$
Όμως η $(\varepsilon)//(\zeta): y=5x-7 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=5$. Άρα : $(\varepsilon): y-3=5(x+2) \Leftrightarrow y-3=5x+10 \Leftrightarrow y=5x+13$

ii. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0) \overset{x_0=-2,y_0=3}{<=====>} y-3=\lambda_\varepsilon(x+2)$
Όμως η $(\varepsilon)\perp(\eta): y=\frac{1}{4}x+21 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\frac{1}{4}=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-4$. Άρα : $(\varepsilon): y-3=-4(x+2) \Leftrightarrow y-3=-4x-8 \Leftrightarrow y=-4x-5$

iii. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0) \overset{x_0=-2,y_0=3}{<=====>} y-3=\lambda_\varepsilon(x+2)$
Όμως η (ε) σχηματίζει με τον x΄x γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$, άρα $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$. Άρα : $(\varepsilon): y-3=1(x+2) \Leftrightarrow y-3=x+2 \Leftrightarrow y=x+5$

iv. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ και είναι παράλληλη στον x΄x άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y=y_0 \Leftrightarrow y=3$

v. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ και είναι παράλληλη στον y΄y άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): x=x_0 \Leftrightarrow x=-2$

vi. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(-2,3)$ άρα θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0) \overset{x_0=-2,y_0=3}{<=====>} y-3=\lambda_\varepsilon(x+2)$
Όμως η $(\varepsilon)//\vec{\delta}=(2,8) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\vec{\delta}} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=4$. Άρα : $(\varepsilon): y-3=4(x+2) \Leftrightarrow y-3=4x+8 \Leftrightarrow y=4x+11$

vii. Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,3)$ και $\mathrm{O}(0,0)$ τότε : $\lambda_\varepsilon=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3}{0+2}=-\frac{3}{2}$, άρα $(\varepsilon): y-3=-\frac{3}{2}(x+2) \Leftrightarrow y-3=-\frac{3}{2}x-3 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x$
(Θα μπορούσα να πω ότι η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) άρα είναι της μορφής $(\varepsilon): y=\lambda_\varepsilon x \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17)Να βρείτε τον αριθμό λ για τον οποίο :

i. Οι ευθείες y=(2λ-3)x+4 και y=x είναι παράλληλες.
ii. Οι ευθείες y=(2λ-1)x-3 και y=(1+3λ)x+1 είναι κάθετες.

18) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\Re$ οι ευθείες $(\varepsilon): y=(\mu-3)x+1$ και $(\eta): y=\left(2-\frac{\mu}{2}\right)x+\mu$ είναι κάθετες.

19) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \Re$ οι ευθείες $(\varepsilon): y=(\mu-1)x+2$ και $(\eta): y=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)x-3$ είναι κάθετες.

20) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$:

i. οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=(\alpha^2+3\alpha)x+4$ και $(\varepsilon_2): y=(\alpha+8)x-21$ είναι παράλληλες

ii. οι ευθείες $(\varepsilon_3): y=(\alpha+1)x-7$ και $(\varepsilon_4): y=\frac{\alpha-3}{4}x+\frac{13}{4}$ είναι κάθετες.

21) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in \Re$ οι ευθείες $(\varepsilon): y=(\alpha^2-2\alpha+7)x+5$ και $(\zeta): y=\left(2+4\beta-\beta^2\right)x+6$ είναι παράλληλες.

22) Να βρεθούν οι τιμές του $\theta \in (o,\pi)$, ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y=(2\eta\mu\theta)x+3$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y=x+5$

23) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(2,3) η οποία :

i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=4x-3
ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : y=$-\frac{1}{2}$x+3
iii. Σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=\frac{3\pi}{4}$ (ή $\omega=135^\circ$)
iv. Είναι παράλληλη με τον x΄x.
v. Είναι παράλληλη με τον y΄y.
vi. Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(1,5)$

24) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(-1,2) η οποία :

i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=3x+1
ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : y=-2x+3
iii. Σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=\frac{2\pi}{3}$ (ή $\omega=120^\circ$)
iv. Είναι παράλληλη με τον χ’χ.
v. Είναι παράλληλη με τον y’y.
vi. Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(1,0)$
vii. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)

25) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(-1,11), Β(2,2) και Γ(6,-10) είναι συνευθειακά.

26) Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(5,1). Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

27) Δίνονται τα σημεία Α(3,-5) και Β(-1,3). Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

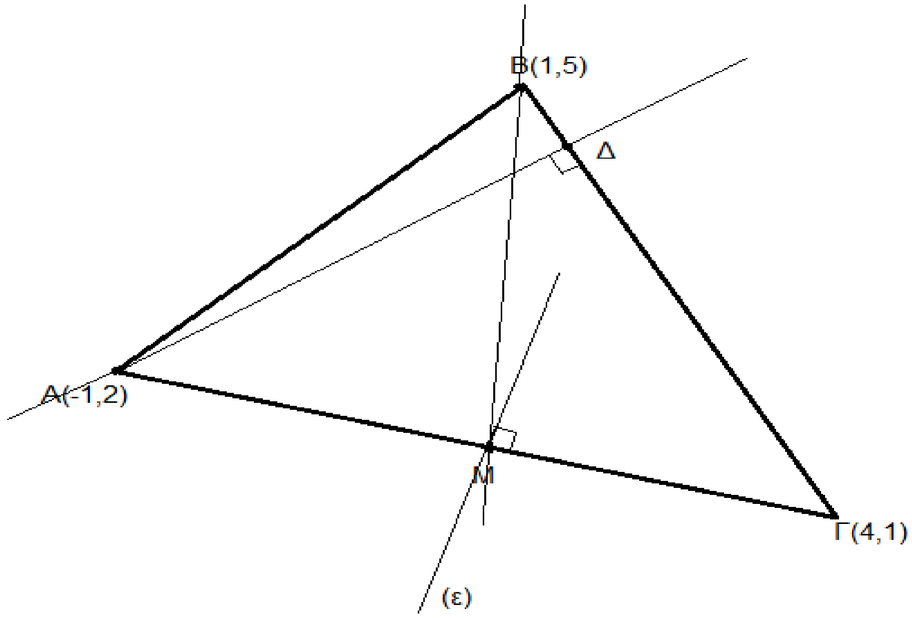
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : (ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28)(Εφαρμογή 1 σελ. 62 σχολικού βιβλίου) Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(-1,2), Β(1,5) και Γ(4,1). Να βρεθούν οι εξισώσεις :

i. του ύψους που άγεται από την κορυφή Α
ii. της διαμέσου που άγεται από την κορυφή Β
iii. της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ.

Λύση :



i. Έστω (ΑΔ) η εξίσωση του ύψους που ψάχνω, τότε θα ισχύει ότι :,
$(\text{ΑΔ}) \perp (\text{ΒΓ}) \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1$, όμως $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \dfrac{y_\Gamma - y_\text{B}}{x_\Gamma - x_\text{B}} = \dfrac{1-5}{4-1} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}$, άρα ο $\lambda_{\text{ΑΔ}}$ θα είναι «αντιθετοαντίστροφος» δηλαδή : $\lambda_{\text{ΑΔ}} = \dfrac{3}{4}$. Οπότε : $(\text{ΑΔ}): y-2 = \dfrac{3}{4}(x+1) \Leftrightarrow$
$y-2 = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{4} + 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{4}$, δηλ. $\boxed{(\text{ΑΔ}): y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{4}}$

ii. Για να βρω την εξίσωση της διαμέσου (ΒΜ) θα πρέπει πρώτα να βρω τις συντεταγμένες του σημείου Μ. Το Μ είναι μέσο του ΑΓ άρα :
$\begin{cases} x_\text{M} = \dfrac{x_\text{A} + x_\Gamma}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_\text{M} = \dfrac{y_\text{A} + y_\Gamma}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ άρα $\text{M}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου (ΒΜ) είναι $\lambda_{\text{BM}} = \dfrac{y_\text{M} - y_\text{B}}{x_\text{M} - x_\text{B}} = \dfrac{\frac{3}{2} - 5}{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{10}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{2}} = \dfrac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = -7$, άρα η εξίσωση της διαμέσου (ΒΜ) είναι $(\text{BM}): y-5 = -7(x-1) \Leftrightarrow y-5 = -7x+7 \Leftrightarrow y = -7x+12$, δηλ. $\boxed{(\text{BM}): y = -7x+12}$

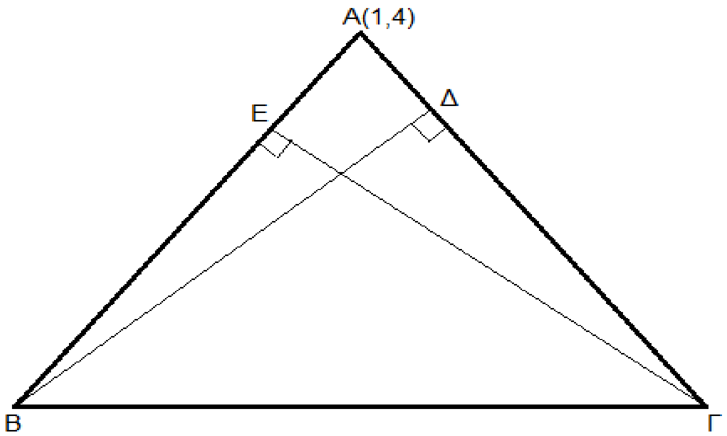
iii. Η μεσοκαθετος της πλευράς (ΑΓ) είναι η ευθεία που διέρχεται από το μέσο Μ της (ΑΓ) και είναι κάθετη στην (ΑΓ). Έστω λοιπόν (ε) η εξίσωση της μεσοκαθέτου της

(ΑΓ), τότε ισχύει : $(\varepsilon)\perp(\mathrm{A\Gamma})\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-1$, όμως $\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=\dfrac{y_\Gamma-y_\mathrm{A}}{x_\Gamma-x_\mathrm{A}}=\dfrac{1-2}{4+1}=\dfrac{-1}{5}=-\dfrac{1}{5}$, άρα ο λ_ε θα είναι «αντιθετοαντίστροφος» δηλαδή : $\lambda_\varepsilon=5$. Οπότε : $(\varepsilon):y-\dfrac{3}{2}=5\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\ y-\dfrac{3}{2}=5x-\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow\ y=5x-\dfrac{15}{2}+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\ y=5x-6$. Δηλ. $\boxed{(\varepsilon):y=5x-6}$

29)(Άσκηση 2 σελ.65 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου τα δυο ύψη έχουν εξισώσεις $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ και $y=-x+2$ αντιστοίχως και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1,4).

Λύση :

Πρώτα από όλα θα εξετάσω αν κάποιο από τα δυο ύψη που δίνει η εκφώνηση διέρχεται από την κορυφή $\mathrm{A}(1,4)$. (Υπενθύμιση : αν μια ευθεία ή γενικά μια γραμμή, διέρχεται από ένα σημείο, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της.) Συγκεκριμένα στην εξίσωση $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ θα βάλω όπου $x=1,y=4$ και θα δω αν επαληθεύεται : $4=\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow4=2$ αδύνατο, ομοίως στην εξίσωση $y=-x+2$ θα βάλω όπου $x=1,y=4$ και θα δω αν επαληθεύεται : $y=-x+2\Leftrightarrow4=-1+2\Leftrightarrow4=1$ αδύνατο. Άρα κανένα από τα δυο ύψη δεν διέρχεται από την κορυφή Α.



Έστω λοιπόν $(\mathrm{B\Delta}):y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ και $(\Gamma\mathrm{E}):y=-x+2$.

- $(\mathrm{AB})\perp(\Gamma\mathrm{E})\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{AB}}\cdot\lambda_{\Gamma\mathrm{E}}=-1$, όμως $\lambda_{\Gamma\mathrm{E}}=-1$, άρα $\lambda_{\mathrm{AB}}=1$. Τότε : $(\mathrm{AB}):y-4=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+3$, δηλ. $\boxed{(\mathrm{AB}):y=x+3}$
- $(\mathrm{A\Gamma})\perp(\mathrm{B\Delta})\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\lambda_{\mathrm{B\Delta}}=-1$, όμως $\lambda_{\mathrm{B\Delta}}=\dfrac{1}{2}$, άρα $\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=-2$. Τότε : $(\mathrm{A\Gamma}):y-4=-2(x-1)\Leftrightarrow y-4=-2x+2\Leftrightarrow y=-2x+6$, δηλ. $\boxed{(\mathrm{A\Gamma}):y=-2x+6}$
- Το σημείο Β είναι σημείο τομής των ευθειών (ΑΒ) και (ΒΔ) των οποίων γνωρίζω τις εξισώσεις. Άρα για να βρω τις συντεταγμένες του σημείου Β αρκεί να λύσω το σύστημα των εξισώσεων (ΑΒ) και (ΒΔ). Έτσι λοιπόν :

$\begin{cases}(\text{ΑΒ}): y = x+3 \\ (\text{ΒΔ}): y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+3 \\ 2y = x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=3 \\ -x+2y=3\end{cases}\Bigg| \cdot(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ -x+2y=3\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $y=0$, άρα $x-0=-3 \Leftrightarrow x=-3$ δηλ. $\boxed{\text{Β}(-3,0)}$

- Το σημείο Γ είναι σημείο τομής των ευθειών (ΑΓ) και (ΓΕ) των οποίων γνωρίζω τις εξισώσεις. Άρα για να βρω τις συντεταγμένες του σημείου Γ αρκεί να λύσω το σύστημα των εξισώσεων (ΑΓ) και (ΓΕ). Έτσι λοιπόν :

$\begin{cases}(\text{ΑΓ}): y=-2x+6 \\ (\text{ΓΕ}): y=-x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ x+y=2 \end{cases}\Bigg| \cdot(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ -x-y=-2\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $x=4$, άρα $2\cdot 4+y=6 \Leftrightarrow y=-2$ δηλ. $\boxed{\Gamma(4,-2)}$

- Για να βρω την εξίσωση της πλευράς (ΒΓ) γνωρίζω δυο σημεία το Β και το Γ. Έτσι λοιπόν : $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{y_\Gamma - y_\text{Β}}{x_\Gamma - x_\text{Β}} = \frac{-2-0}{4+3} = -\frac{2}{7}$. Άρα $(\text{ΒΓ}): y-0 = -\frac{2}{7}(x+3) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$ δηλ. $\boxed{(\text{ΒΓ}): y = -\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

30) Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,4), Β(-1,0) και Γ(3,2). Να βρείτε:
  i. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
  ii. Την εξίσωση του ύψους ΑΔ.
  iii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

31) Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,3), Β(1,5) και Γ(3,3). Να βρεθούν :
  i. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ.
  ii. Η εξίσωση του ύψους ΓΔ.
  iii. Οι εξισώσεις των διαμέσων ΑΚ.
  iv. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της ΑΓ.

32) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-2,2), Β(8,12) και Γ(-10,6). Να βρείτε τις εξισώσεις :
  i. των πλευρών ΑΒ και ΒΓ
  ii. του ύψους ΑΔ
  iii. της διαμέσου ΒΜ
  iv. της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς ΑΒ.

33) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β(-3,-3). Η εξίσωση της πλευράς ΑΓ είναι $(\text{ΑΓ}): y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ και η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι $(\text{ΑΔ}): y=-2x-4$. Να βρείτε :
  i. τις συντεταγμένες του σημείου Α
  ii. τις εξισώσεις των ευθειών (ΑΒ) και (ΒΓ)
  iii. τις συντεταγμένες του σημείου Γ
  iv. την εξίσωση του ύψους ΒΕ
  v. τις συντεταγμένες του ορθοκεντρου του ΑΒΓ.

34) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,2). Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι $(\text{ΒΓ}): y = x-5$ και η εξίσωση του ύψους ΓΔ είναι $(\Gamma\Delta): y = \frac{2}{3}x - 2$. Να βρείτε :
  i. τις συντεταγμένες του σημείου Γ
  ii. τις εξισώσεις των ευθειών (ΑΓ) και (ΑΒ)
  iii. τις συντεταγμένες του σημείου Β
  iv. την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ

v. την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ.

35) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,1). Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο ύψη του έχουν εξισώσεις : $y=-3x+11$ και $y=x+3$. Να βρείτε :

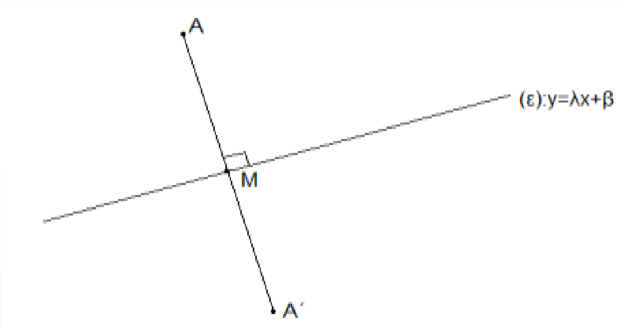
i. τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ
ii. τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ
iii. την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

36) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,3) καθώς και τα ύψη του $(\mathrm{B\Delta}): y=2x-5$ και $(\Gamma\mathrm{E}): y=x+\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του και τις συντεταγμένες των κορυφών του.

37)Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-5,-2), ενώ η διάμεσος του ΒΜ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x-1$ και το ύψος του ΓΔ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=-2x-2$. Να βρείτε :

i. την εξίσωση της πλευράς ΑΒ
ii. τις συντεταγμένες του σημείου Β
iii. τις συντεταγμένες του σημείου Γ
iv. τη γωνία Γ.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 :</u> (ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ)

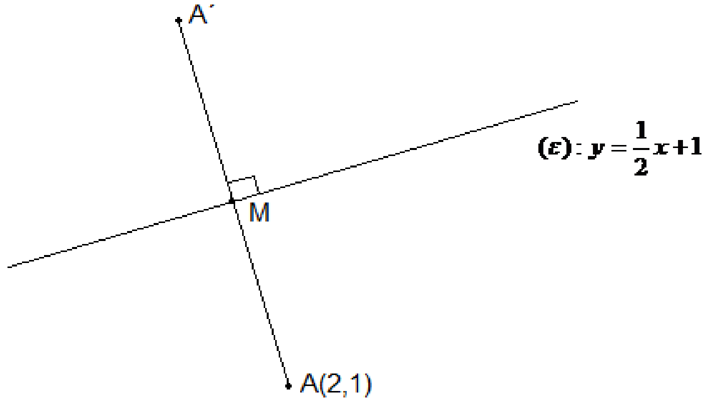


Έστω ότι θέλω να βρω το συμμετρικό ενός σημείου $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ ως προς μια ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$. Ονομάζω Α΄ το συμμετρικό σημείο που ψάχνω, οπότε : $(\mathrm{AA}')\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{AA}'}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$, έτσι βρίσκω τον $\lambda_{\mathrm{AA}'}$ και γνωρίζοντας τις συντεταγμένες του Α μπορώ να βρω την εξίσωση της ευθείας (ΑΑ΄). Το σημείο Μ είναι σημείο τομής των ευθειών (ΑΑ΄) και (ε) άρα λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους μπορώ να βρω τις συντεταγμένες του Μ. Το Μ όμως είναι μέσο το ΑΑ΄ άρα από συντεταγμένες μέσου τμήματος μπορώ να βρω τις συντεταγμένες του Α΄ που ψάχνω. (Το σημείο Μ λέγεται προβολή του Α πάνω στην ευθεία (ε))

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

38)(Εφαρμογή 2 σελ. 63 σχολικού βιβλίου) Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση $(\varepsilon): y=\frac{1}{2}x+1$ και το σημείο Α(2,1). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε).

<u>Λύση :</u>



Έστω Α΄ το συμμετρικό του σημείου Α(2,1) που ψάχνω, τότε : $(\mathrm{AA'}) \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{AA'}} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1$, όμως $\lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ άρα $\lambda_{\mathrm{AA'}} = -2$, οπότε : $(\mathrm{AA'}): y-1=-2(x-2) \Leftrightarrow y-1=-2x+4 \Leftrightarrow y=-2x+5$ άρα $\boxed{(\mathrm{AA'}): y=-2x+5}$. Το Μ σημείο τομής των $(\mathrm{AA'}),(\varepsilon)$ άρα : $\begin{cases} (\mathrm{AA'}): y=-2x+5 \\ (\varepsilon): y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Leftrightarrow -2x+5=\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow -4x+10=x+2 \Leftrightarrow -5x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$. Τότε $y=-2\frac{8}{5}+5 \Leftrightarrow y=\frac{9}{5}$. Άρα $\mathrm{M}\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$. Όμως Μ μέσο ΑΑ΄ άρα ισχύει :

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{A'}}}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{5}=\frac{2+x_{\mathrm{A'}}}{2} \Leftrightarrow 16=5(2+x_{\mathrm{A'}}) \Leftrightarrow 16=10+5x_{\mathrm{A'}} \Leftrightarrow x_{\mathrm{A'}}=\frac{6}{5}$$

$$y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{A'}}}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{5}=\frac{1+y_{\mathrm{A'}}}{2} \Leftrightarrow 18=5(1+y_{\mathrm{A'}}) \Leftrightarrow 18=5+5y_{\mathrm{A'}} \Leftrightarrow y_{\mathrm{A'}}=\frac{13}{5}$$. Άρα $\mathrm{A'}\left(\frac{6}{5},\frac{13}{5}\right)$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

39) Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση $(\varepsilon): y=-x+1$ και το σημείο Α(2,3). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε).

40)Δίνεται η ευθεία (ε):y=x+1 και το σημείο Α(2, 1).

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του Α στην ε.
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ε.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 :

Αν γνωρίζουμε ότι ένα σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή $y_1 = \lambda x_1 + \beta$. Άρα το σημείο Μ είναι της μορφής : $\mathrm{M}(x_1, \lambda x_1 + \beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41)Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 5$.

i. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα σημεία Α(2,-3) και Β(3,1) ανήκει στην ευθεία (ε)
ii. Για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$ η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3\lambda - 5, -1 - \lambda)$

Λύση :

i. Για να ανήκει το Α(2,-3) στην ευθεία (ε), αρκεί οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή : $(\varepsilon): y = 2x - 5 \overset{x=2, y=-3}{\Longleftrightarrow} -3 = 2 \cdot 2 - 5 \Leftrightarrow -3 = -1$ αδύνατο, άρα το Α δεν ανήκει στην (ε).
Ομοίως για να ανήκει το Β(3,1) στην ευθεία (ε), αρκεί οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή : $(\varepsilon): y = 2x - 5 \overset{x=3, y=1}{\Longleftrightarrow} 1 = 2 \cdot 3 - 5 \Leftrightarrow 1 = 1$ που ισχύει, άρα το Β ανήκει στην (ε).
ii. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το $\Gamma(3\lambda - 5, -1 - \lambda)$, άρα οι συντεταγμένες του Γ επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή :
$(\varepsilon): y = 2x - 5 \overset{x=3\lambda-5, y=-1-\lambda}{\Longleftrightarrow} -1 - \lambda = 2(3\lambda - 5) - 5 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 6\lambda - 10 - 5 \Leftrightarrow 7\lambda = 14 \Leftrightarrow \lambda = 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42)Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 1$.

i. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα σημεία Α(-1,3) και Β(2,5) ανήκει στην ευθεία (ε)
ii. Για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$ η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\lambda - 1, 8 - \lambda)$

43)Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(–4,8).

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από αυτά.
ii. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x.
iii. Για ποια τιμή του α το σημείο Κ(4α+3, 2α–5) είναι σημείο της ευθείας;

44)Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon): y = 3x - 7$, $(\zeta): y = -2x + 13$. Το σημείο Α(α,β) ανήκει στην (ε) και το Β(α+3,2-β) ανήκει στην (ζ).

i. Να βρείτε τα α,β
ii. Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ
iii. Αν Γ το σημείο τομής των (ε), (ζ) και Μ το μέσο του ΑΓ, να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{\mathrm{BM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

45)Η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + 5 - 2\alpha$ διέρχεται από το σημείο Α(1,4α-5). Να βρείτε :

i. τον αριθμό α
ii. την εξίσωση της ευθείας (ζ) που είναι παράλληλη στην (ε) και τέμνει τον x΄x στο σημείο με τετμημενη -3
iii. το συμμετρικό Β του σημείου Α ως προς την ευθεία (ζ)
iv. την απόσταση του σημείου Β από το σημείο τομής της (ε) με τον y΄y.

46) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon): y=3x+5\lambda$, $(\zeta): y=-x+3$ και $(\theta): y=2x-6$. Το σημείο Μ(2λ+4,λ+2) ανήκει στην ευθεία (ε).
i. Να βρείτε τον αριθμό λ.
ii. Να βρείτε το σημείο Α της ευθείας ζ και το σημείο Β της ευθείας θ, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να έχει μέσο το Μ.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 :</u> (ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

Όταν σε μια άσκηση ψάχνουμε εξίσωση ευθείας (ε) που **διέρχεται** από ένα γνωστό σημείο $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ και επιπλέον έχει μια ιδιότητα 1, τότε για να βρούμε την εξίσωση της, εργαζόμαστε ως εξής :

i. Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής $x=x_0$ ή $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ (από το σημείο Μ διέρχεται η κατακόρυφη $x=x_0$ και οι ευθείες με εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, οπότε πρέπει να πάρουμε και τις 2 περιπτώσεις)
ii. Εξετάζουμε αν η ευθεία με εξίσωση $x=x_0$ έχει την ιδιότητα 1. Αν την έχει, τότε η $x=x_0$ είναι μια από τις ζητούμενες ευθείες.
iii. Θεωρούμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ έχει την ιδιότητα 1 και βρίσκουμε τις τιμές του λ και τις αντίστοιχες ευθείες.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

47) (Άσκηση 1 σελ.65 Ομάδας σχολικού βιβλίου) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχεται από το σημείο Α(-1,2) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

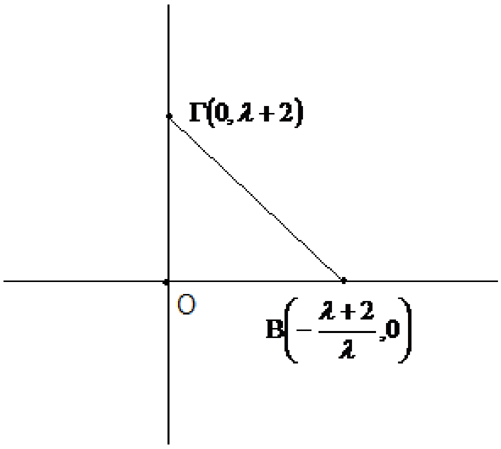
<u>Λύση :</u>

Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,2)$. Από το σημείο $\mathrm{A}(-1,2)$ διέρχονται :

1) Η κατακόρυφη $(\varepsilon): x=x_0 \Leftrightarrow x=-1$. Όμως η κατακόρυφη ευθεία δεν μπορεί να σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες, άρα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της εκφώνησης.
2) Όλες οι ευθείες της μορφής : $(\varepsilon): y-y_0=\lambda(x-x_0) \Leftrightarrow y-2=\lambda(x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y-2=\lambda x+\lambda \Leftrightarrow y=\lambda x+\lambda+2$, άρα : $(\varepsilon): y=\lambda x+\lambda+2$. Πρέπει να βρω τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες :
Για x΄x βάζω $y=0$ στην εξίσωση της (ε) και έχω :
$0=\lambda x+\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda x=-\lambda-2 \overset{\substack{\gamma\iota\alpha \\ \lambda\neq 0}}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{-\lambda-2}{\lambda}=-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$, άρα $\mathrm{B}\left(-\dfrac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$
Για y΄y βάζω $x=0$ στην εξίσωση της (ε) και έχω : $y=\lambda\cdot 0+\lambda+2 \Leftrightarrow y=\lambda+2$, άρα $\Gamma(0,\lambda+2)$
Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα :
$(\mathrm{OB})=(\mathrm{O\Gamma}) \Leftrightarrow \left|-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}\right|=|\lambda+2| \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda+2}{\lambda}\right|=|\lambda+2| \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda+2|}{|\lambda|}=|\lambda+2| \Leftrightarrow$

$$|\lambda+2|=|\lambda||\lambda+2| \Leftrightarrow |\lambda+2|-|\lambda||\lambda+2|=0 \Leftrightarrow |\lambda+2|(1-|\lambda|)=0 \Leftrightarrow$$

$|\lambda+2|=0 \Leftrightarrow \lambda+2=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-2}$ ή $1-|\lambda|=0 \Leftrightarrow |\lambda|=1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=1}$ ή $\boxed{\lambda=-1}$



- Για $\lambda=-2$ έχω : $(\varepsilon): y=\lambda x+\lambda+2 \overset{\lambda=-2}{\Leftrightarrow} y=-2x-2+2 \Leftrightarrow y=-2x$, απορρίπτεται γιατί αυτή η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν μπορεί να σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.
- Για $\lambda=1$ έχω : $(\varepsilon): y=\lambda x+\lambda+2 \overset{\lambda=1}{\Leftrightarrow} y=x+1+2 \Leftrightarrow y=x+3$, άρα : $\boxed{(\varepsilon_1): y=x+3}$
- Για $\lambda=-1$ έχω : $(\varepsilon): y=\lambda x+\lambda+2 \overset{\lambda=-1}{\Leftrightarrow} y=-x-1+2 \Leftrightarrow y=-x+1$, άρα : $\boxed{(\varepsilon_2): y=-x+1}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

48) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχεται από το σημείο Α(3,1) και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

49) Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το Α(2,1) και τέμνουν τους άξονες στα Β, Γ ώστε (ΟΒ)·(ΟΓ)=1.

50) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Ρ(3,2) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4τ.μ.

51) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(1,4)$ και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1): y=-x+4$ και $(\varepsilon_2): y=2x+3$ στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

52) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon): y=2x+3$ και $(\zeta): y=x-1$. Να βρείτε ευθεία (η), η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(2,3) και τέμνει τις (ε) και (ζ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε οι τεταγμένες των Α και Β να έχουν άθροισμα 8.

53) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon): y=\frac{1}{2}x+2$ και $(\zeta): y=\frac{1}{2}x-3$ και το σημείο $\mathrm{P}\left(2,\frac{1}{2}\right)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ), η οποία διέρχεται από το Ρ και τέμνει τις (ε) και (ζ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε να ισχύει (ΑΒ)=5.

54) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon): y=2x+2$ και $(\zeta): y=2x-2$ και το σημείο $\mathrm{P}(0,2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ), η οποία διέρχεται από το Ρ και τέμνει τις (ε) και (ζ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ώστε να ισχύει (ΑΒ)=4.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : (ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΕΜΜΕΣΑ ΤΟ λ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

Όταν σε μια άσκηση ψάχνουμε εξίσωση ευθείας της οποίας μας δίνεται έμμεσα το λ δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης η οποία ικανοποιεί μια ιδιότητα 1, τότε ξεκινάμε πάντα : «έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας που ψάχνω», θα γνωρίζω το λ, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 ψάχνω να βρω το β.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

55) (Άσκηση 6 σελ.65 Ομάδας σχολικού βιβλίου) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία A και B, ώστε το άθροισμα της τετμημενης του A και της τεταγμένης του B να είναι ισο με 15.

Λύση :

Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, $(\varepsilon)\,//\,y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\frac{2}{3}$, άρα $(\varepsilon): y=-\frac{2}{3}x+\beta$.

Πρέπει να βρω τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες :

Για τον x΄x βάζω $y=0$ στην εξίσωση της (ε) και έχω : $(\varepsilon): 0=-\frac{2}{3}x+\beta \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=\beta \Leftrightarrow 2x=3\beta \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\beta$, άρα $\boxed{\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}\beta,0\right)}$

Για τον y΄y βάζω $x=0$ στην (ε) και έχω : $(\varepsilon): y=-\frac{2}{3}\cdot 0+\beta \Leftrightarrow y=\beta$, άρα $\boxed{\mathrm{B}(0,\beta)}$

Άρα : $x_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}=15 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\beta+\beta=15 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 3\beta+2\beta=30 \Leftrightarrow 5\beta=30 \Leftrightarrow \beta=6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας που ψάχνω είναι : $(\varepsilon): y=-\frac{2}{3}x+6$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

56) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+5$ και τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία A και B, ώστε το άθροισμα της τετμημενης του A και της τεταγμένης του B να είναι ισο με 5.

57) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{2}{3}x-4$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12τ.μ.

58) Να βρείτε τις ευθείες που έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ=2 και τέμνουν τους άξονες στα A, B ώστε (AB)=$\sqrt{5}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11 : (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ)

Έστω ότι έχουμε σημεία της μορφής $\mathrm{M}\left(f(\lambda), g(\lambda)\right)$, όπου $f(\lambda)$ και $g(\lambda)$ συναρτήσεις που έχουν μεταβλητή το λ. Για να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, εργαζόμαστε ως εξής : Θέτουμε $x = f(\lambda)$ και $y = g(\lambda)$ και κάνουμε απαλοιφή του λ στις 2 εξισώσεις. (Αυτή τη μεθοδολογία θα τη χρειαστούμε στη Γ΄ Λυκείου)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

59) Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο R, το σημείο $\mathrm{M}(2\lambda-3, 5-3\lambda)$ κινείται σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Λύση :

Έστω $\mathrm{M}(x, y)$ τότε $\begin{cases} x = 2\lambda - 3 \mid \cdot 3 \\ y = 5 - 3\lambda \mid \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6\lambda - 9 \\ 2y = 10 - 6\lambda \end{cases}$ προσθέτω κατά μέλη και έχω : $3x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = -3x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ άρα το σημείο Μ κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

60) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία $\mathrm{M}(2\lambda+1, 2\lambda-1)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \Re$.

61) Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο R, το σημείο Μ(λ+3,4λ-5) κινείται σε μια ευθεία οποίας να βρείτε την εξίσωση.

62) Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}(2\lambda-3, 6\lambda-11)$, με $\lambda \in \Re$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται πάνω σε ευθεία (ε)
ii. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\theta \in \Re$, το σημείο $\mathrm{B}\left(2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta, 1 + 3\eta\mu^2\theta\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 12 : (ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

63) Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90°\right)$. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Δ και φέρνουμε την κάθετη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδειχτεί ότι $\mathrm{BE} \perp \Delta\Gamma$.

64) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημείο Ε και στην πλευρά ΔΓ σημείο Ζ τέτοιο, ώστε ΔΖ=ΑΕ. Να αποδειχτεί ότι $\mathrm{BE} \perp \mathrm{AZ}$.

65) Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Έστω Μ το μέσο της ΔΖ. Να αποδείξετε ότι :

i. τα σημεία Δ, Α και Ζ είναι συνευθειακά
ii. το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

66) Ένα επιβατικό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς – Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδίου η θέση Μ του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy είναι $\mathrm{M}(2+\kappa t, \lambda+2t)$, όπου $\kappa, \lambda \in \Re$. Τη χρονική στιγμή t=5 το πλοίο διέρχεται από το σημείο Α(7,13).

i. Να βρείτε τις τιμές των κ,λ
ii. Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε):y=2x-1
iii. Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1, κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

67) Δίνονται τα σημεία Α(8,0) και Β(0,4) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ
iii. Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας ε . Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση : $\vec{\mathrm{MA}}^2+\vec{\mathrm{MB}}^2=2\vec{\mathrm{OM}}^2$.

68) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=x+5$ και $(\varepsilon_2): y=10$ και έστω Α το σημείο τομής των ευθειών. Θεωρούμε τα σημεία Β(6,11) και Δ(10,10) τα οποία ανήκουν στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Να βρείτε :

i. Ένα σημείο Γ(x,10) της ευθείας (ε_2) έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\mathrm{BA}}\cdot\vec{\mathrm{B\Gamma}}=0$
ii. Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\mathrm{AB}}$ και $\vec{\mathrm{A\Delta}}$
iii. Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ(10,10) και είναι κάθετη προς την ευθεία (ε_1).

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

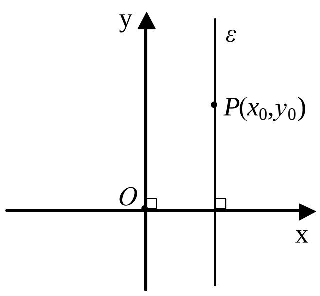
32. ΘΕΩΡΗΜΑ (σελ. 65 – 66 σχολικό)
Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $\boxed{\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0}$ **(1)**
με $\mathrm{A}\neq 0$ **ή** $\mathrm{B}\neq 0$ **και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.**

Απόδειξη :

- Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

— Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$, η οποία γράφεται $\lambda x+(-1)y+\beta=0$

- Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0,y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x=x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $x+0\cdot y+(-x_0)=0$.



Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

- Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

$Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

— Αν $B\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B}$,

που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0,-\frac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B=0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A\neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x=-\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\frac{\Gamma}{A},0\right)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ παριστάνει ευθεία.

33. Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία (σελ. 66 - 67 σχολικό)

Απάντηση :

- **Η ευθεία με εξίσωση** $Ax+By+\Gamma=0$ **είναι παράλληλη στο διάνυσμα** $\vec{\delta}=(B,-A)$**.**
- **Η ευθεία με εξίσωση** $Ax+By+\Gamma=0$ **είναι κάθετη στο διάνυσμα** $\vec{n}=(A,B)$**.**

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1:(ΙΔΙΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΜΕ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1)

Όλες οι μεθοδολογίες και οι ασκήσεις που είδαμε στην ενότητα 2.1 τις συναντάμε και στην ενότητα 2.2 και θα ακολουθήσουμε τις ίδιες διαδικασίες επίλυσης όπως έχουμε μάθει. Η μόνη διαφορά είναι ότι τις ευθείες δε θα τις συναντάμε στη μορφή $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$, αλλά στη γενική τους μορφή $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 2 σελ. 69 Α΄ομάδας σχολικού βιβλίου) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-3y+6=0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δυο ευθειών;

   Λύση :

   Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, $(\varepsilon)\perp(\zeta): 2x-3y+6=0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\zeta=-1$, όμως $\lambda_\zeta=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\dfrac{2}{-3}=\dfrac{2}{3}$, άρα $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{3}{2}$ άρα $(\varepsilon): y-y_0=\lambda_\varepsilon(x-x_0)\Leftrightarrow y-3=-\dfrac{3}{2}(x+2)\Leftrightarrow$

   $\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2y-6=-3(x+2)\Leftrightarrow 2y-6=-3x-6\Leftrightarrow 3x+2y=0$, άρα $\boxed{(\varepsilon): 3x+2y=0}$

   Για να βρω το σημείο τομής των δυο ευθειών $(\varepsilon),(\zeta)$ θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους. Έχω : $\begin{cases}(\varepsilon): 3x+2y=0\\(\zeta): 2x-3y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=0 & \cdot 3\\2x-3y=-6 & \cdot 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x+6y=0\\4x-6y=-12\end{cases}$,

   προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $13x=-12\Leftrightarrow x=-\dfrac{12}{13}$, και $3\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+2y=0\Leftrightarrow$

   $-\dfrac{36}{13}+2y=0\Leftrightarrow 2y=\dfrac{36}{13}\Leftrightarrow y=\dfrac{36}{26}\Leftrightarrow y=\dfrac{18}{13}$. Άρα $\boxed{\Gamma\left(-\dfrac{12}{13},\dfrac{18}{13}\right)}$

2. (Άσκηση 6 σελ. 70 Α΄ομάδας σχολικού βιβλίου) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\Re$, ώστε η ευθεία $3x+3y+\kappa=0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x+4y+6=0$ και $6x+5y-9=0$.

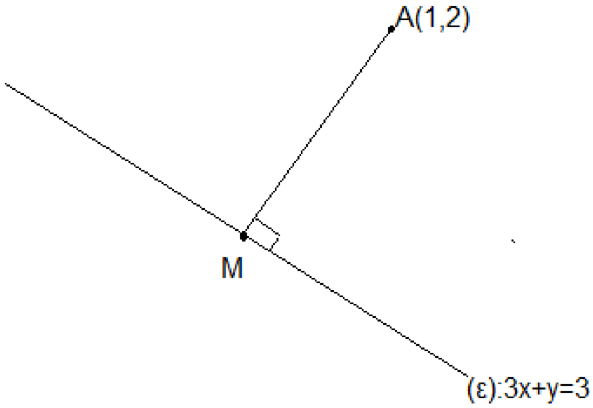
   Λύση :

   Αρχικά θα βρω το σημείο τομής των ευθειών $(\zeta): 3x+4y+6=0$ και $(\eta): 6x+5y-9=0$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους : $\begin{cases}(\zeta): 3x+4y+6=0\\(\eta): 6x+5y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y=-6 & \cdot(-2)\\6x+5y=9 & \end{cases}\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow\begin{cases}-6x-8y=12\\6x+5y=9\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $-3y=21\Leftrightarrow y=-7$, άρα $6x+5(-7)=9\Leftrightarrow 6x-35=9\Leftrightarrow 6x=44\Leftrightarrow x=\dfrac{44}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{22}{3}$ άρα το σημείο τομής των $(\zeta),(\eta)$ είναι $\mathrm{A}\left(\dfrac{22}{3},-7\right)$. Για να διέρχεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x+3y+\kappa=0$ από το σημείο Α πρέπει οι συντεταγμένες του Α να επαληθεύουν την εξίσωση της δηλ.

   $(\varepsilon): 3x+3y+\kappa=0 \overset{x=\frac{22}{3},\,y=-7}{\Longleftrightarrow} 3\dfrac{22}{3}+3(-7)+\kappa=0\Leftrightarrow 22-21+\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=-1$.

3. (Άσκηση 6 σελ. 70 Β΄ομάδας σχολικού βιβλίου) Δίνεται η ευθεία $3x+y=3$ και το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του Α στην ευθεία αυτή.
<u>Λύση :</u>



(Δες μεθοδολογία 7 ενότητα 2.1) Έστω Μ η προβολή του Α πάνω στην (ε), τότε : $(\mathrm{AM})\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{AM}}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$, όμως $\lambda_{\varepsilon}=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\frac{3}{1}=-3$, άρα $\lambda_{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}$ και άρα : $(\mathrm{AM}):(y-y_0)=\lambda_{\mathrm{AM}}(x-x_0)\Leftrightarrow(y-2)=\frac{1}{3}(x-1)\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}3(y-2)=x-1\Leftrightarrow 3y-6=x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3y+5=0$ δηλ. $(\mathrm{AM}):x-3y+5=0$. Το Μ είναι σημείο τομής των ευθειών $(\mathrm{AM}),(\varepsilon)$ άρα για να βρω τις συντεταγμένες του θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους : $\begin{cases}(\mathrm{AM}):x-3y+5=0\\(\varepsilon):3x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y=-5\\3x+y=3\end{cases}\Big|\cdot(-3)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+9y=15\\3x+y=3\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $10y=18\Leftrightarrow y=\frac{18}{10}\Leftrightarrow y=\frac{9}{5}$, άρα $x-3\frac{9}{5}+5=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ άρα $\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

4. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών με εξισώσεις :
   i. $(\varepsilon):3x+y-8=0$
   ii. $(\zeta):4x-y+4=0$
   iii. $(\eta):5x+2y+1=0$
   iv. $(\theta):2x-5y+3=0$

   Ποιες από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετες;

5. Δίνεται ευθεία $(\varepsilon):3x+y-1=0$. Να βρείτε :
   i. Ευθεία (ζ) που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Α(-2,-3)
   ii. Το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ)

6. Δίνεται ευθεία $(\varepsilon):6x-2y+5=0$. Να βρείτε :
   i. Ευθεία (ζ) που είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Α(2,-3)
   ii. Το σημείο τομής της ευθείας (ζ) με τους άξονες.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 3), Β(-1, 1), Γ(4, -3). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Β και
   i. είναι παράλληλη στη διάμεσο ΑΜ,
   ii. είναι κάθετη στη διάμεσο ΑΜ.

8. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,3), Β(1,5) και Γ(3,3). Να βρεθούν :
   i. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ.
   ii. Η εξίσωση του ύψους ΓΔ.
   iii. Οι εξισώσεις των διαμέσων ΑΚ, ΒΛ, ΓΝ.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ ενός τρίγωνου ΑΒΓ, αν Α(2,3) και οι δυο διάμεσοι (ΒΔ) : x-4y-4=0 και (ΓΕ) : 4x+5y-9=0 .

10. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Α(-1,4) και Γ(3,2).
    i. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου του ΒΔ.
    ii. Αν η πλευρά του ΑΒ έχει εξίσωση : x+y-3=0, να βρείτε τις κορυφές του Β και Δ.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(2,3) η οποία :
    i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=4x-3
    ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : 2x+4y-3=0
    iii. Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$
    iv. Είναι παράλληλη με τον χ'χ.
    v. Είναι παράλληλη με τον y'y.

12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(-2,3) η οποία :
    i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=5x-3
    ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : x+2y-3=0
    iii. Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega = \frac{2\pi}{3}$
    iv. Είναι παράλληλη με τον χ'χ.
    v. Είναι παράλληλη με τον y'y.

13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x+4y-11=0$ και $(\varepsilon_2): 2x-3y+21=0$ και επιπλέον :
    i. είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): x+2y+1=0$
    ii. είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): 3x-y+5=0$
    iii. διέρχεται από την αρχή των αξόνων
    iv. είναι παράλληλη με τον x΄x.
    v. είναι παράλληλη με τον y΄y.
    vi. είναι παράλληλη με τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
    vii. είναι παράλληλη με τη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων

14. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Α(5,-1) ως προς την ευθεία (ε) : x-2y-2=0.

15. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου Α(-1,3) ως προς την ευθεία (ε) : x-y+6=0.

16. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες και την ευθεία (ε) : 3x+4y-12=0.

17. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών (ε) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ) : 2x-3y+5=0 και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3τμ.

18. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών (ε) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ) : x-y+5=0 και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2τμ.
19. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών (ε) που είναι κάθετες στην ευθεία

(ζ) : 2x-y+1=0 και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4τμ.

20. Η ευθεία (ε) : 2x+3y-7=0 τέμνει την ευθεία ΑΒ η οποία ορίζεται από τα σημεία Α(1,1) και Β(7,-2) στο σημείο Μ. να αποδειχτεί ότι $\vec{AB} = 3\vec{BM}$.

21. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν Α(1,2) και δυο ύψη του έχουν εξισώσεις 2x-3y+1=0 και x+y=0.

22. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν Α(2,3) και δυο διάμεσοι του τριγώνου έχουν εξισώσεις x-4y-4=0 και 4x+5y-9=0.

23. Δίνονται τα σημεία Α(4,2) , Β(3,-5) και η ευθεία (ε) : 7x+y-23=0. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

24. Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι Α(-1,6) και οι εξισώσεις δυο πλευρών του είναι x+y-1=0 και x-y+11=0. Να βρεθούν οι κορυφές του ορθογωνίου.

25. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(2,0) , ενώ οι εξισώσεις μιας διαμέσου και ενός ύψους του που άγονται από διαφορετικές κορυφές είναι x-y+2=0 και 3x+y+2=0 αντίστοιχα. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

26. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(7,-4). Οι εξισώσεις μιας διχοτόμου και μιας διαμέσου του που άγονται από την ίδια κορυφή είναι 3x+y-7=0 και 11x+6y-35=0 αντίστοιχα. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ και οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.

27. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ με Α(2,-2), αν οι εξισώσεις μιας διχοτόμου και ενός ύψους του που άγονται από διαφορετική κορυφή είναι x-3y+2=0 και x+y+2=0 αντίστοιχα.

28. Δίνεται η ευθεία (ε) : x-2y-2=0 και το σημείο Α(5,-1). Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την (ε) .

29. Δίνεται η ευθεία (ε) : x-y+1=0 και το σημείο Α(2,1). Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την (ε) .

30. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 6$ και το σημείο Α(-1,3). Να βρείτε :
    i. την προβολή του σημείου Α στην ευθεία (ε)
    ii. το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).

31. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x - 3$ και το σημείο Α(3,1). Να βρείτε :
    i. την προβολή του σημείου Α στην ευθεία (ε)
    ii. το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : (ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ) Ή (ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ)

Έστω μια εξίσωση της μορφής : $\mathrm{A}(\lambda)\cdot x+\mathrm{B}(\lambda)\cdot y+\Gamma=0$ (1)

Α. Για να βρούμε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία, εργαζόμαστε ως εξής :

- Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων Α(λ)=0 και Β(λ)=0
- Για τις παραπάνω τιμές του λ, η εξίσωση **δεν** παριστάνει εξίσωση ευθείας, οπότε για οποιεσδήποτε άλλες τιμές του λ παριστάνει ευθεία.

Β. Για να αποδείξουμε ότι μια παραμετρική εξίσωση παριστάνει ευθείες που διέρχονται από σταθερό σημείο (ανεξάρτητο της παραμέτρου), εργαζόμαστε ως εξής :

- Δίνουμε στην παράμετρο δυο τυχαίες τιμές και προκύπτουν δυο ευθείες
- Βρίσκουμε το σημείο τομής Μ των παραπάνω ευθειών (λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους)
- Ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου τομής επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση (1) για κάθε τιμή της παραμέτρου.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

32. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-\lambda-2)y+\lambda^2+1=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda\in\Re$ η (1) παριστάνει ευθεία.

<u>Λύση :</u>

Είναι: $A=\lambda^2+\lambda-2$ και $B=\lambda^2-\lambda-2$
Εξετάζουμε πότε: Α=Β=0, (τότε η (1) δεν παριστάνει ευθεία).
$A=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$
$B=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda_{1'}=-1,\ \lambda_{2'}=2.$
Παρατηρούμε λοιπόν ότι δεν υπάρχουν τιμές του $\lambda\in\Re$ ώστε να είναι συγχρόνως μηδέν και ο Α και ο Β. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση η (1) παριστάνει ευθεία.

33. Δίνεται η εξίσωση $(3-\lambda)x+(\lambda+1)y=\lambda+5$ (1) με $\lambda\in R$.

i) Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda\in\Re$ η (1) παριστάνει ευθεία.
ii) Να δειχθεί ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$, όλες οι ευθείες περνούν από σταθερό σημείο.

<u>Λύση</u> :

i) Είναι: Α=3-λ και Β=λ+1
Είναι: Α=0 όταν λ=3 και Β=0 όταν λ=-1, άρα δεν μπορεί να είναι συγχρόνως Α=0 και Β=0 συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\Re$.

ii) Δίνονται στο λ δύο αυθαίρετες τιμές. Βρίσκουμε δύο από τις εξισώσεις, των οποίων βρίσκουμε το κοινό τους σημείο. Αρκεί αυτό να επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\Re$.
Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται : $3x+y=5:(\varepsilon_1)$
Για $\lambda=3$ η (1) γίνεται : $(3-3)x+4y=8 \Leftrightarrow y=2:(\varepsilon_2)$ τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τις κάνω σύστημα και έχω : $\begin{cases}3x+y=5\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2=5\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ άρα το κοινό τους σημείο είναι το $\mathrm{K}(1,2)$. Αρκεί να δείξω ότι το $\mathrm{K}(1,2)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\Re$. Έχω :

$$(1):(3-\lambda)x+(\lambda+1)y=\lambda+5 \overset{x=1,y=2}{\Longleftrightarrow} (3-\lambda)\cdot 1+(\lambda+1)\cdot 2=\lambda+5 \Leftrightarrow 3-\lambda+2\lambda+2=\lambda+5 \Leftrightarrow 0=0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda \in \Re$. Άρα όλες οι ευθείες της (1) περνούν (διέρχονται) από το σταθερό σημείο $\mathrm{K}(1,2)$.

34. (Εφαρμογή 1 σελ. 67 σχολ. βιβλίου)

Δίνεται η εξίσωση : $(x-2y+5)+\lambda(3x+2y+7)=0$ (1) όπου $\lambda \in R$.

i. Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \Re$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.
ii. Να δειχθεί ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (Οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
iii. Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y=2x$;

Λύση :

i. Πρώτα πρέπει να φέρω την εξίσωση στη γενική της μορφή ($\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$) έχω :

$(x-2y+5)+\lambda(3x+2y+7)=0 \Leftrightarrow x-2y+5+3\lambda x+2\lambda y+7\lambda=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{(3\lambda+1)x+(2\lambda-2)y+7\lambda+5=0}$ (2), άρα είναι : $\mathrm{A}=3\lambda+1$, $\quad \mathrm{B}=2\lambda-2$, $\quad \Gamma=7\lambda+5$

$\mathrm{A}=0 \Leftrightarrow 3\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow 2\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, άρα δεν μπορεί να είναι συγχρόνως Α=0 και Β=0 συνεπώς η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \Re$.

ii. Δίνονται στο λ δύο αυθαίρετες τιμές. Βρίσκουμε δύο από τις εξισώσεις, των οποίων βρίσκουμε το κοινό τους σημείο. Αρκεί αυτό να επαληθεύει την (2) για κάθε $\lambda \in \Re$.

Για $\lambda=0$ η (2) γίνεται : $x-2y+5=0:(\varepsilon_1)$

Για $\lambda=1$ η (2) γίνεται : $(3+1)x+(2-2)y+7+5 \Leftrightarrow 4x+12=0 \Leftrightarrow x=-3:(\varepsilon_2)$ τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τις κάνω σύστημα και έχω : $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-2y=-5 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=-2 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ άρα το κοινό τους σημείο είναι το $\mathrm{K}(-3,1)$. Αρκεί να δείξω ότι το $\mathrm{K}(-3,1)$ επαληθεύει την (2) για κάθε $\lambda \in \Re$. Έχω :

$(3\lambda+1)x+(2\lambda-2)y+7\lambda+5=0 \overset{x=-3,y=1}{\Longleftrightarrow} (3\lambda+1)(-3)+(2\lambda-2)\cdot 1+7\lambda+5=0 \Leftrightarrow$

$-9\lambda-3+2\lambda-2+7\lambda+5=0 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \Re$. Άρα όλες οι ευθείες της (2) περνούν (διέρχονται) από το σταθερό σημείο $\mathrm{K}(-3,1)$.

iii. Έστω (ε) η ευθεία της οικογένειας ευθειών (2), που είναι κάθετη στη (ζ). Τότε :

$(\varepsilon)\perp(\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta=-1$, όμως $\lambda_\zeta=2$, άρα $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{2}$. Όμως λογω της (2)

$\lambda_\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda-2}$, άρα τελικά

$\lambda_\varepsilon=-\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda-2} \Leftrightarrow -\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda-2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2(3\lambda+1)=2\lambda-2 \Leftrightarrow 6\lambda+2=2\lambda-2 \Leftrightarrow 4\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-1$. Οπότε η ευθεία (ε) γίνεται :

$(2):(3\lambda+1)x+(2\lambda-2)y+7\lambda+5=0 \overset{\lambda=-1}{\Leftrightarrow} (-3+1)x+(-2-2)y-7+5=0 \Leftrightarrow -2x-4y-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2y+1=0$. Δηλ. $\boxed{(\varepsilon): x+2y+1=0}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+2\lambda-8)x+(\lambda^2-4)y+\lambda^2-5\lambda+6=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1):
    i. Παριστάνει ευθεία
    ii. Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x
    iii. Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y
    iv. Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

36. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-4)x+(\lambda^2+2\lambda-8)y+\lambda^2-3\lambda+2=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1):
    i. Παριστάνει ευθεία
    ii. Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x
    iii. Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y
    iv. Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

37. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2+2\lambda-8)x+(\lambda^2-4)y+\lambda^2-5\lambda+6=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι :
    i. η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\neq 2$
    ii. όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

38. Δίνεται η εξίσωση $(x+y-5)+\lambda(2x+y-7)=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι :
    i. η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$
    ii. όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

39. Δίνεται η εξίσωση: $(\mu^2 + 2\mu)x + (\mu^2 + \mu - 2)y + \mu - 2=0$.
    i. Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση παριστάνει ευθεία ε.
    ii. Πότε η (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία δ: $x - 2y + 3=0$;

40. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x+(3\lambda-1)y+2\lambda-10=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι :
    i. η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$
    ii. όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

41. Δίνεται η εξίσωση $(3-\lambda)x+(4-\lambda)y+\lambda=0$ (1) με $\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι :
    i. η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$
    ii. όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
    iii. Να βρείτε το $\lambda\in R$, ώστε η ευθεία (ε) που έχει εξίσωση την (1) να είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : $4x+2y+13=0$

42. Δίνεται η εξίσωση: $(x - 3y + 6) + \lambda(2x - y + 4)=0$ (1) , $\lambda\in R$
    i. Να δειχθεί ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$
    ii. Να δειχθεί ότι όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

43. Δίνονται οι ευθείες (ε) : $(\mu-3)x+(\mu+1)y+2=0$ και (ζ) : $(\mu-1)x-(2\mu-1)y+\mu=0$.
    i. Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\mu\in R$.
    ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu\in R$, ώστε οι (ε) και (ζ) να είναι παράλληλες.

44. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon):(\mu-1)x+(\mu-4)y+3=0$ και $(\zeta):(\mu-2)x+(3\mu-7)y+2\mu=0$, $\mu\in R$.
    i. Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του $\mu\in R$.
    ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu\in R$, ώστε οι (ε) και (ζ) να είναι κάθετες.

45. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\alpha^2-\alpha-2)x+(\alpha^2+2\alpha-3)y+\alpha^2-9=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in\Re$. Για ποιες τιμές του α η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για ποιες από το σημείο Α (-1, 0).

46. Να δειχθεί ότι οι ευθείες της οικογένειας ε: (λ + 1)x + (λ – 1)y + 2λ=0, με $\lambda\in R$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Α και μετά να βρείτε εκείνη την ευθεία της οικογένειας που είναι κάθετη στην ευθεία η: y=2x.

47. α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\Re$ για τις οποίες η εξίσωση : $(\alpha^2-1)x+(\alpha^2+2\alpha+1)y-\alpha^2+1=0$ (1) παριστάνει ευθεία .
β. Για ποια τιμή του $\alpha\in\Re$ η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο Λ(1, 0) ;
γ. Για ποια τιμή του $\alpha\in\Re$ η παραπάνω εξίσωση είναι παράλληλη με τον y΄y ;
δ. Για α = 0 η ευθεία (1) τι γωνία σχηματίζει με τον άξονα x΄x ;
ε. Αν η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα με συντεταγμένες (1,2) να υπολογίσετε την τιμή του α. (Κάθε υποερώτημα είναι ξεχωριστό)

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : (ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ)

Όταν μας ζητούν τη γωνία ευθειών (ε_1) : $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και (ε_2) : $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$:

- Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(B_1,-A_1)$ και $\vec{\delta_2}=(B_2,-A_2)$ για τα οποία είναι $\vec{\delta_1}//(\varepsilon_1)$ και $\vec{\delta_2}//(\varepsilon_2)$.
- Βρίσκουμε τη γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$ με τη βοήθεια του τύπου: $$\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}$$.
- Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη γωνία των ε_1 και ε_2 είναι ίση με τη γωνία φ των $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

48. Να υπολογιστεί η γωνία των ευθειών: ε_1: x-5y+2=0 και ε_2: 2x+3y+1=0.
<u>Λύση</u>:
Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta_1}=(-5,-1)$ και $\vec{\delta_2}=(3,-2)$. Είναι $\vec{\delta_1}//(\varepsilon_1)$ και $\vec{\delta_2}//(\varepsilon_2)$.
Η γωνία των ε_1 και ε_2 είναι ίση με τη γωνία φ των $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$
Έχουμε:
$$\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}=\frac{-5\cdot3+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{-15+2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{-13}{\sqrt{2}\cdot13}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=$$
$=-\sigma\upsilon\nu45^\circ=\sigma\upsilon\nu135^\circ$ Άρα: φ=135°.

(Αν μας ζητούν την οξεία γωνία των $ε_1$ και $ε_2$, αυτή θα είναι παραπληρωματική της φ, η ω=45^{o}.)

49. (Εφαρμογή 3 σελ.69 σχολ. βιβλίο) Να βρεθεί η γωνία των ευθειών: $(\varepsilon_1): y = x+1$ και $(\varepsilon_2): y = -2x+3$

Λύση:

Έχω : $(\varepsilon_1): x-y+1=0$ και $(\varepsilon_2): 2x+y-3=0$

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta_1} = (-1,-1)$ και $\vec{\delta_2} = (1,-2)$. Είναι $\vec{\delta_1} // (\varepsilon_1)$ και $\vec{\delta_2} // (\varepsilon_2)$.

Η γωνία των $ε_1$ και $ε_2$ είναι ίση με τη γωνία φ των $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$

Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \dfrac{-1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{-1+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. Άρα : $\phi \approx 72°$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

50. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $ε_1$: 4x – 3y – 5=0 και $ε_2$: 7x + y – 10=0.

51. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 3x+y-5=0 και (ζ) : 2x-y+1=0.

52. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 5x-y+3=0 και (ζ) : 3x+2y-5=0.

53. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ και (ζ) : $\sqrt{3}x - 3y + 13 = 0$.

54. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 2x+y-3=0 και (ζ) : $(2-\sqrt{3})x + (2\sqrt{3}+1)y - 5 = 0$.

55. Δίνεται η ευθεία (ε) : $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ και το σημείο Ρ(2,3). Να βρείτε ευθεία (ζ) που διέρχεται από το Ρ και σχηματίζει με την ευθεία (ε) οξεία γωνία ιση με $30°$.

56. Δίνεται η ευθεία (ε) : $\sqrt{3}x - 3y + 5 = 0$ και το σημείο $P(\sqrt{3},-4)$. Να βρείτε ευθεία (ζ) που διέρχεται από το Ρ και σχηματίζει με την ευθεία (ε) οξεία γωνία ιση με $60°$.

57. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ:y=3x–1, διάμεσος ΓΜ: y=5 και ύψος ΑΔ: y=–2x+14.
    i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Μ και Β.
    ii. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ,
    iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ
    iv. Να βρείτε τη γωνία Β.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : (ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ)

Όταν έχουμε δύο ευθείες ($ε_1$):αx+βy=γ και ($ε_2$):α΄x+β΄y=γ΄ τότε για να βρω τη σχετική τους θέση αρκεί να λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους.

- Αν το σύστημα έχει μια λύση (x, y) τότε οι δυο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο το (x, y)
- Αν το σύστημα είναι αδύνατο, τότε οι δυο ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε λέμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες
- Αν το σύστημα είναι αόριστο, τότε οι δυο ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία και λέμε ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

Αν οι ευθείες που δίνονται είναι παραμετρικές τότε για να βρω τη σχετική τους θέση, δηλαδή για να λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους χρησιμοποιώ τη μέθοδο των οριζουσών.

ΘΥΜΗΣΟΥ ! ! !

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2 ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$. Θεωρούμε τους αριθμούς

$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta$ (Ορίζουσα D του συστήματος)

$D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\gamma'\beta$ (Ορίζουσα D_x : δεν έχει x, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους)

$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ (Ορίζουσα D_y : δεν έχει y, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους)

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών : βρίσκουμε τις ορίζουσες των D, D_x, D_y και μετά :

- Αν $D\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x,y), όπου : $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$
 (οι δυο ευθείες τέμνονται)
- Αν $D=0$ και $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
 (οι δυο ευθείες είναι παράλληλες)
- Αν $D=0$ και $D_x=0$ και $D_y=0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις. (οι δυο ευθείες ταυτίζονται)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των οριζουσών.
Συγκεκριμένα ακλουθούμε τα εξής βήματα :
ΒΗΜΑ 1 : Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y
ΒΗΜΑ 2 : Λύνουμε την εξίσωση $D=0$
ΒΗΜΑ 3 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D\neq 0$
ΒΗΜΑ 4 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D=0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των ευθειών $(\varepsilon_1):(\kappa^2+\kappa-6)x+\kappa y+3=0$ και $(\varepsilon_2):(\kappa^2+3\kappa)x+(\kappa-2)y+9=0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in\Re$.

Λύση:

Έχω : $(\varepsilon_1):(\kappa^2+\kappa-6)x+\kappa y=-3$ και $(\varepsilon_2):(\kappa^2+3\kappa)x+(\kappa-2)y=-9$

ΒΗΜΑ 1 :

$D=\begin{vmatrix} \kappa^2+\kappa-6 & \kappa \\ \kappa^2+3\kappa & \kappa-2 \end{vmatrix}=(\kappa^2+\kappa-6)(\kappa-2)-\kappa(\kappa^2+3\kappa)=\kappa^3-2\kappa^2+\kappa^2-2\kappa-6\kappa+12-\kappa^3-3\kappa^2=$

$=-4\kappa^2-8\kappa+12=-4(\kappa^2+2\kappa-3)=-4(\kappa-1)(\kappa+3)$

$$D_x=\begin{vmatrix}-3 & \kappa\\ -9 & \kappa-2\end{vmatrix}=-3(\kappa-2)-\kappa(-9)=-3\kappa+6+9\kappa=6\kappa+6=6(\kappa+1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\kappa^2+\kappa-6 & -3\\ \kappa^2+3\kappa & -9\end{vmatrix}=-9(\kappa^2+\kappa-6)+3(\kappa^2+3\kappa)=-9\kappa^2-9\kappa+54+3\kappa^2+9\kappa=$$

$$=-6\kappa^2+54=-6(\kappa^2-9)=-6(\kappa-3)(\kappa+3)$$

ΒΗΜΑ 2 : $D=0\Leftrightarrow -4(\kappa-1)(\kappa+3)=0\Leftrightarrow \kappa=1$ ή $\kappa=-3$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq 1,\&\kappa\neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την : $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{6(\kappa+1)}{-4(\kappa-1)(\kappa+3)}$, $\quad y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-6(\kappa-3)(\kappa+3)}{-4(\kappa-1)(\kappa+3)}=\dfrac{3(\kappa-3)}{2(\kappa-1)}$, δηλ. οι δυο ευθείες τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{6(\kappa+1)}{-4(\kappa-1)(\kappa+3)},\dfrac{3(\kappa-3)}{2(\kappa-1)}\right)$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D=0\Leftrightarrow \kappa=1$ ή $\kappa=-3$ τότε :

- Αν $\kappa=1$ $\quad(\varepsilon_1):-4x+y+3=0$ και $(\varepsilon_2):4x-y+9=0$, τότε : $\begin{cases}(\varepsilon_1):-4x+y=-3\\(\varepsilon_2):4x-y=-9\end{cases}$

  προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $0=-12$ αδύνατο, άρα οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες δηλ. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.
- Αν $\kappa=-3$ $\quad(\varepsilon_1):0x-3y+3=0\Leftrightarrow y=1$ και $(\varepsilon_2):0x-5y+9=0\Leftrightarrow y=\dfrac{9}{5}$, τότε : $\begin{cases}(\varepsilon_1):y=1\\(\varepsilon_2):y=\dfrac{9}{5}\end{cases}$ προφανώς το σύστημα είναι αδύνατο, άρα οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες δηλ. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

58. Δίνονται οι ευθείες ε_1:λx+8y-4λ+4=0 και ε_2:(λ-1)x+(λ+2)y-3λ+4=0. Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$.

59. Δίνονται οι ευθείες ε_1:λx+(λ-2)y-2=0 και ε_2:(λ-1)x+(λ-3)y-4=0.
    1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda\in\Re$.
    2. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$, το σημείο τομής Μ των ε_1, ε_2 κινείται πάνω σε ευθεία.

60. Δίνονται οι ευθείες ε_1:λx+(λ+1)y-3=0 και ε_2:(λ-2)x+λy-1=0.
    1. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ οι ευθείες ε_1, ε_2 έχουν μοναδικό κοινό σημείο.
    2. Να βρεθεί το $\lambda\in\Re$ ώστε η ευθεία (ζ): 3x+2y+3=0 να διέρχεται από το μοναδικό κοινό σημείο των ε_1, ε_2 .

61. Οι ευθείες ε_1: μx+(μ–6)y+μ+2=0 και ε_2: (μ–2)x+(μ–5)y–μ–3=0 είναι παράλληλες. Να βρείτε το μ.

62. Δίνονται οι ευθείες ε_1:λx+(λ+3)y-6=0 και ε_2:(λ-1)x+(λ+2)y-3=0.
    1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda\in\Re$.
    2. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$, το σημείο τομής Μ των ε_1, ε_2 κινείται πάνω σε ευθεία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\Gamma xy+\Delta x+\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4y^2+2x+8y-3=0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Λύση :

1ος Τρόπος : (Συμπλήρωση τετραγώνου)

Έχω :

$$x^2-4y^2+2x+8y-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x-(4y^2-8y)-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-\left(4y^2-8y+4\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-\left((2y)^2-2\cdot 2y\cdot 2+2^2\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-(2y-2)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+1-(2y-2)\right)\left(x+1+2y-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+1-2y+2\right)\left(x+1+2y-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2y+3\right)\left(x+2y-1\right)=0 \Leftrightarrow \boxed{x-2y+3=0:(\varepsilon_1)} \text{ ή } \boxed{x+2y-1=0:(\varepsilon_2)}$$

2ος Τρόπος : (Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης θεωρώντας άγνωστο το x)

Στην εξίσωση : $x^2-4y^2+2x+8y-3=0$ έστω ότι ο άγνωστος είναι το x άρα το y είναι απλός αριθμός. Άρα έχω : $x^2+2x-4y^2+8y-3=0$ είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με $\alpha=1,\ \beta=2$ και $\gamma=-4y^2+8y-3$

Άρα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-4(-4y^2+8y-3)=4+16y^2-32y+12=16y^2-32y+16=(4y-4)^2$

Άρα $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-2\pm\sqrt{(4y-4)}}{2} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=\dfrac{-2+4y-4}{2} \\ x=\dfrac{-2-4y+4}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=2y-3 \\ x=-2y+1 \end{array} \right.$ Άρα έχω τις ευθείες : $\boxed{x-2y+3=0:(\varepsilon_1)}$ και $\boxed{x+2y-1=0:(\varepsilon_2)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64. Δίνεται η εξίσωση $6x^2-y^2=xy$ (1).
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
   ii. Να βρείτε τη γωνία των δυο αυτών ευθειών.

65. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2y^2-xy-3x+9y-4=0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

66. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-2x+2y-3=0$ (1).
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2
   ii. Έστω ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνουν τον άξονα y΄y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και έστω Μ το μέσο του ΑΒ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το Μ και είναι παράλληλη στις ε_1, ε_2 .

67. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-2y^2-3xy-7x-y+3=0$ (1).
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες
   ii. Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών.

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

34. Ποιος τύπος δίνει την Απόσταση Σημείου από Ευθεία ; (σελ. 71 σχολικό)

Απάντηση :

$$d(M_0,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

35. Ποιος τύπος δίνει το Εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ ; (σελ. 73 σχολικό)

Απάντηση :

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : (ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ)

Έστω $(\varepsilon):\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου και $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε) συμβολίζεται με $d(\mathrm{M},\varepsilon)$ και είναι ιση με : $d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(1,-2)$ από την ευθεία $(\varepsilon):-4x+3y+25=0$.

Λύση :

$$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\frac{|-4\cdot1+3\cdot(-2)+25|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-4-6+25|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

2. (Άσκηση 5 σελ. 76 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $x-y+2=0$, τα οποία απέχουν από την ευθεία $12x-5y+60=0$ απόσταση ιση με 1.

Λύση :

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ το σημείο της ευθείας $(\varepsilon):x-y+2=0$ που ψάχνω. Το Μ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon):x-y+2=0\Leftrightarrow y=x+2$ άρα την επαληθεύει δηλ. $\mathrm{M}(x,x+2)$. Επίσης η απόσταση το Μ από την ευθεία $(\zeta):12x-5y+60=0$ είναι ιση με 1 άρα :

$$d(\mathrm{M},\zeta)=1\Leftrightarrow\frac{|12x-5(x+2)+60|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=1\Leftrightarrow\frac{|12x-5x-10+60|}{\sqrt{169}}=1\Leftrightarrow\frac{|7x+50|}{13}=1\Leftrightarrow|7x+50|=13\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 7x+50=13\Leftrightarrow 7x=-37\Leftrightarrow x=-\dfrac{37}{7}$ και $y=-\dfrac{37}{7}+2\Leftrightarrow y=-\dfrac{23}{7}$ άρα $\mathrm{M}_1\left(-\dfrac{37}{7},-\dfrac{23}{7}\right)$

ή

$\Leftrightarrow 7x+50=-13\Leftrightarrow 7x=-63\Leftrightarrow x=-9$ και $y=-9+2\Leftrightarrow y=-7$ άρα $\mathrm{M}_2(-9,-7)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

3. Να βρεθεί η απόσταση
   i. του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ε) : 3x-4y-11=0
   ii. του σημείου P(2,-3) από την ευθεία (η) : 5x+12y-13=0
   iii. του σημείου Ν(1,2) από την ευθεία (ε) : 5x-12y-7=0

4. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α(1,4) από τις ευθείες :
   i. (ε):y=2x-8
   ii. (ζ):y=3x-9
   iii. (η):y=5
   iv. (θ):x=7

5. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(-1,3) απέχει από τις ευθείες (ε) : 12x+5y+10=0 και (η) : 3x+4y-14=0

6. Δίνονται τα σημεία Α(4,-2) , Β(2,-8) , Γ(-1,13). Να βρείτε :
   i. Την εξίσωση της ευθείας ΒΓ
   ii. Την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ΒΓ.

7. Δίνονται οι ευθείες (ε) : 2x+y-1=0 , (ζ) : 7x+2y+4=0 και (η) : 3x-y-9=0. Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των (ε) και (ζ) από την ευθεία (η).

8. Δίνονται οι ευθείες (ε) : 5x+y-9=0 , (ζ) : 3x-2y-8=0 και (η) : λx+3y-3λ-6=0. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \Re$, το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) απέχει από την ευθεία (η) απόσταση ιση με $\sqrt{10}$.

9. Δίνεται η εξίσωση $2x + y - 5 + \lambda(x + 2y - 1) = 0$ (1) .
   i. Να αποδειχτεί ότι η (1) παριστάνει εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda \in \Re$.
   ii. Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Ρ το οποίο και να βρείτε.
   iii. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Ρ από την ευθεία (η) : 5x+12y+10=0

10. Δίνεται η ευθεία (ε) : y=2x-3. Να βρείτε :
    i. Την απόσταση του σημείου Α(6,-1) από την ευθεία (ε)
    ii. Τα σημεία της ευθείας (ε) που απέχουν από την ευθεία (ζ) : 12x-5y+7=0 απόσταση ιση με 2.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : (ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ)

Έστω $(\varepsilon_1): y=\lambda x+\beta_1$ και $(\varepsilon_2): y=\lambda x+\beta_2$ δυο παράλληλες ευθείες. Για να βρω την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2), βρίσκω ένα σημείο $\mathrm{N}(x_0, y_0)$ σε μια από τις 2 (συνήθως σημείο τομής με άξονες) και στη συνέχεια υπολογίζω την απόσταση του Ν από την άλλη. $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\mathrm{N},\varepsilon)=\dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11. (Άσκηση 3 σελ. 75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y-24=0$.
  i. Να δείξετε ότι $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$
  ii. Να βρείτε ένα σημείο της (ε_1) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των (ε_1) και (ε_2).

Λύση :

  i. Έχω : $\lambda_{(\varepsilon_1)}=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\dfrac{4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

  $\lambda_{(\varepsilon_2)}=-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\dfrac{4}{-3}=\dfrac{4}{3}$ άρα $\lambda_{(\varepsilon_1)}=\lambda_{(\varepsilon_2)}\Leftrightarrow(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$

  ii. Για να βρω την απόσταση των παραλλήλων ευθειών (ε_1) και (ε_2), συμφώνα με τη μεθοδολογία, θα πρέπει πρώτα να βρω ένα σημείο που να ανήκει σε μια από τις δυο ευθείες και μετά να υπολογίσω την απόσταση του σημείου αυτού από την άλλη ευθεία. Έτσι λοιπόν : στην $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ για $x=0$ έχω :

  $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0\overset{x=0}{\Leftrightarrow}4\cdot0-3y-9=0\Leftrightarrow 3y=-9\Leftrightarrow y=-3$ άρα το σημείο $\mathrm{M}(0,-3)\in(\varepsilon_1)$
  Άρα
  $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)=\dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\dfrac{|4\cdot0+-3\cdot(-3)-24|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|9-24|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|-15|}{5}=\dfrac{15}{5}=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=2x+7$ και $(\varepsilon_2): y=2x-3$. Να αποδείξετε ότι είναι παράλληλες και στη συνέχεια να βρεθεί η απόσταση των δυο ευθειών.

13. Έστω $(\varepsilon_1): y=2x+7$ και $(\varepsilon_2): y=2x-3$ δυο παράλληλες ευθείες. Να βρεθεί η απόσταση των δυο ευθειών.

14. Οι εξισώσεις 2 πλευρών ενός τετραγώνου είναι (ΑΒ) : 2x-y+1=0 και (ΓΔ) : y=2x+5. Να βρείτε την απόσταση των απέναντι πλευρών και στη συνέχεια το εμβαδόν του τετραγώνου.

15. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): ax+(2-a)y-24=0$ και $(\varepsilon_2): (a-4)x+(5-a)y+18=0$.
  i. Αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες να βρείτε το α
  ii. Την απόσταση των (ε_1) και (ε_2).

16. Δίνεται η εξίσωση : $4x^2+y^2-4xy-6x+3y-4=0$

i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2).
ii. Να βρείτε την απόσταση των δυο ευθειών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : (ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ)

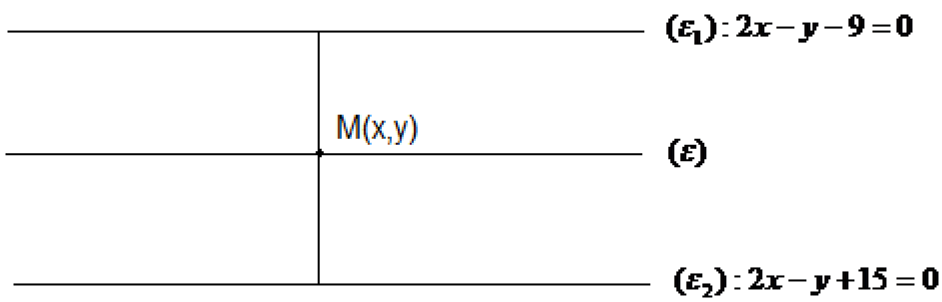
Μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις (ε_1) και (ε_2).

Περίπτωση 1 Όταν μας δίνουν τις εξισώσεις των δυο παραλλήλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) και μας ζητούν να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης τότε : παίρνω ένα τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ που ανήκει στη μεσοπαράλληλη, για το οποίο ισχύει $d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)$. Η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην εξίσωση της μεσοπαράλληλης.

Περίπτωση 2 Όταν μας δίνουν τη μεσοπαράλληλη (ε) δυο ευθειών (ε_1) και (ε_2) που απέχουν m μονάδες μεταξύ τους και μας ζητούν να βρούμε τις εξισώσεις των (ε_1) και (ε_2) τότε : παίρνω ένα τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ που ανήκει σε μια από τις (ε_1) και (ε_2). Τότε ισχύει $d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{m}{2}$. Η σχέση αυτή μας οδηγεί στις εξισώσεις των μεσοπαραλλήλων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλος των ευθειών $(\varepsilon_1):2x-y-9=0$ και $(\varepsilon_2):2x-y+15=0$.
(Περίπτωση 1)
Λύση :

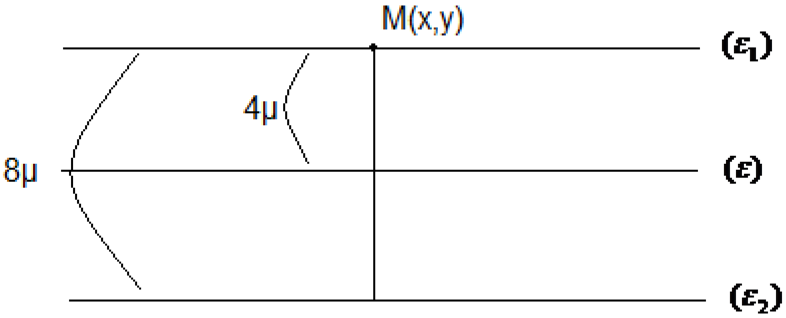


Έστω (ε) η μεσοπαράλληλος των (ε_1) και (ε_2) και έστω $\mathrm{M}(x,y)\in(\varepsilon)$. Τότε ισχύει :

$$d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)\Leftrightarrow \frac{|2x-y-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2x-y+15|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\Leftrightarrow |2x-y-9|=|2x-y+15|\Leftrightarrow$$

- $2x-y-9=2x-y+15 \Leftrightarrow -9=15$ αδύνατο
  ή
- $2x-y-9=-(2x-y+15) \Leftrightarrow 2x-y-9=-2x+y-15 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 4x-2y+6=0 \Leftrightarrow 2x-y+3=0$ άρα $\boxed{(\varepsilon):2x-y+3=0}$.

18. (Άσκηση 6 σελ.75 σχολικού βιβλίου Α΄ ομάδας)
Η ευθεία $(\varepsilon): 3x-2y+1=0$ είναι μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) , που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών. (Περίπτωση 2)
<u>Λύση :</u>



Έστω $\mathrm{M}(x,y)\in(\varepsilon_1)$, τότε ισχύει $d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{8}{2}\Leftrightarrow d(\mathrm{M},\varepsilon)=4\Leftrightarrow \frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{13}}=4\Leftrightarrow |3x-2y+1|=4\sqrt{13}\Leftrightarrow$

- $3x-2y+1=4\sqrt{13}\Leftrightarrow 3x-2y+1-4\sqrt{13}=0$ άρα $\boxed{(\varepsilon_1): 3x-2y+1-4\sqrt{13}=0}$
  ή
- $3x-2y+1=-4\sqrt{13}\Leftrightarrow 3x-2y+1+4\sqrt{13}=0$ άρα $\boxed{(\varepsilon_2): 3x-2y+1+4\sqrt{13}=0}$

<u>**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**</u>

19. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλος των ευθειών (ε) : 2x-y-5=0 και (ζ) : 2x-y+3=0.

20. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλος των ευθειών (ε) : 2x+4y-3=0 και (ζ) : 2x+4y+11=0.

21. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των ευθειών ε_1: 3x + y – 1=0 και ε_2: 3x + y + 5=0.

22. Δίνονται οι ευθείες (ε) : 4x-3y-2=0 και (ζ) : 8x-6y+16=0. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (η) ώστε η (ε) να είναι μεσοπαράλληλη των (ζ) και (η).

23. Η ευθεία (ε) : 3x+4y-5=0 είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών (ζ) και (η) , των οποίων η απόσταση είναι 10. Να βρεθούν οι εξισώσεις των (ζ) και (η).
24. Δυο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ιση με 8 και έχουν ως μεσοπαράλληλη την ευθεία (η) : 3x-4y+12=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

25. Δυο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ιση με $2\sqrt{5}$ και έχουν ως μεσοπαράλληλη την ευθεία (η) : x+2y-3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

26. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): ax+(a-6)y+a+2=0$ και $(\varepsilon_2):(a-2)x+(a-5)y-a-3=0$.
   i. Αν οι (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες να βρείτε το α
   ii. Την απόσταση των (ε_1) και (ε_2).
   iii. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλος των (ε_1) και (ε_2).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ)

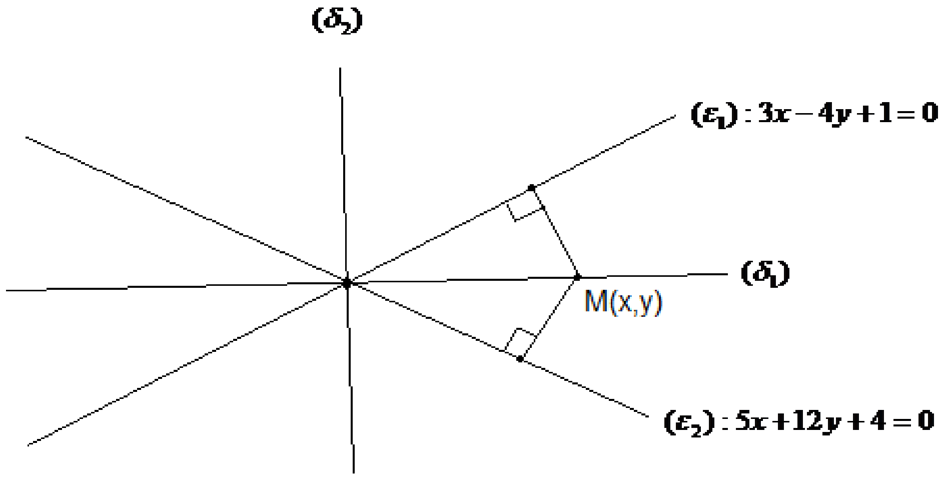
Διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Για να βρούμε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν δυο ευθείες, εργαζόμαστε ως εξής : παίρνω ένα τυχαίο σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ που ανήκει στη διχοτόμο μιας γωνίας που σχηματίζουν δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2). Τότε ισχύει $d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)$. Η σχέση αυτή μας οδηγεί σε εξισώσεις δυο ευθειών (δ_1) και (δ_2). Η μια από αυτές είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας και η άλλη της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2). Για να βρούμε ποια από τις δυο αντιστοιχεί στην οξεία και ποια στην αμβλεία εργαζόμαστε ως εξής : επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Α της (ε_1) (δίνω μια τιμή στο x και υπολογίζω το αντίστοιχο y) μετά βρίσκω τις αποστάσεις $d(\mathrm{A},\delta_1)$ και $d(\mathrm{A},\delta_2)$. Αν $d(\mathrm{A},\delta_1)<d(\mathrm{A},\delta_2)$, τότε η (δ_1) είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας και η (δ_2) της αμβλείας. Αν προκύψει ότι $d(\mathrm{A},\delta_1)=d(\mathrm{A},\delta_2)$ τότε οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

ΛΥΝΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27. (Άσκηση 8 σελ.76 σχολικού βιβλίου Β΄ ομάδας)
Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x-4y+1=0$ και $5x+12y+4=0$.

Λύση :



Έστω (δ_1) και (δ_2) οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x-4y+1=0$ και $(\varepsilon_2): 5x+12y+4=0$, και έστω $\mathrm{M}(x,y)\in(\delta_1)$, τότε ισχύει :

$$d(\mathrm{M},\varepsilon_1)=d(\mathrm{M},\varepsilon_2)\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5x+12y+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|5x+12y+4|}{13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13|3x-4y+1|=5|5x+12y+4|\Leftrightarrow$$

- $\Leftrightarrow 13(3x-4y+1)=5(5x+12y+4)\Leftrightarrow \Leftrightarrow 39x-52y+13=25x+60y+20\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 14x-112y-7=0\Leftrightarrow 2x-16y-1=0$ άρα $\boxed{(\delta_1): 2x-16y-1=0}$

  ή
- $\Leftrightarrow 13(3x-4y+1)=-5(5x+12y+4)\Leftrightarrow 39x-52y+13=-25x-60y-20\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 64x+8y+33=0$ άρα $\boxed{(\delta_2): 64x+8y+33=0}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28. α. Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 2x-y+3=0 και (ζ) : 3x-6y+5=0.
β. Ποια από τις παραπάνω ευθείες αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ);

29. α. Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 3x-4y+1=0 και (ζ) : 8x-6y+5=0.
β. Ποια από τις παραπάνω ευθείες αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ);

30. Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : x+2y-5=0 και (ζ) : 2x+y-7=0.

31. Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) : 3x+y+1=0 και (ζ) : x+3y-5=0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ) (ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1)

Όταν σε μια άσκηση ψάχνουμε εξίσωση ευθείας (ε) που **διέρχεται** από ένα γνωστό σημείο $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ και επιπλέον έχει μια ιδιότητα 1, τότε για να βρούμε την εξίσωση της, εργαζόμαστε ως εξής :

i. Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής $x = x_0$ ή $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ (από το σημείο Μ διέρχεται η κατακόρυφη $x = x_0$ και οι ευθείες με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, οπότε πρέπει να πάρουμε και τις 2 περιπτώσεις)
ii. Εξετάζουμε αν η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει την ιδιότητα 1. Αν την έχει, τότε η $x = x_0$ είναι μια από τις ζητούμενες ευθείες.
iii. Θεωρούμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ έχει την ιδιότητα 1 και βρίσκουμε τις τιμές του λ και τις αντίστοιχες ευθείες.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΕΜΕΣΑ ΤΟ λ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ) (ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1)

Όταν σε μια άσκηση ψάχνουμε εξίσωση ευθείας της οποίας μας δίνεται εμεσα το λ δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης η οποία ικανοποιεί μια ιδιότητα 1, τότε ξεκινάμε πάντα : «έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που ψάχνω», θα γνωρίζω το λ, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 ψάχνω να βρω το β.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

32. (Άσκηση 1 σελ.75 Β΄ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$.

Λύση :

Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, η (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$. Από το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ διέρχονται :

1) Η κατακόρυφη $(\varepsilon): x = x_0 \Leftrightarrow x = 0$, άρα η $(\varepsilon): x = 0$ απέχει από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$ άρα $d(\mathrm{A},\varepsilon) = d(\mathrm{B},\varepsilon) \Leftrightarrow \dfrac{|1\cdot(-2)+0\cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \dfrac{|1\cdot 0+0\cdot 2+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow 2 = 0$ αδύνατο.
2) Όλες οι ευθείες της μορφής : $(\varepsilon): y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \lambda(x-0) \Leftrightarrow y = \lambda x$ άρα : η $(\varepsilon): y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ απέχει από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,0)$ και $\mathrm{B}(0,2)$ άρα
$$d(\mathrm{A},\varepsilon) = d(\mathrm{B},\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot(-2)+(-1)\cdot 0+0|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} = \frac{|\lambda\cdot 0+(-1)\cdot 2+0|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow |-2\lambda| = \Leftrightarrow |-2| \Leftrightarrow 2|\lambda| = 2 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$. Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι : $\boxed{(\varepsilon_1): y = x}$ και $\boxed{(\varepsilon_2): y = -x}$

33. (Άσκηση 5 σελ.75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ιση με 5 μονάδες.

Λύση :

Έστω (ε) η ευθεία που ψάχνω, τότε $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \overset{\lambda=-3}{\Leftrightarrow} y = -3x + \beta$ δηλ. $(\varepsilon): 3x + y - \beta = 0$. Όμως η (ε) απέχει από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$ απόσταση ιση με 5 μονάδες, άρα :
$$d(\mathrm{O},\varepsilon) = 5 \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 0+1\cdot 0-\beta|}{\sqrt{3^2+1^2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-\beta|}{\sqrt{10}} = 5 \Leftrightarrow |\beta| = 5\sqrt{10} \Leftrightarrow \beta = 5\sqrt{10} \text{ ή } \beta = -5\sqrt{10}$$

- Αν $\beta = 5\sqrt{10}$ τότε : $\boxed{(\varepsilon_1): 3x + y - 5\sqrt{10} = 0}$
- Αν $\beta = -5\sqrt{10}$ τότε : $\boxed{(\varepsilon_2): 3x + y + 5\sqrt{10} = 0}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

34. Να βρείτε ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(5,-8) και απέχει από το σημείο Β(3,-2) απόσταση ιση με 2.

35. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ) : 3x+y-2011=0 και απέχουν από το σημείο Α(-4,2) απόσταση ιση με $2\sqrt{10}$.

36. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ) : 3x-4y+5=0 και απέχουν από το σημείο Α(2,3) απόσταση ιση με 3.

37. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : 4x+3y-7=0 και απέχει από το σημείο Α(1,1) απόσταση ιση με 3.

38. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ):2x – 3y + 1=0 και απέχουν από το Α(2, -1) 3 μονάδες.

39. Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α(1,2) και απέχουν από το σημείο Β(3,1) απόσταση d=2.

40. Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α(3,4) και απέχουν από το σημείο Β(0,2) απόσταση d=3.

41. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που σχηματίζουν γωνία $45°$ με τον άξονα x΄x και απέχουν από το σημείο Α(2,5) απόσταση ιση με $3\sqrt{2}$.

42. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (ζ) : 6x+8y-7=0 και απέχουν από το σημείο Α(1,2) απόσταση ιση με 3.

43. Δίνονται οι ευθείες (ε) : x-3y+1=0 και (ζ) : 2x+5y-9=0. Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο τομής των (ε) και (ζ) και :
    i. Απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ιση με 2.
    ii. Τα σημεία Α(-1,-1) και Β(4,5) ισαπέχουν από αυτές.

44. Δίνεται η ευθεία (ζ) : x+2y-25=0 και το σημείο Α(3,1). Να βρείτε :
    i. Την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ζ)
    ii. Τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στη (ζ) και απέχουν από το Α απόσταση ιση με $\sqrt{20}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6</u> : (ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ)

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο : $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$

οπου $\vec{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$, $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}})$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

45. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές : Α(-2,4) , Β(2,-6) και Γ(5,4).
    <u>Λύση :</u>
    $$\vec{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}) = (2+2, -6-4) = (4, -10)$$
    $$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}) = (5+2, 4-4) = (7, 0)$$
    $$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|4\cdot 0 - (-10)\cdot 7\right| = \frac{1}{2}|70| = 35\tau.\mu.$$

46. (Άσκηση 8 σελ.75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
    Δίνονται τα σημεία Α(5,1) και Β(1,3). Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα x΄x, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι ισο με 7.
    <u>Λύση :</u>
    Το $\mathrm{M} \in x'x$ άρα θα είναι της μορφής $\mathrm{M}(x,0)$. $(\mathrm{MAB}) = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{\mathrm{MA}}, \vec{\mathrm{AB}}\right)\right| = 7$
    $$\vec{\mathrm{MA}} = (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{M}}) = (5-x, 1-0) = (5-x, 1)$$

$\vec{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(1-5,3-1)=(-4,2)$. Οπότε :

$\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{MA},\vec{AB}\right)\right|=7\Leftrightarrow\left|\begin{vmatrix}5-x & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\right|=14\Leftrightarrow|2(5-x)+4|=14\Leftrightarrow|10-2x+4|=14\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|14-2x|=14\Leftrightarrow$

- $14-2x=14\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$ άρα $M_1(0,0)$
- $14-2x=-14\Leftrightarrow 2x=28\Leftrightarrow x=14$ άρα $M_2(14,0)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

47. Δίνονται τα σημεία Α(-2,1) , Β(3,4) και Γ(1,-6). Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

48. Δίνονται τα σημεία Α(2,4) , Β(-6,2) και Γ(0,10).
   i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
   ii. Να βρείτε σημείο Δ της ευθείας (ε) : 2x–y-3=0 , ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να έχει εμβαδόν ισο με 19τμ.
49. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 3), Β(-1, 4) και $E_{ΑΒΓ}$=8τμ η κορυφή Γ να ανήκει στην ευθεία (ε) : 3x + y + 1=0. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ.

50. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,-1), Β(4, 5) και $E_{ΑΒΓ}$=4τμ η κορυφή Γ να ανήκει στην ευθεία (ε) : 2x - y - 1=0. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ.

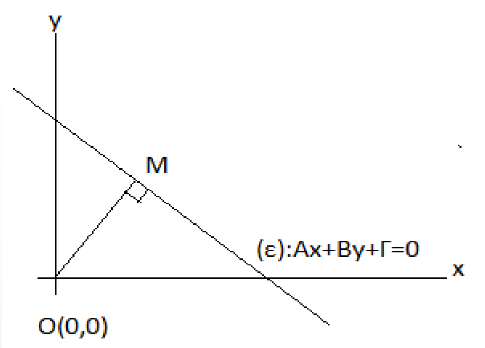
51. Δίνονται τα σημεία Α(8,3) , Β(6,-1). Να βρείτε σημείο Γ που ανήκει στον άξονα x΄x, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει εμβαδόν 7τμ.

52. Δίνονται τα σημεία Α(1,-2) , Β(3,4). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να έχει εμβαδόν 4τμ.

53. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) , Β(2,2) και σημείο Γ που ανήκει στην ευθεία $y=x+1$. Να βρείτε το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : (ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΑΠΕΧΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ)

Α) *Για να βρω την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας* $(\varepsilon): \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ *από την αρχή των αξόνων :*



Σχήμα 1

- $\min d = (\mathrm{OM}) = d(\mathrm{O},\varepsilon) = \dfrac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} = \dfrac{|\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot 0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} = \dfrac{|\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
- $\max d$ δεν υπάρχει

Β) *Για να βρω ποιο είναι το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων :*

αρκεί να βρω τις συντεταγμένες του σημείου Μ (σχήμα 1). Πιο συγκεκριμένα βρίσκω την εξίσωση της ευθείας (ΟΜ) και λύνω σύστημα με την εξίσωση της ευθείας (ε). Η διαδικασία είναι η εξής :

1^{ον}) $(\mathrm{OM}) \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{OM}} \cdot \lambda_\varepsilon = -1$, $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ άρα $\lambda_{\mathrm{OM}} = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ και η (ΟΜ) διέρχεται από το Ο(0,0) άρα έχει εξίσωση : $(\mathrm{OM}): y = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x$.

2^{ον}) Στη συνέχεια λύνω το σύστημα : $(\Sigma): \begin{cases} y = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x \\ \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \end{cases}$, αν η λύση του είναι το ζεύγος (x_1, y_1) τότε το ζητούμενο σημείο είναι : $\mathrm{M}(x_1, y_1)$.

(Αυτή τη μεθοδολογία θα τη χρειαστούμε στη Γ΄ Λυκείου)

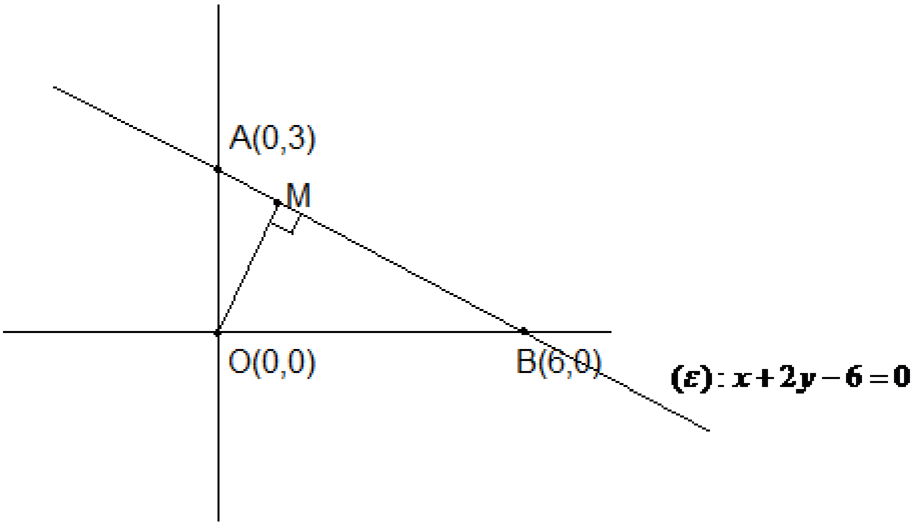
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x+2y-6=0$ και το σημείο $\mathrm{K}(2,-3)$.
   i. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων.
   ii. Να βρείτε ποιο είναι το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.
   iii. Να βρείτε ποιο σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Κ.

Λύση :

i. Αρχικά θα σχεδιάσω την ευθεία (ε). Για να σχεδιάσω μια ευθεία αρκεί να βρω δυο σημεία της, συνήθως διαλέγω σημεία τομής με τους άξονες. Έτσι έχω :

- Για $x=0$ η (ε) γίνεται : $(\varepsilon): x+2y-6=0 \overset{x=0}{\Leftrightarrow} 0+2y-6=0 \Leftrightarrow y=3$, άρα το $\mathrm{A}(0,3)$ σημείο τομής της (ε) με τον y΄y.
- Για $y=0$ η (ε) γίνεται : $(\varepsilon): x+2y-6=0 \overset{y=0}{\Leftrightarrow} x+2\cdot 0-6=0 \Leftrightarrow x=6$, άρα το $\mathrm{B}(6,0)$ σημείο τομής της (ε) με τον x΄x

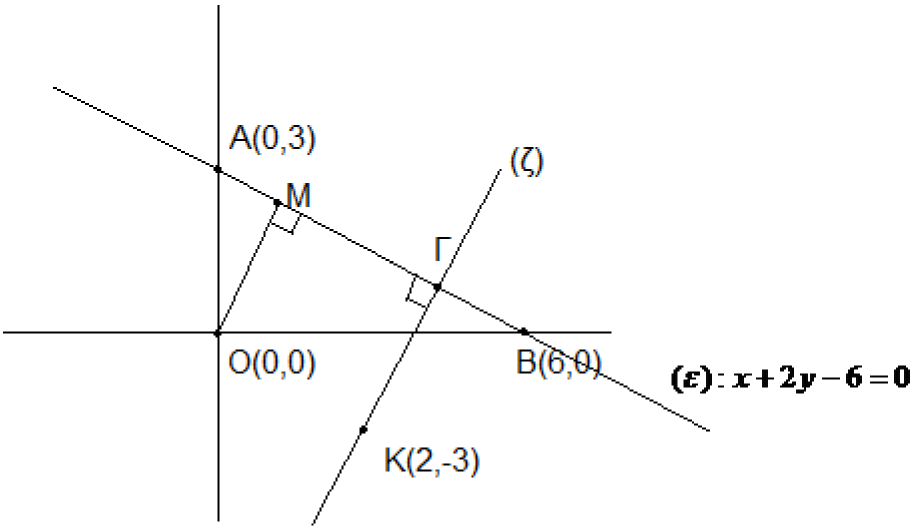


$$\min d=(\mathrm{OM})=d(\mathrm{O},\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ii. 1^{ον}) $(\mathrm{OM})\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{OM}}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$, $\lambda_{\varepsilon}=-\frac{1}{2}$ άρα $\lambda_{\mathrm{OM}}=2$ και η (ΟΜ) διέρχεται από το Ο(0,0) άρα έχει εξίσωση : $(\mathrm{OM}): y=2x$.

2^{ον}) Στη συνέχεια λύνω το σύστημα : $(\Sigma):\begin{cases} y=2x,(1) \\ x+2y-6=0,(2)\end{cases}$ η (2) λόγο της (1) γίνεται : $x+2\cdot 2x-6=0\Leftrightarrow 5x=6\Leftrightarrow x=\frac{6}{5}$, άρα από (1) $y=2\frac{6}{5}\Leftrightarrow y=\frac{12}{5}$, άρα $\mathrm{M}\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$.

iii. Έστω Γ το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Κ



Έστω επίσης (ζ) η ευθεία που διέρχεται από το Κ και είναι κάθετη στην (ε). Το Γ είναι σημείο τομής της (ζ) και της (ε). Έτσι : $(\zeta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow \lambda_{\zeta}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$, $\lambda_{\varepsilon}=-\frac{1}{2}$ άρα $\lambda_{\zeta}=2$ και επειδή η (ζ) διέρχεται από το $\mathrm{K}(2,-3)$ έχω :

$y+3=2(x-2) \Leftrightarrow 2x-y-7=0$ δηλ. $(\zeta): 2x-y-7=0$. Για να βρω τις συντεταγμένες του σημείου τομής της (ζ) και της (ε) θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων τους $\begin{cases}(\varepsilon): x+2y-6=0\\(\zeta): 2x-y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=6\\2x-y=7\end{cases}\Bigg|\cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=6\\4x-2y=14\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $5x=20 \Leftrightarrow x=4$ και $4+2y=6 \Leftrightarrow y=1$ άρα $\Gamma(4,1)$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

55. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x-4y-5=0$ και το σημείο $\mathrm{K}(-4,2)$.
   i. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων.
   ii. Να βρείτε ποιο είναι το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.
   iii. Να βρείτε ποιο σημείο της ευθείας (ε) απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Κ.

56. Δίνονται τα σημεία Α(-2,4) και Β(8,-1).
   i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ όπου Ο η αρχή των αξόνων.
   ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα Α,Β
   iii. Ποιο σημείο της ευθείας (ε) απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Γ(5,3);

57. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{M}(\lambda-4, 3\lambda-2)$ με $\lambda \in \Re$.
   i. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \Re$ τα σημεία Μ κινούνται σε ευθεία (ε), της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
   ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας (ε) από την αρχή των αξόνων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. Δίνονται τα σημεία Α(14,5) και Β(2,-1) .
   i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα Α και Β.
   ii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

(Θέμα εξετάσεων)

2. Δίνονται οι ευθείες (ε) : 3x-2y+1=0 και (ζ) : 2x+3y-8=0.
   i. Να αποδείξετε ότι είναι κάθετες
   ii. Υποθέτουμε ότι το σημείο Α(α,2) ανήκει στην ευθεία (ε) και το σημείο Β(-5,β) ανήκει στην ευθεία (ζ). Να βρείτε τις τιμές των α,β
   iii. Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(α,β) (α,β αυτά που βρήκατε στο ii) ανήκει στην ευθεία με εξίσωση 3x-y+3=0.
   iv. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ)

(Θέμα εξετάσεων)

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,4), Β(-1,0) και Γ(3,2). Να βρείτε:
   i. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
   ii. Την εξίσωση του ύψους ΑΔ.
   iii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
   iv. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΜ.

4. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,2), Β(1,3) και Γ(3,-2). Να βρεθούν :
   i. Η εξίσωση του ύψους ΑΔ.
   ii. Η εξίσωση της διαμέσου ΒΕ.
   iii. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο τομής Κ των ευθειών ΑΔ και ΒΕ και είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,4) , Β(-1,0) και Γ(3,2).
   i. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
   ii. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.
   iii. Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας Β του τριγώνου
   iv. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

6. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(1,2) και δυο ύψη του έχουν εξισώσεις x+y-1=0 και x-2y=0.
   i. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ
   ii. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α(2,3) και η οποία :
   i. Είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) : y=3x-67
   ii. Είναι κάθετη στην ευθεία (η) : $y=-\frac{3}{2}x+3$
   iii. Είναι παράλληλη με τον χ'χ.

8. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-3,3), Β(1,5) και Γ(3,3). Να βρεθούν :
   i. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ.
   ii. Η εξίσωση του ύψους ΓΔ.
   iii. Οι εξισώσεις των διαμέσων ΑΚ, ΒΛ, ΓΝ.
   iv. Οι εξισώσεις των μεσοκαθετων.
   v. Οι συντεταγμένες του περίκεντρου του τριγώνου. (σημείο τομής των μεσοκαθετων.)

9. Δίνονται τα σημεία Α (1, 4) και Β (- 1, - 5).
   i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
   ii. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
   iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.
   iv. Να βρείτε την προβολή της αρχής των αξόνων πάνω στην ευθεία ΑΒ

10. Ένας πολεοδομικός χάρτης είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ο δρόμος (δ_1) διέρχεται από τα σημεία Α(-2,1) και Β(-1,2) ενώ ένας άλλος δρόμος (δ_2) διέρχεται από τα σημεία Γ(5,2) και Δ(3,4).
   i. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν οι δυο δρόμοι στο χάρτη.
   ii. Να εξετάσετε αν οι δρόμοι τέμνονται κάθετα.
   iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες της διασταύρωσης Σ των δρόμων (δ_1) και (δ_2).
   iv. Να βρείτε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Ε του οικοδομικού τετραγώνου (ορθογωνίου), του οποίου οι 3 κορυφές είναι τα σημεία Β, Σ και Δ.

11. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(\lambda-1)x+(\lambda^2+5\lambda+6)y-\lambda+3=0$, $\lambda \in \Re$.
   i. Να δειχθεί ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \Re$.
   ii. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η ευθεία αυτή να είναι κάθετη στην (η): x+y-3=0
   iii. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η ευθεία αυτή να είναι παράλληλη στον άξονα y'y

12. Δίνεται η ευθεία (ε): x+y-2=0 και το σημείο Α(-3,1). Να βρείτε:
   i. Την εξίσωση της ευθείας (η), η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε).
   ii. Το σημείο τομής των (ε) και (η).
   iii. Το συμμετρικό Β του σημείου Α ως προς την (ε).

13. Δίνεται η εξίσωση : $\left(\alpha^2+2\alpha\right)x-\left(a^2+\alpha+1\right)y-\alpha^2-2=0$ (1)
   i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \Re$ η (1) παριστάνει ευθεία.
   ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.
   iii. Για ποιες τιμές του α η παραπάνω εξίσωση είναι παράλληλη στον χ΄χ ;
   iv. Να βρείτε την ευθεία (ε) που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην (η) : x-y+3=0

14. Δίνονται τα σημεία Α(8,0) και Β(0,4) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.
   i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.
   ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.
   iii. Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{OM}^2$ (Θέμα εξετάσεων)

15. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(4,-1). Δυο από τις διχοτόμους του τριγώνου έχουν εξισώσεις : $(\varepsilon_1): x-1=0$ και $(\varepsilon_2): x-y-1=0$. Να βρείτε :
   i. Το συμμετρικό Δ του Α ως προς την (ε_1).
   ii. Το συμμετρικό Ε του Α ως προς την (ε_2).
   iii. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου.

16. Δίνεται η εξίσωση $χ^2$-$ψ^2$+6χ+9=0.
    i. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες $ε_1$ και $ε_2$.
    ii. Να δείξετε οι 2 ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι κάθετες.
    iii. Να βρείτε ένα σημείο Μ(κ,λ) με κ>0 και λ>0 τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,\kappa)$ να είναι παράλληλο σε μία από τις δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-16,4\lambda)$ να είναι παράλληλο στην άλλη ευθεία.
    iv. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείουν οι δύο ευθείες και ο άξονας ψ΄ψ. (Θέμα εξετάσεων)

17. Ένα πλοίο κινείται ,σε μια θαλάσσια περιοχή, βορειοανατολικά με ευθεία πορεία η οποία σχηματίζει γωνία 60^0 με την κατεύθυνση δύση – ανατολή. Την στιγμή t = 0 το πλοίο βρίσκεται νότια ενός φάρου Ο και σε απόσταση από αυτόν 4 ναυτικά μίλια. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή τον φάρο και άξονα χ΄χ την κατεύθυνση δύση – ανατολή και μονάδα του κάθε άξονα το 1 ν. μ.
    i. Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του πλοίου.
    ii. Να βρείτε πόσο κοντά από τον φάρο θα περάσει το πλοίο.
    iii. Ο καπετάνιος του πλοίου παρατηρεί τη θέση ενός άλλου πλοίου το οποίο σε χρόνο t βρίσκεται στη θέση (2t+1 , t+2) για κάθε $t \geq 0$. Ποια είναι η πορεία του πλοίου;
    iv. Πρέπει να ανησυχεί ο καπετάνιος για πιθανή σύγκρουση των δύο πλοίων; Σε ποιο σημείο είναι δυνατόν να συμβεί αυτή; (Θέμα εξετάσεων)

18. Δίνεται σημείο Α(2,1) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.
    i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ.
    ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ.
    iii. Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΑΒ που διέρχεται από την κορυφή Α
    iv. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ. (Θέμα εξετάσεων)

19. Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση (ΑΒ) : 3x-7y+27=0 και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία με εξίσωση (ΑΔ) : 4x+y+5=0. Οι διαγώνιοι ΑΓ , ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $\mathrm{K}\left(2,\frac{5}{2}\right)$.
    i. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες Γ(6,2).
    ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.
    iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.

(Θέμα εξετάσεων)

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2014 - 2015

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y=-x+7$ (Μονάδες 15)

2. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1. (Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1, τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2. (Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 8)

3. ΘΕΜΑ 2

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B. (Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $\chi'\chi$ έτσι ώστε να ισχύει $(KA)=(KB)$. (Μονάδες 12)

4. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y+x=1$ και το σημείο $A(2,-4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε). (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 15)

5. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1)$ και $\vec{\beta}=(3,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=4\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2)$. (Μονάδες 15)

6. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και $A(1,-2)$, $M(-2,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 15)

7. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(2,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 18)

8. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5,4)$, $B(-1,6)$, $\Gamma(4,1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ. (Μονάδες 10)

9. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1,\lambda-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ. (Μονάδες 8)

γ) Για $\lambda=4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

10. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 4)

β) Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$ (Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha+3\beta=10$ (Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 10)

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

11. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x-2y-8=0$, $\varepsilon_2: 2x-4y+10=0$ και το σημείο Α της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1. (Μονάδες 10)

γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του Β (Μονάδες 10)

12. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x-8y+16=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y+15=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα y΄y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Α και Β. (Μονάδες 10)

β) αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$. (Μονάδες 15)

13. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 8x+y-28=0$ και $\varepsilon_2: x-y+1=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x-y-3\lambda+4=0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 15)

14. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x-3y+5=0$ και $\varepsilon_2: 3x+y-5=0$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων. (Μονάδες 7)

15. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+y+3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y-4=0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ (Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την $3x-4y-12=0$ (Μονάδες 9)

16. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x+y+2=0$ και το σημείο $A(5,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1, η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς την ευθεία ε. (Μονάδες 9) β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2, η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

17. ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο $A(6,-1)$ εκτός της (ε). Έστω $M(2,1)$ η προβολή του Α στην (ε). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του Α ως προς την (ε). (Μονάδες 12)

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

18. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(2,3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α, Β . (Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες xx΄ και yy΄ αντίστοιχα. (Μονάδες 14)

19. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,2)$, $B(-3,1)$ και $\Gamma(4,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το ύψος ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. (Μονάδες 16)

20. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 7)

β) Αν $\varepsilon_1: x+y-2=0$ και $\varepsilon_2: x+y-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1 , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β (Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

21. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1. (Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2 , να βρείτε την τιμή του λ. (Μονάδες 13)

22. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2 , 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0,\pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a}\cdot\vec{b}+12)x+(\vec{a}\cdot\vec{b}-12)y-5=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$. (Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=3\vec{a}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=-3\vec{a}$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b}\perp\vec{a}$ (Μονάδες 8)

23. ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overline{AB}=(\lambda,\ \lambda+1)$, $\overline{A\Gamma}=(3\lambda,\ \lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM}=(2\lambda,\ \lambda)$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα ΑΜ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$. (Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

24. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x-y-10\lambda+16=0$ και $\varepsilon_2: 10x+y-2\lambda-4=0$, όπου $\lambda\in R$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8x+y-6=0$ (Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ

(Μονάδες 5)

ii) αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB)=\frac{9}{4}$.

(Μονάδες 6)

25. ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-4y-7=0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB)=(MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x-2y-5=0$ και $x-2y+25=0$ (Μονάδες 10)

26. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+y+3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y-4=0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma)=(AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. (Μονάδες 10)

27. ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y=x$, με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $x_1<x_2$.
Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB)=4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB)=2\,(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x-y-2=0$ και $x-y+6=0$ (Μονάδες 7)

28. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:(2\lambda-1)x+y-5=0$, $\varepsilon_2:(\lambda^2+3)x-y-15=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A(2,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda=2$ και B,Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

29. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2\kappa x-(1+\kappa)y+1-3\kappa=0$ και $\zeta:(1+3\kappa)x+(\kappa-1)y+2-6\kappa=0$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). (Μονάδες 15)

30. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, Β(2, - 1) και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\Re$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{B\Gamma}$ (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\Re$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overline{B\Gamma}=-\overline{AB}$. (Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι (ΟΒΓ) =1, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 3)

31. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(3,4), Β(5,7) και $\Gamma\,(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu\in\Re$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ. (Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ; (Μονάδες 5)

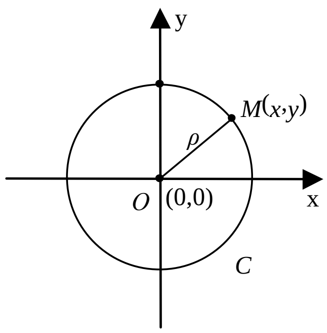
3 *ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ*

3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

36. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$ (σελ. 82 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:



$$(OM)=\rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$ ή, ισοδύναμα,

$$x^2+y^2=\rho^2. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2} \qquad (3)$$

Για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο O(0,0) και ακτίνα $\rho=1$ έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

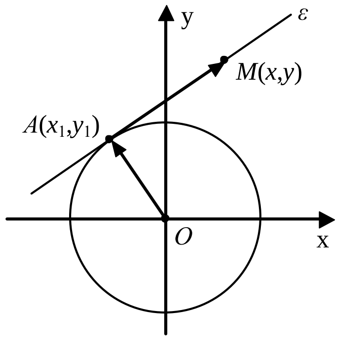
37. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$ (σελ. 83 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$.

Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA\perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $\vec{OA}\cdot\vec{AM}=0$. (1)

Όμως $\vec{OA}=(x_1,y_1)$ και $\vec{AM}=(x-x_1,y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά :



$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0 \Leftrightarrow xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$

$\Leftrightarrow xx_1+yy_1=\rho^2$,αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.

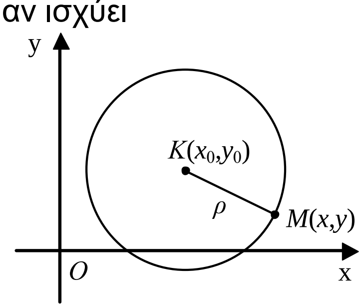
Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$

38. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$ (σελ. 83 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και *C* ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο *C*, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του *K* απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$



Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$ ή, ισοδύναμα,

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

39. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής : $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ (Ι) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο. (σελ. 84 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Αν τώρα εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ γράφεται

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (3)

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (3) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (3) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (3) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :</u> (ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΠΟΥ ΝΑ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ Ή ΠΟΥ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΕ ΓΝΩΣΤΗ ΕΥΘΕΙΑ)

- Για να βρω την εξίσωση ενός κύκλου, του οποίου μου δίνεται το κέντρο ($\mathrm{K}(x_0, y_0)$ ή $\mathrm{O}(0,0)$) και ότι διέρχεται από ένα γνωστό σημείο $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$, γράφω την αντίστοιχη εξίσωση του κύκλου στην οποία μοναδικός άγνωστος είναι η ακτίνα ρ. Στη συνέχεια θα πρέπει οι συντεταγμένες του $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ να επαληθεύουν την εξίσωση. Από την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζω την ακτίνα ρ άρα βρίσκω και την εξίσωση του κύκλου.

- Για να βρω την εξίσωση ενός κύκλου, του οποίου μου δίνεται το κέντρο ($\mathrm{K}(x_0, y_0)$ ή $\mathrm{O}(0,0)$) και ότι εφάπτεται σε μια ευθεία $(\varepsilon): \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, γράφω την αντίστοιχη εξίσωση του κύκλου στην οποία μοναδικός άγνωστος είναι η ακτίνα ρ. Στη συνέχεια θα πρέπει η απόσταση του κέντρου από την ευθεία (ε) να είναι ιση με την ακτίνα δηλαδή : $\rho = d(\mathrm{K}, \varepsilon)$ η λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης μου δίνει και την ακτίνα ρ άρα βρίσκω και την εξίσωση του κύκλου.

- Αν ένας κύκλος διέρχεται από δυο γνωστά σημεία $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ και $\mathrm{B}(\gamma, \delta)$ τότε οι συντεταγμένες των A, B επαληθεύουν την εξίσωση του. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα με δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους το οποίο λύνοντας το βρίσκω το κέντρο και την ακτίνα, άρα και την εξίσωση του κύκλου.

- Αν ένας κύκλος διέρχεται από δυο γνωστά σημεία $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ και $\mathrm{B}(\gamma, \delta)$ και το κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ του κύκλου ανήκει σε μια ευθεία (ε), τότε το $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ είναι σημείο τομής της μεσοκαθετου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και της ευθείας (ε).

- Αν ένας κύκλος διέρχεται από δυο γνωστά σημεία $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$ και $\mathrm{B}(\gamma, \delta)$ και επιπλέον ο κύκλος εφάπτεται σε μια ευθεία (ε), τότε το κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ είναι σημείο τομής της μεσοκαθετου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και της καθέτου της (ε) στο σημείο επαφής.

- Ένας κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα x΄x, αν και μόνο αν ισχύει : $\rho = |y_0|$.

- Ένας κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται στον άξονα y΄y, αν και μόνο αν ισχύει : $\rho = |x_0|$.

- Ένας κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ εφάπτεται και στους δυο άξονες x΄x και y΄y, αν και μόνο αν ισχύει : $\rho = |x_0| = |y_0|$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 87 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
i. Όταν διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,\sqrt{3})$
ii. Όταν διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$
iii. Όταν εφάπτεται της ευθείας $x-y=2$
iv. Όταν εφάπτεται της ευθείας $\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2$

Λύση :

i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2+y^2=\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,\sqrt{3})$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ. $(C): x^2+y^2=\rho^2 \overset{\substack{x=1\\ y=\sqrt{3}}}{\Leftrightarrow} 1^2+\sqrt{3}^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2$. Άρα $(C): x^2+y^2=4$.

ii. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2+y^2=\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ. $(C): x^2+y^2=\rho^2 \overset{\substack{x=\alpha-\beta\\ y=\alpha+\beta}}{\Leftrightarrow} (\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=\rho^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\rho^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2=\rho^2$. Άρα $(C): x^2+y^2=2\alpha^2+2\beta^2$.

iii. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2+y^2=\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x-y-2=0$ άρα $\rho=d(\mathrm{O},\varepsilon)=\dfrac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Άρα $(C): x^2+y^2=2$.

iv. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2+y^2=\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): \alpha x+\beta y-\alpha^2-\beta^2=0$ άρα $\rho=d(\mathrm{O},\varepsilon)=\dfrac{|\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0-\alpha^2-\beta^2|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Άρα $(C): x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2$.

2) (Άσκηση 5 σελ. 87 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
i. Όταν έχει κέντρο $\mathrm{K}(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\sqrt{3},0)$
ii. Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $\mathrm{A}(-1,2)$ και $\mathrm{B}(7,8)$
iii. Όταν έχει ακτίνα $\rho=5$ και τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $\mathrm{A}(1,0)$ και $\mathrm{B}(7,0)$
iv. Όταν διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(4,0)$ και $\mathrm{B}(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$
v. Όταν τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $\mathrm{A}(4,0)$ και $\mathrm{B}(8,0)$ και τον άξονα y΄y στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.
vi. Όταν εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο $\mathrm{A}(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(1,2)$.

vii. Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+4y=12$ στο σημείο $\mathrm{A}(0,3)$.

Λύση :

i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(0,1)$ θα έχει εξίσωση της μορφής : $(C):(x-0)^2+(y-1)^2=\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\sqrt{3},0)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ. $(C):x^2+(y-1)^2=\rho^2 \overset{\substack{x=\sqrt{3}\\y=0}}{\Leftrightarrow} 3+1=\rho^2 \Leftrightarrow \rho=2$. Άρα $(C):x^2+(y-1)^2=4$

ii. Το κέντρο Κ του κύκλου είναι το μέσον του ΑΒ άρα $x_{\mathrm{K}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{-1+7}{2}=3$ και $y_{\mathrm{K}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{2+8}{2}=5$ άρα $\mathrm{K}(3,5)$. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=\dfrac{(\mathrm{AB})}{2}=\dfrac{\sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{(7+1)^2+(8-2)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{100}}{2}=5$. Άρα : $(C):(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

iii. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$, επίσης έχει ακτίνα $\rho=5$ άρα θα έχει εξίσωση : $(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=25$.
Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.
$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=25 \overset{\substack{x=1\\y=0}}{\Leftrightarrow} (1-x_0)^2+(0-y_0)^2=25 \Leftrightarrow (1-x_0)^2+y_0{}^2=25$ (1)

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(7,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.
$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=25 \overset{\substack{x=7\\y=0}}{\Leftrightarrow} (7-x_0)^2+(0-y_0)^2=25 \Leftrightarrow (7-x_0)^2+y_0{}^2=25$ (2).

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases}(1-x_0)^2+y_0^2=25\\(7-x_0)^2+y_0^2=25\end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω :
$(1-x_0)^2-(7-x_0)^2=0 \Leftrightarrow 1-2x_0+x_0^2-49+14x_0-x_0^2=0 \Leftrightarrow 12x_0=48 \Leftrightarrow x_0=4$

Στην (1) για $x_0=4$ έχω : $(1-x_0)^2+y_0{}^2=25 \overset{x_0=4}{\Leftrightarrow} 9+y_0^2=25 \Leftrightarrow y_0=4$ ή $y_0=-4$.

- Άρα αν $x_0=4$, $y_0=4$ τότε $(C_1):(x-4)^2+(y-4)^2=25$
- Άρα αν $x_0=4$, $y_0=-4$ τότε $(C_2):(x-4)^2+(y+4)^2=25$

iv. Αφού ο κύκλος διέρχεται από δυο γνωστά σημεία $\mathrm{A}(4,0)$ και $\mathrm{B}(8,0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\zeta):y=x$ τότε το κέντρο του κύκλου θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθετου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και της ευθείας (ζ). Έστω Μ το μέσο του ΑΒ τότε $x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{4+8}{2}=6$ και $y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{0+0}{2}=0$ άρα $\mathrm{M}(6,0)$.
Επίσης $(\varepsilon)\perp(\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\mathrm{AB}}=-1$, όμως $\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{0-0}{8-4}=0$ άρα $\lambda_\varepsilon=\delta\varepsilon\nu\_o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$ άρα η (ε) κατακόρυφη δηλ. $(\varepsilon):x=x_0 \Leftrightarrow x=6$

$\begin{cases}(\varepsilon): x=6 \\ (\zeta): y=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6 \\ y=6\end{cases}$ άρα το κέντρο του κύκλου είναι $\mathrm{K}(6,6)$ και η ακτίνα είναι $\rho=(\mathrm{KA})=\sqrt{(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{K}})^2+(y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{K}})^2}=\sqrt{(4-6)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Άρα $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=40$

v. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$, επίσης έχει ακτίνα ρ άρα θα έχει εξίσωση : $(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \overset{\substack{x=4\\y=0}}{\Leftrightarrow} (4-x_0)^2+{y_0}^2=\rho^2$ (1)

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(8,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \overset{\substack{x=8\\y=0}}{\Leftrightarrow}(8-x_0)^2+(0-y_0)^2=\rho^2 \Leftrightarrow (8-x_0)^2+{y_0}^2=\rho^2$ (2)

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,-2)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2 \overset{\substack{x=0\\y=-2}}{\Leftrightarrow}(0-x_0)^2+(-2-y_0)^2=\rho^2 \Leftrightarrow {x_0}^2+(2+y_0)^2=\rho^2$ (3)

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases}(4-x_0)^2+y_0^2=\rho^2 \\ (8-x_0)^2+y_0^2=\rho^2\end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω : $(4-x_0)^2-(8-x_0)^2=0 \Leftrightarrow 16-8x_0+x_0^2-64+16x_0-x_0^2=0 \Leftrightarrow 8x_0=48 \Leftrightarrow x_0=6$ άρα στην (1) : $(4-x_0)^2+{y_0}^2=\rho^2 \overset{x_0=6}{\Leftrightarrow} (4-6)^2+{y_0}^2=\rho^2 \Leftrightarrow 4+y_0^2=\rho^2$ και άρα στην (3) : ${x_0}^2+(2+y_0)^2=\rho^2 \underset{\rho^2=4+y_0^2}{\overset{x_0=6}{\Leftrightarrow}} 36+(2+y_0)^2=4+y_0^2 \Leftrightarrow 36+4+4y_0+y_0^2=4+y_0^2 \Leftrightarrow 4y_0=-36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y_0=-9$. Άρα $\mathrm{K}(6,-9)$ και τέλος στην (1) : $(4-x_0)^2+{y_0}^2=\rho^2 \overset{\substack{x_0=6\\y_0=-9}}{\Leftrightarrow} (4-6)^2+(-9)^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=85$ δηλ. $\rho=\sqrt{85}$ και $(C):(x-6)^2+(y+9)^2=85$

vi. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$, επίσης έχει ακτίνα ρ άρα θα έχει εξίσωση : $(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x΄x ισχύει : $\rho=|y_0|$ άρα $(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=|y_0|^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2 \overset{\substack{x=3\\y=0}}{\Leftrightarrow}(3-x_0)^2+(0-y_0)^2=y_0^2 \Leftrightarrow (3-x_0)^2+{y_0}^2=y_0^2$ (1)

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(1,2)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ. $(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2 \overset{\substack{x=1\\y=2}}{\Leftrightarrow} (1-x_0)^2+(2-y_0)^2=y_0^2$ (2)

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases}(3-x_0)^2+y_0^2=y_0^2\\(1-x_0)^2+(2-y_0)^2=y_0^2\end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω :

$(3-x_0)^2+y_0^2-(1-x_0)^2-(2-y_0)^2=0 \Leftrightarrow 9-6x_0+x_0^2+y_0^2-1+2x_0-x_0^2-4+4y_0-y_0^2=0 \Leftrightarrow$

$4y_0-4x_0+4=0 \Leftrightarrow x_0=y_0+1$. Άρα στην (1) : $(3-x_0)^2+{y_0}^2=y_0^2 \overset{x_0=y_0+1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (3-y_0-1)^2+{y_0}^2=y_0^2 \Leftrightarrow (2-y_0)^2=0 \Leftrightarrow y_0=2$ και άρα $x_0=y_0+1 \overset{y_0=2}{\Leftrightarrow} x_0=3$ άρα :

$(C):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2 \overset{\substack{x_0=3\\y_0=2}}{\Leftrightarrow} (x-3)^2+(y-2)^2=4$

vii. Το κέντρο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$ του κύκλου θα είναι σημείο τομής της μεσοκαθετου (η) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΟ και της καθετου (ζ) στην ευθεία $(\varepsilon):3x+4y-12=0$ στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(0,3)$. Έστω Μ το μέσο του ΑΟ τότε $x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{O}}}{2}=\dfrac{0+0}{2}=0$ και $y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{O}}}{2}=\dfrac{3+0}{2}=\dfrac{3}{2}$ άρα $\mathrm{M}\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$. Επίσης $\lambda_{\mathrm{AO}}=\dfrac{0-3}{0-0}=\delta\varepsilon\nu\_o\rho\iota\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$ άρα η μεσοκαθετος (η) του ΑΟ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda_\eta=0$ άρα : $(\eta):y=\dfrac{3}{2}$.

Επίσης : $(\varepsilon)\perp(\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\zeta=-1$ όμως $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{3}{4}$ άρα $\lambda_\zeta=\dfrac{4}{3}$ και η (ζ) διέρχεται από το $\mathrm{A}(0,3)$ άρα : $(\zeta):y-3=\dfrac{4}{3}(x-0) \Leftrightarrow 3y-9=4x \Leftrightarrow 4x-3y+9=0$: (ζ). Άρα τελικά :

$\begin{cases}(\eta):y=\dfrac{3}{2}\\(\zeta):4x-3y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{9}{8}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ άρα $\mathrm{K}\left(-\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{2}\right)$. Και η ακτίνα του κύκλου είναι :

$\rho=(\mathrm{OK})=\sqrt{\left(-\dfrac{9}{8}-0\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}-0\right)^2}=\dfrac{15}{8}$ άρα η εξίσωση του κύκλου είναι : $(C):\left(x+\dfrac{9}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{15}{8}\right)^2$.

3) (Άσκηση 6 σελ. 88 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση :

i. $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
ii. $x^2+y^2-10x+12y-20=0$
iii. $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$
iv. $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$

<u>Λύση :</u>

i. Στην εξίσωση $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ είναι $\mathrm{A}=4,\mathrm{B}=-6,\Gamma=-3$

Άρα $A^2+B^2-4\Gamma=4^2+(-6)^2-4\cdot(-3)=16+36+12=64>0$ άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\to K\left(-\frac{4}{2},-\frac{-6}{2}\right)\to K(-2,3)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=4$

ii. Στην εξίσωση $x^2+y^2-10x+12y-20=0$ είναι $A=-10, B=12, \Gamma=-20$

Άρα $A^2+B^2-4\Gamma=(-10)^2+(12)^2-4\cdot(-20)=100+144+80=324>0$ άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\to K\left(-\frac{-10}{2},-\frac{12}{2}\right)\to K(5,-6)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{324}}{2}=9$

iii. Στην εξίσωση $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0\overset{:3}{\Leftrightarrow}x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$, είναι $A=2, B=-3, \Gamma=\frac{1}{3}$. Άρα $A^2+B^2-4\Gamma=2^2+(-3)^2-4\cdot\frac{1}{3}=4+9-\frac{4}{3}=\frac{35}{3}>0$ άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\to K\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{35}{3}}}{2}$$

iv. Στην εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$ είναι $A=-4\alpha, B=10\beta, \Gamma=4\alpha^2+16\beta^2$

Άρα

$A^2+B^2-4\Gamma=16\alpha^2+100\beta^2-4(4\alpha^2+16\beta^2)=16\alpha^2+100\beta^2-16\alpha^2-64\beta^2=36\beta^2>0$

άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\to K(2\alpha,-5\beta)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{36\beta^2}}{2}=\frac{6|\beta|}{2}=3|\beta|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και
i.Ακτίνα ρ=3
ii.Διέρχεται από το σημείο Β(-12,5)
iii.Εφάπτεται της ευθείας (ε): 3x-4y+10=0.

5) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και
i.Ακτίνα ρ=4
ii.Διέρχεται από το σημείο Α(3,-4)
iii.Εφάπτεται της ευθείας (ε): 5x-12y+39=0.

6) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(6,3) και Β(-2,-1).

7) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος :
   i. Έχει κέντρο Κ(2,-3) και ακτίνα 4
   ii. Έχει κέντρο Κ(-8,2) και διέρχεται από το σημείο Α(4,-3)
   iii. Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(-6,14) και Β(2,8)
   iv. Έχει κέντρο Κ(3,1) και εφάπτεται στην ευθεία (ε): 4x-3y+6=0.
   v. Διέρχεται από το σημείο Α(1,1) και εφάπτεται στον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,2)

8) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ(1,1) , ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία (ε) : 3x+4y+8=0.

9) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα Α(2, 3), Β(2, 5) και έχει ακτίνα $\sqrt{5}$

10) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(-1, 1) Β(-2, 3) και έχει το κέντρο του στην ευθεία 2x + 2y – 3=0.

11) Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: 2x – y + 3=0 και $ε_2$: 2x – y – 1=0. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στις $ε_1$, $ε_2$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία x=1.

12) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία Α(-2, 1), Ν(1, 0), Ρ(1, 4)

13) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   α) Όταν έχει κέντρο Κ(2, -3) και ακτίνα ρ=5.
   β) Όταν έχει κέντρο Κ(1, -2) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
   γ) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία Α(-1, 2) και Β(3, 4).

14) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   α) Όταν τέμνει τον y΄y στα σημεία Α(0,1) και Β(0,3) και τον άξονα x'x στα σημεία Γ(2,0) και Δ(λ,0).
   β) Όταν διέρχεται από τα σημεία Α(-1, 2), Β(1, 0) και Γ(0, -2).

15) Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2-6x-4y+12=0$ και η ευθεία (ε) : 3x+2y-μ=0. Να βρείτε το μ ώστε η (ε) να είναι διάμετρος του κύκλου.

16) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση.
   i. $x^2 + y^2 – 10x + 2y +22=0$
   ii. x(x – 1) + (y + 1)(y – 3)=0
   iii. $x^2+y^2+6x+8=0$
   iv. $2x^2+2y^2-4x+1=0$
   v. $(2x-1)^2+(2y+3)^2=4$

17) Να βρείτε τον κύκλο C που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο $4x^2 + 4y^2 – 12x+8y + 9=0$ και εφάπτεται της ευθείας 4x + 3y – 1=0.

18) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν :
   i. εφάπτεται στον άξονα y΄y και τέμνει τον x΄x στα σημεία $\mathrm{A}(-1,0)$ και $\mathrm{B}(-5,0)$.
   ii. διέρχεται από το $\mathrm{B}(-1,-8)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 3x-4y-4=0$ στο $\mathrm{A}(0,-1)$

19) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν :
   i. διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(2,1)$ και $\mathrm{B}(-1,4)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 4x-5y+11=0$
   ii. όταν εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-2,3)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : (ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΣΗΜΕΙΟ, ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕ ΚΥΚΛΟ)

- **(ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΚΥΚΛΟ)**

  Έστω ένας κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ρ τότε :
  - Ένα σημείο Α ανήκει στον κύκλο αν-ν **(ΚΑ)=ρ**
  - Ένα σημείο Β είναι εσωτερικό του κύκλου αν-ν **(ΚΑ)<ρ**
  - Ένα σημείο Γ είναι εξωτερικό του κύκλου αν-ν **(ΚΑ)>ρ**

- **(ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ)**

  Έστω ένας κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ρ και (ε) μια ευθεία τότε :
  - Η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αν-ν $d(\mathrm{K},\varepsilon) > \rho$
  - Η ευθεία ε έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (εφάπτεται στον κύκλο) αν-ν $d(\mathrm{K},\varepsilon) = \rho$
  - Η ευθεία έχει δυο διαφορετικά κοινά σημεία με τον κύκλο (τον τέμνει) αν-ν $d(\mathrm{K},\varepsilon) < \rho$.

- **(ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)**

  Έστω C_1 και C_2 δυο κύκλοι με κέντρα Κ, Λ και ακτίνες ρ_1, ρ_2 αντίστοιχα.
  - Οι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά, αν-ν $(\mathrm{K\Lambda}) = \rho_1 + \rho_2$
  - Οι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά, αν-ν $(\mathrm{K\Lambda}) = |\rho_1 - \rho_2|$
  - Οι C_1 και C_2 τέμνονται αν-ν $|\rho_1 - \rho_2| < (\mathrm{K\Lambda}) < \rho_1 + \rho_2$
  - Ο ένας από τους κύκλους είναι εξωτερικός του άλλου, αν-ν $(\mathrm{K\Lambda}) > \rho_1 + \rho_2$
  - Ο ένας από τους κύκλους είναι εσωτερικός του άλλου, αν-ν $(\mathrm{K\Lambda}) < |\rho_1 - \rho_2|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

20) Δίνεται ο κύκλος $(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ και τα σημεία Α(-6,4) , Β(2,3) και Γ(4,5). Να βρείτε :
   i. Το κέντρο και την ακτίνα του
   ii. Τη σχετική θέση των σημείων Α, Β και Γ ως προς τον C.

21) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω ευθειών με τον κύκλο C.
   α) ε_1: $3x - 4y + 3 = 0$ β) ε_2: $3x - 4y + 1 = 0$ γ) ε_3: $3x - 4y + 2 = 0$

22) Να βρείτε τη σχετική θέση των παρακάτω κύκλων:
   C_1: $x^2 + y^2 = 1$ C_2: $(x - \alpha)^2 + (y + 1)^2 = \alpha^2$ όταν:
   α) $\alpha = \sqrt{2}$ β) $\alpha = \sqrt{5} - 1$ γ) $\alpha = 1 + \sqrt{5}$ δ) $\alpha = 4$ ε) $\alpha = 1$

23) Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$, C_2: $x^2 + y^2 + 3x + 4y + \lambda = 0$ και C_3: $x^2 + y^2 - x - y + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:
   i. οι κύκλοι C_1,C_2 εφάπτονται εξωτερικά. ii. οι κύκλοι C_1, C_3 εφάπτονται εσωτερικά.

24) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ και το σημείο του Α(2, 1). Να γραφεί η εξίσωση κύκλου C_1 ο οποίος εφάπτεται του C στο Α εξωτερικά και έχει ακτίνα διπλάσια του C.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : (ΕΥΡΕΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ)

- **(ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ)**

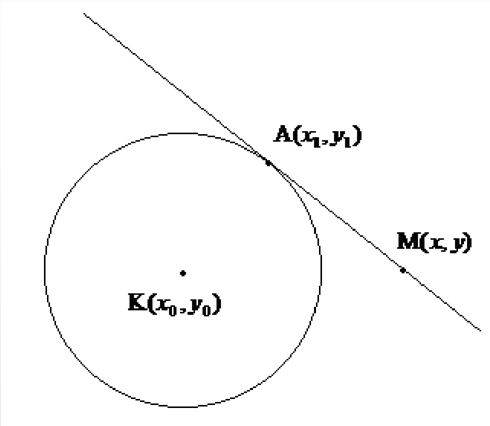
  Αν ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0,0) δηλαδή έχει εξίσωση της μορφής : $x^2+y^2=\rho^2$, τότε η εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση : $(\varepsilon): x_1x+y_1y=\rho^2$.

  π.χ. η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=4$ στο σημείο $\mathrm{A}(2,-3)$ είναι $(\varepsilon): 2x-3y=4$

- **(ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $\mathrm{K}(x_0,y_0)$)**

  Αν ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ, για να βρούμε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου σε ένα σημείο του $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ εργαζόμαστε ως εξής :

  Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ ανήκει στην εφαπτομένη (ε), αν και μόνο αν : $\vec{\mathrm{AM}} \perp \vec{\mathrm{AK}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{AM}}\cdot\vec{\mathrm{AK}}=0 \Leftrightarrow ...$ και από αυτή τη σχέση καταλήγουμε σε μια σχέση με x,y που είναι η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.



- **(ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΓΝΩΣΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΣΗΣ)**

  Για να βρούμε την εφαπτομένη (ε) ενός κύκλου, η οποία έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ, εργαζόμαστε ως εξής :

  Βήμα 1 : Αφού η (ε) έχει γνωστό λ, θεωρούμε ότι έχει εξίσωση της μορφής : $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \lambda x-y+\beta=0$ (1)

  Βήμα 2 : Η (ε) εφάπτεται στον κύκλο άρα ισχύει : $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow ...$ και από αυτή τη σχέση βρίσκουμε το β το οποίο αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε την εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

- **(ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ)**

  Για να βρούμε την εφαπτομένη (ε) ενός κύκλου, για την οποία γνωρίζουμε ότι **διέρχεται** από γνωστό σημείο $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ (δεν ανήκει στον κύκλο), εργαζόμαστε ως εξής :

  Βήμα 1 : Από το σημείο $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ διέρχονται :
  - Η κατακόρυφη $(\varepsilon): x=x_1$
  - Όλες οι ευθείες της μορφής $(\varepsilon): y-y_1=\lambda(x-x_1)$ (1)

  Βήμα 2 : Για την κατακόρυφη $(\varepsilon): x=x_1$ ελέγχω αν ισχύει $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho$, αν ισχύει τότε είναι μια από τις ζητούμενες εφαπτομενες.

  Βήμα 3 : Για τις ευθείες $(\varepsilon): y-y_1=\lambda(x-x_1)$ απαιτώ να ισχύει $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow ...$ και από αυτή τη σχέση βρίσκουμε το λ το οποίο αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε την εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25) (Άσκηση 2 σελ. 87 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου λίγο πιο εμπλουτισμένη)
Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. Στο σημείο του $A(3,-4)$
ii. Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+3$
iii. Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$
iv. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$

Λύση :

i. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=5$ στο σημείο $A(3,-4)$ είναι $(\varepsilon): 3x-4y=5$

ii. Στον κύκλο $x^2+y^2=5$ είναι : κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : $(\varepsilon)//(\zeta): y=2x+3 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y=2x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ιση με την ακτίνα, δηλ. $d(0,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 0+(-1)\cdot 0+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\beta|=5 \Leftrightarrow \beta=5$ ή $\beta=-5$, άρα :

- Αν $\beta=5$ τότε : $(\varepsilon_1): 2x-y+5=0$
- Αν $\beta=-5$ τότε : $(\varepsilon_2): 2x-y-5=0$

iii. Στον κύκλο $x^2+y^2=5$ είναι : κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : $(\varepsilon)\perp(\zeta): y=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\zeta=-1$, όμως $\lambda_\zeta=\frac{1}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon=-2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής : $(\varepsilon): y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ιση με την ακτίνα, δηλ. $d(0,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\beta|=5 \Leftrightarrow \beta=5$ ή $\beta=-5$, άρα :

- Αν $\beta=5$ τότε : $(\varepsilon_1): 2x+y-5=0$
- Αν $\beta=-5$ τότε : $(\varepsilon_2): 2x+y+5=0$

iv. Στον κύκλο $x^2+y^2=5$ είναι : κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$. Από το σημείο $A(5,0)$ διέρχονται :

- η κατακόρυφη $(\varepsilon): x=5 \Leftrightarrow x-5=0$, για να εφάπτεται η (ε) στον κύκλο πρέπει :

$$d(0,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|1\cdot 0+0\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 5=\sqrt{5} \text{ αδύνατο.}$$

- Όλες οι ευθείες της μορφής $(\varepsilon): y-0=\lambda(x-5) \Leftrightarrow \lambda x-y-5\lambda=0$. Όμως πρέπει :

$$d(0,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0+(-1)\cdot 0-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 5|\lambda|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

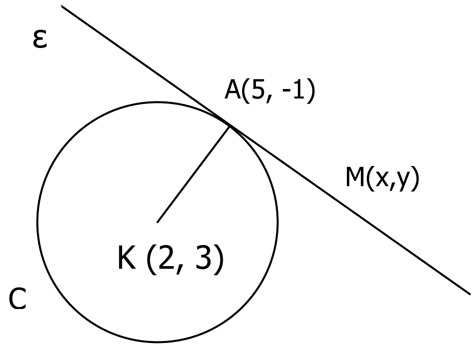
$$\Leftrightarrow 25\lambda^2=5(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 25\lambda^2=5\lambda^2+5 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}$$

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ έχω : $(\varepsilon_1): \frac{1}{2}x-y-5\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x-2y-5=0$

Για $\lambda=-\frac{1}{2}$ έχω : $(\varepsilon_2): -\frac{1}{2}x-y+5\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow -x-2y+5=0$

26) Δίνεται κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12=0$ και το σημείο του Α(5, -1). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο Α.

Λύση :



Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο επαφής (σ.ε.) Α(5,-1) και έστω ένα τυχαίο σημείο Μ(x,y) που ανήκει στην (ε). Τότε ισχύει : $\vec{\mathrm{KA}} \perp \vec{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{KA}}\cdot\vec{\mathrm{AM}}=0$ (1) .Όμως $\vec{\mathrm{KA}}=(5-2,-1-3)=(3,-4)$ και $\vec{\mathrm{AM}}=(x-5,y+1)$ άρα η (1) γίνεται :

$\vec{\mathrm{KA}}\cdot\vec{\mathrm{AM}}=0 \Leftrightarrow 3(x-5)+(-4)(y+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-15-4y-4=0 \Leftrightarrow 3x-4y-19=0$ (ε). Δηλαδή η εφαπτομένη είναι η ευθεία (ε)

27) (Εφαρμογή 2 σελ. 86 λίγο πιο εμπλουτισμένη)

Δίνονται οι κύκλοι $(C_1): (x-2)^2+(y-3)^2=25$ και $(C_2): x^2+(y+1)^2=9$

i. Να βρείτε τη σχετική θέση των $(C_1),(C_2)$

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $\mathrm{A}(5,-1)$ με τον (C_1)

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του (C_1) στο σημείο $\mathrm{A}(5,-1)$.

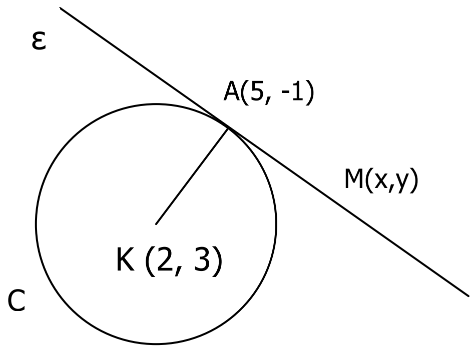
iv. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) με τον κύκλο (C_2)

Λύση :

i. Ο κύκλος (C_1) έχει κέντρο $\mathrm{K}(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1=5$, ενώ ο κύκλος (C_2) έχει κέντρο $\Lambda(0,-1)$ και ακτίνα $\rho_2=3$. Έτσι : $(\mathrm{K}\Lambda)=\sqrt{(0-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4{,}5$, $\rho_1+\rho_2=8$ και $\rho_1-\rho_2=2$ άρα ισχύει : $|\rho_1-\rho_2|<(\mathrm{K}\Lambda)<\rho_1+\rho_2$ δηλ. οι C_1 και C_2 τέμνονται.

ii. $(\mathrm{KA})=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25}=5=\rho_1$ άρα το σημείο $\mathrm{A}(5,-1)$ είναι σημείο του (C_1)

iii. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο επαφής (σ.ε.) $A(5,-1)$ και έστω ένα τυχαίο σημείο M(x,y) που ανήκει στην (ε). Τότε ισχύει : $\vec{KA} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0$ (1) Όμως $\vec{KA} = (5-2,-1-3) = (3,-4)$ και $\vec{AM} = (x-5, y+1)$ άρα η (1) γίνεται : $\vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow 3(x-5) + (-4)(y+1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x - 15 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 19 = 0 \quad (\varepsilon)$. Δηλαδή η εφαπτομένη είναι η ευθεία (ε)



iv. Για να βρω τη σχετική θέση της (ε) με τον κύκλο (C_2) έχω : $d(\Lambda, \varepsilon) = \dfrac{|3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) - 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{15}{5} = 3 = \rho_2$. Άρα η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο (C_2) (αφού η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την (ε) είναι ιση με την ακτίνα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 = 25$ να βρείτε :
  i. Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του A(-4,3)
  ii. Τις εξίσωσης των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): 4x - 3y + 2012 = 0$
  iii. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο P(5,10).

29) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=10$, η οποία είναι:
  i. Παράλληλη στην η: x+3y=4
  ii. Κάθετη στην ζ: 3x+y=2.

30) Να βρεθούν οι εφαπτομένες του κύκλου (C) : $x^2 + y^2 = 100$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο P(10,20).

31) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=16$ που σχηματίζει με τον x'x γωνία 120^o.

32) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) : $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο A(-1,7), και να αποδειχτεί ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

33) Δίνεται ο κύκλος $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ να βρείτε τις εξίσωσης των εφαπτομένων του κύκλου C στα σημεία του : α) A(3,-1) β) B(4,2) γ) Γ(-1,7)

34) Δίνεται ο κύκλος $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.
  i.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του C στο σημείο του A(-1,5).

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται και στον κύκλο $(C_2): x^2+y^2+2x-8=0$.

35) Δίνεται κύκλος $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=20$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): 3x-6y-2013=0$

36) Δίνεται κύκλος $(C):(x-1)^2+y^2=2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\eta): y=x+1$

37) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 18=0$ και το σημείο του Α(3, 3). Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C στο Α.

38) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16=0$ και το σημείο (εκτός αυτού) Α(3, -5). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το Α προς τον κύκλο.

39) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C: $x^2 + y^2=8$, που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσον με 8.

40) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x=0$ και το σημείο Α (3, 0). Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α και την οξεία γωνία που σχηματίζουν αυτές.

41) Να βρεθεί το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος από το σημείο Α(6,4) προς τον κύκλο (C) : $x^2+y^2+4x+6y-19=0$.

42) Από το σημείο P(-4,-5) φέρνουμε την εφαπτομένη PA προς τον κύκλο $(C): x^2+y^2-4x-6y-23=0$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος PA.

43) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=10$ και το σημείο Α(3,4). Από το Α φέρουμε τις εφαπτόμενες προς αυτόν και έστω Λ και Μ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η ΛΜ έχει εξίσωση (ΛΜ):3x+4y=10.

44) Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου $(C):(x-2)^2+y^2=5$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α(3,-3) είναι μεταξύ τους κάθετες .

45) Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2-4y+3=0$ και το σημείο Α(-1,0).
 i. Να δείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου.
 ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το Α προς τον κύκλο.

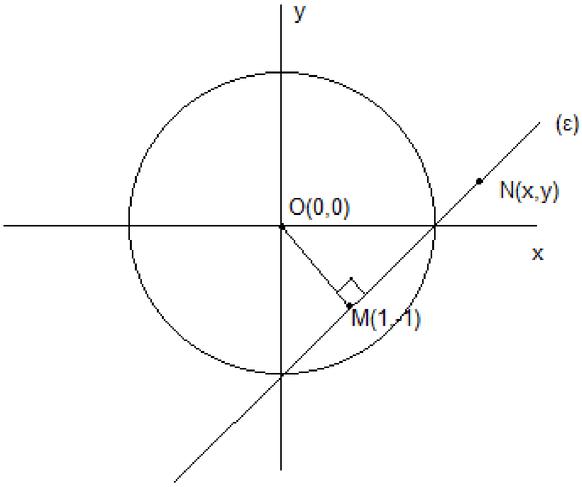
46) Δίνεται ο κύκλος $(C):(x-4)^2+(y+2)^2=25$ και το σημείο P(9,8).
 i. Να δείξετε ότι το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου.
 ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε που διέρχεται από το P προς τον κύκλο.

47) Έστω ο κύκλος C: $x^2 + y^2=3$ και η ευθεία ε: x + y + 4=0.
 i. Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία ε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
 ii. Από ένα σημείο Μ της ε φέρνουμε τις εφαπτομένες ΜΑ, ΜΒ στον κύκλο C όπου Α, Β τα σημεία επαφής. Αν το σημείο Μ κινείται στην ευθεία ε, να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΕΥΡΕΣΗ ΧΟΡΔΗΣ ΚΥΚΛΟΥ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

48) (Άσκηση 4 σελ. 87 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου (C) : $x^2 + y^2 = 4$, η οποία έχει μέσο το σημείο Μ(1,-1).
Λύση :



Έστω (ε) η ζητούμενη χορδή και έστω $\mathrm{N}(x,y) \in (\varepsilon)$ τότε θα ισχύει : :
$\vec{\mathrm{OM}} \perp \vec{\mathrm{MN}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{OM}} \cdot \vec{\mathrm{MN}} = 0$ (1) Όμως $\vec{\mathrm{OM}} = (1-0,-1-0) = (1,-1)$ και $\vec{\mathrm{MN}} = (x-1, y+1)$
άρα η (1) γίνεται : $\vec{\mathrm{OM}} \cdot \vec{\mathrm{MN}} = 0 \Leftrightarrow (x-1) + (-1)(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \ (\varepsilon)$. Δηλαδή η ζητούμενη χορδή είναι η ευθεία (ε)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

49) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου (C) : $x^2 + y^2 = 9$, η οποία έχει μέσο το σημείο Μ(2,1).

50) Να βρεθεί το μήκος της χορδής του κύκλου $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 9 = 0$ η οποία έχει μέσο το σημείο Μ(2,1).

51) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ και $(C_2): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

52) (ΠΟΛΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ)
Δίνεται κύκλος $(C): x^2 + y^2 = 15$. Από το σημείο P(3,4) φέρνουμε τις εφαπτομενες στον κύκλος (C) και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Να βρείτε :
i. Την εξίσωση της ευθείας ΑΒ
ii. Την απόσταση του σημείου P από την ευθεία ΑΒ.

53) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 3$. Από το σημείο Μ(1, -2) φέρνουμε τις εφαπτομένες ΜΑ και ΜΒ στον κύκλο C. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ.

54) Από το σημείο P(3,5) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA , PB προς τον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας AB.

55) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=25$ και η ευθεία ε: y=x+4.
 i. Να δείξετε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.
 ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζουν ο κύκλος με την ευθεία.

56) Να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος C: $x^2+y^2=25$ από την ευθεία ε: y=$\sqrt{3}$x+8

57) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Ο(0,0) και κόβει από την ευθεία ε: 3x+4y–15=0 χορδή με μήκος 8.

58) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου C: $x^2 + y^2=25$.
 i. Όταν το σημείο Μ(1, 2) είναι μέσο της.
 ii. Όταν διέρχεται από το σημείο (-1, 3) και έχει μήκος ίσο με 8.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ – ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΥΚΛΩΝ : $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

59) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + 1 = 0$ (1) $\lambda \in \Re$.
 i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
 ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
 iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το κέντρο του παραπάνω κύκλου ανήκει στην ευθεία $(\zeta): 2x - 4y + 1 = 0$

Λύση :

i. Η εξίσωση : $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + 1 = 0$ έχει : $\mathrm{A} = \lambda, \mathrm{B} = \lambda + 2, \Gamma = 1$

Είναι $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (\lambda + 2)^2 - 4 = \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4 = 2\lambda^2 + 4\lambda$

Πρέπει $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 4\lambda > 0$, έχω

$2\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$, άρα :

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$2\lambda^2 + 4\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα για κάθε $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}\right) \rightarrow \mathrm{K}\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda + 2}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda}}{2}$

ii. Έστω $K(x,y)$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του κέντρου του παραπάνω κύκλου, τότε θα ισχύει : $\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{2} \\ y=-\dfrac{\lambda+2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2x,(1) \\ \lambda+2=-2y,(2) \end{cases}$ η (2) λογω της (1) γίνεται $-2x+2=-2y \Leftrightarrow -x+1=-y \Leftrightarrow x-y-1=0$. Άρα τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ευθεία $(\varepsilon): x-y-1=0$.

iii. Το κέντρο $K\left(-\dfrac{\lambda}{2},-\dfrac{\lambda+2}{2}\right)$ ανήκει στην ευθεία $(\zeta): 2x-4y+1=0$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλ. $(\zeta): 2\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)-4\left(-\dfrac{\lambda+2}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow -\lambda+2(\lambda+2)+1=0 \Leftrightarrow -\lambda+2\lambda+4+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-5$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

60) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(2-\lambda)x-2y+2-\lambda=0$ (1) $\lambda\in\Re$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
iii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από σταθερό σημείο.
iv. Να βρεθούν οι τιμές του λ,ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 4x+3y-2=0$

61) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(\lambda-1)x+(3-\lambda)y-2\lambda-1=0$ (1) $\lambda\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\Re$.
ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
iii. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε ο κύκλος (1) να έχει ακτίνα ιση με 4.

62) Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση : $x^2+y^2+4x-2y+8\lambda=0$ παριστάνει κύκλο.

63) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x-(2\lambda+10)y+5\lambda+15=0$ (1) $\lambda\in\Re$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
iii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από δυο σταθερά σημεία.
iv. Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε το κέντρο του παραπάνω κύκλου να ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 3x-y+15=0$
v. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος που ορίζεται από την (1) έχει ακτίνα ιση με 5.

64) Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y-2)^2=2\lambda(x+2y-5)$, (1) $\lambda\in\Re$

i. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\Re^*$

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1).
iii. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

65) Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y-1)^2+\lambda(x-1)=0$ (1).

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
iii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διέρχεται από σταθερό σημείο.
iv. Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 4x+3y-2=0$

66) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 2x-y-3=0$ και ο κύκλος $(C): x^2+y^2-x+y-2=0$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) και ο κύκλος (C) τέμνονται σε δυο σημεία Μ,Ν.
ii. Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2+y^2-x+y-2+\lambda(2x-y-3)=0$ (1). Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\Re$, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Μ,Ν.
iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.

67) Δίνεται η οικογένεια των κύκλων C_λ: $x^2 + y^2 - 5=2\lambda(x - 1)$ $\lambda\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
ii. Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων C_λ.

68) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\alpha x+4y+2\alpha=0$ (1) $\alpha\in\Re$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
ii. Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε η ακτίνα του παραπάνω κύκλου να είναι ιση με 2
iii. Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 5x+3y+1=0$
iv. Να βρείτε τις τιμές του α έτσι ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Θέμα Πανελληνίων)

69) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\text{συνθ}-2y\text{ημθ}-1=0$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

i. Να δείξετε ότι για κάθε θ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
ii. Αν θ=π/2 να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο Μ(1,2)
iii. Να δείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ, τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

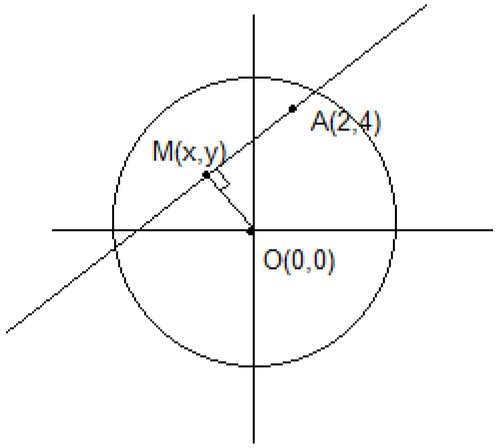
70) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+(2-\lambda)y+\lambda+7=0$ (1) $\lambda\in\Re$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου.
ii. Έστω ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο (C) του οποίου το κέντρο απέχει από την ευθεία $(\varepsilon): 3x+4y+5=0$ απόσταση ιση με $\frac{2}{5}$. Να βρείτε τον αριθμό λ.
iii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C_1) που είναι ομόκεντρος με τον (C) και διέρχεται από το σημείο $A(-5,2)$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 :</u> (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ)

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

71) (Άσκηση 10 σελ. 89 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=25$ που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{A}(2,4)$.
<u>Λύση :</u>



Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο που ψάχνω δηλαδή είναι μέσο χορδής κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α, τότε θα ισχύει : $\vec{\mathrm{OM}}\perp\vec{\mathrm{MA}}\Leftrightarrow\vec{\mathrm{OM}}\cdot\vec{\mathrm{MA}}=0$ (1) Όμως $\vec{\mathrm{OM}}=(x-0,y-0)=(x,y)$ και $\vec{\mathrm{MA}}=(2-x,4-y)$ άρα η (1) γίνεται : $\vec{\mathrm{OM}}\cdot\vec{\mathrm{MA}}=0\Leftrightarrow x(2-x)+y(4-y)=0\Leftrightarrow 2x-x^2+4y-y^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y=0$.
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\to\mathrm{K}(1,2)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{4+16}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$.

72) (Άσκηση 7 σελ. 88 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ισο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x=1$.
<u>Λύση :</u>
Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο που ψάχνω, και $(\varepsilon): x=1\Leftrightarrow x-1=0$ τότε θα ισχύει : $(\mathrm{OM})^2=4d(\mathrm{M},\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}^{\,2}=4\frac{|1\cdot x+0\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4|x-1|$ (1)

Έχω $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ άρα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

• Αν $x\geq 1$ τότε (1) : $x^2+y^2=4(x-1)\Leftrightarrow x^2+y^2=4x-4\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+4=0$

$\mathrm{A}=-4, \mathrm{B}=0, \Gamma=4$ έχω : $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=16-16=0$ άρα η εξίσωση $x^2+y^2-4x+4=0$ παριστάνει το σημείο $\mathrm{A}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\rightarrow \mathrm{A}(2,0)$

- Αν $x\leq 1$ τότε (1) : $x^2+y^2=-4(x-1)\Leftrightarrow x^2+y^2=-4x+4\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-4=0$

$\mathrm{A}=4, \mathrm{B}=0, \Gamma=-4$ έχω : $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=16+16=0$ άρα η εξίσωση $x^2+y^2-4x+4=0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\rightarrow \mathrm{K}(-2,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16+16}}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

Τελικά ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σημείο $\mathrm{A}(2,0)$ και ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(-2,0)$ και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

73) Ευθεία ε περνάει από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών Μ του Α(3, 4) στην ε.

74) Έστω οι ευθείες ε: χημθ + γσυνθ=συνθ και η: χσυνθ – γημθ=ημθ. Να δείξετε ότι:
 i. οι ευθείες ε και η τέμνονται.
 ii. το σημείο τομής Μ, των ε και η ανήκει σε κύκλο.
 iii. αν μία ευθεία ζ τέμνει τις ε και η στα Α και Β, τότε $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=0.

75) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=169$ που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{A}(-4,2)$.

76) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C: $x^2+y^2-2x=0$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

77) Δίνονται τα σημεία Α(-1, 2) και Β(0, 3). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε:
 α) $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ β) $A\hat{M}B=90^\circ$.

78) Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2+6x=0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων Μ των κύκλων που έχουν ακτίνα ρ=2 και εφάπτονται του κύκλου C.
 α) εξωτερικά β) εσωτερικά.

79) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία Α(-3,0) και Β(3,0) είναι σταθερός και ισος με 2.

80) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3,5) Β(2,-4) και Γ(-5,-1). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{M\Gamma}^2=107$

81) Να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ(1+ημφ,2-συνφ), όταν το φ μεταβάλετε στο διάστημα [0,2π), κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

82) Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,-2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $(\mathrm{MA})^2+(\mathrm{MB})^2=2$.

83) Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(-1,-2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = 90°$.

84) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $(C): x^2 + y^2 = 25$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο A(2,4).

85) Έστω 2 σημεία A(6,2) και B(3,-1) και ένα τυχαίο σημείο M για το οποίο ισχύει $\vec{\mathrm{MA}} \cdot \vec{\mathrm{MB}} = 1$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M.

86) Δίνεται ο κύκλος $(C): (x-1)^2 + y^2 = 4$ με κέντρο K και A είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε $\vec{\mathrm{MA}} = 3\vec{\mathrm{KA}}$

87) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο A(0,1) είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{3}{2}$.

88) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, από τα οποία οι εφαπτομένες προς τον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 4$ είναι κάθετες.

89) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $(C): x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ είναι κάθετες.

90) Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 - 4x = 0$ και το σημείο A(3,1).
 i. Να δείξετε ότι το σημείο A είναι εσωτερικό του κύκλου.
 ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A.

91) Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(3,0). Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M, για τα οποία:
 i. $|\vec{\mathrm{MA}}|^2 + |\vec{\mathrm{MB}}|^2$=10.
 ii. $2|\vec{\mathrm{MA}}|^2 + 3|\vec{\mathrm{MB}}|^2$=15.

92) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(x+1, y+2) και $\vec{\beta}$=(2–y,x–1). Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M(x,y), αν
 i. $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$
 ii. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

93) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M(5συνθ, 5ημθ).

94) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C: $x^2 + y^2 - 4y + 3=0$, που διέρχονται από το σημείο A(-2, 4).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : (ΜΕΓΙΣΤΕΣ & ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ)

95) Δίνεται ο κύκλος : $(C): x^2+y^2+6x+2y+6=0$. Να βρείτε :

i. Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C)

ii. Τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δυο σημεία του κύκλου (C)

iii. Τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από ένα σημείο του (C)

iv. Τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου Α(1,2) από ένα σημείο του (C)

96) Δίνεται ο κύκλος : $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ και τα σημεία Α(-7,9) και Β(9,-3). Να βρείτε :

i. Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ

iii. Την εξίσωση της ευθείας ΑΒ

iv. Τη μεγίστη και ελάχιστη απόσταση που έχει ένα σημείο της ευθείας ΑΒ από ένα σημείο του (C)

97) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο $x^2+y^2-6x-8y-11=0$

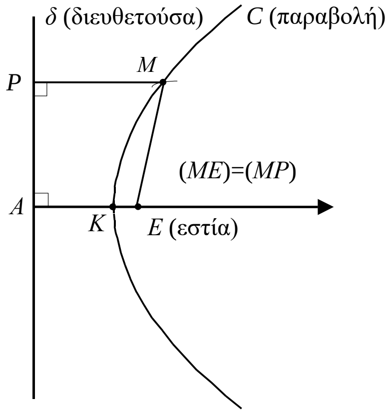
98) Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2λx+1=0$ (1).
Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο C και το κέντρο του να ανήκει στην ευθεία ε: $3x-y+λ^2=0$. Μετά να βρείτε τα σημεία του C που απέχουν μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το Ο.

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

40. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής (σελ. 89 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω μια ευθεία *δ* και ένα σημείο *Ε* εκτός της *δ*. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο *Ε* και **διευθετούσα** την ευθεία *δ* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την *Ε* και τη *δ* (Σχ. α). Αν *Α* είναι η προβολή της εστίας *Ε* στη διευθετούσα *δ*, τότε το μέσο *Κ* του *ΕΑ* είναι προφανώς σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.

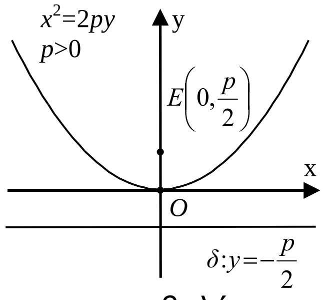


41. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής (σελ. 91 σχολικό)

Απάντηση :

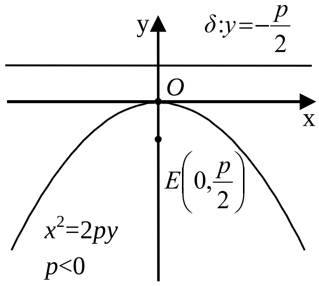
- Η εξίσωση της παραβολής *C* με εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$ είναι

$$\boxed{y^2 = 2px}$$



Ο αριθμός ***p*** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

- Η εξίσωση της παραβολής *C* με εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y=-\frac{p}{2}$ είναι $\boxed{x^2=2py}$



42. Να γράψετε τις ιδιότητες της παραβολής (σελ. 92 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω μια παραβολή $y^2=2px$. (1)

- Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα *p* και *x* (με $x\neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία *Ε*. Επομένως, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα *δ* και η εστία *Ε*.
- Αν το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2=2px_1$, τότε και το σημείο $M_2(x_1,-y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού $(-y_1)^2=2px_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής. Επομένως, η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.

43. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής (σελ. 95 σχολικό)

Απάντηση :

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\boxed{yy_1=p(x+x_1)}$

Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2=2py$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $\boldsymbol{xx_1=p(y+y_1)}$

44. Να γράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής (σελ. 95 σχολικό)

Απάντηση :

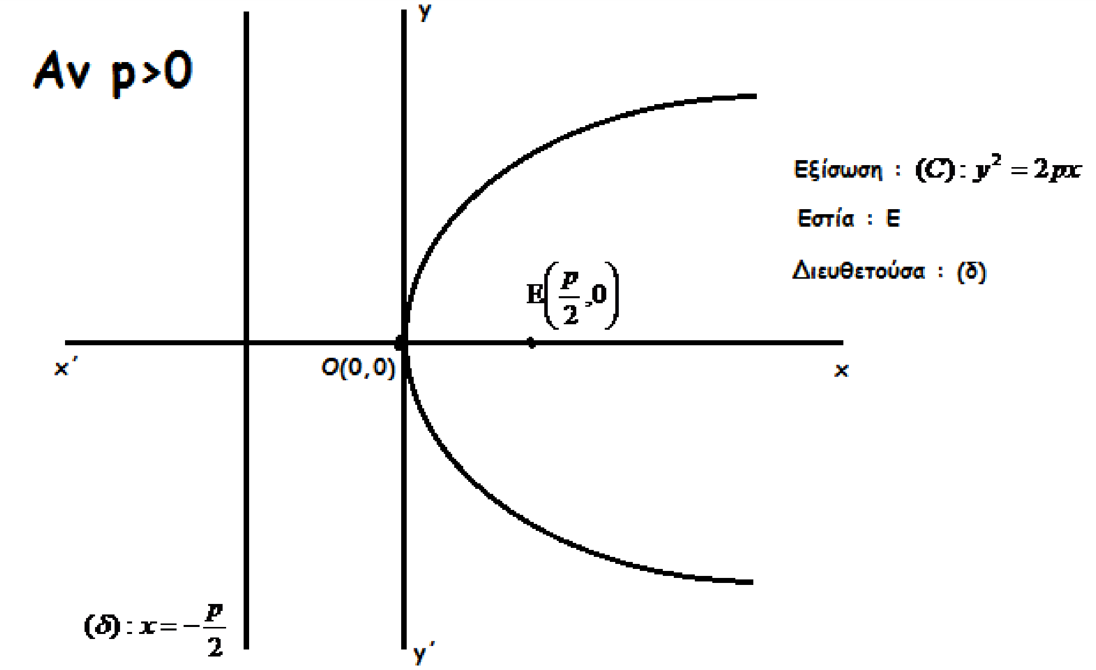
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t, που είναι ομόρροπη της *ΟΕ*, όπου *Ε* είναι η εστία της παραβολής.

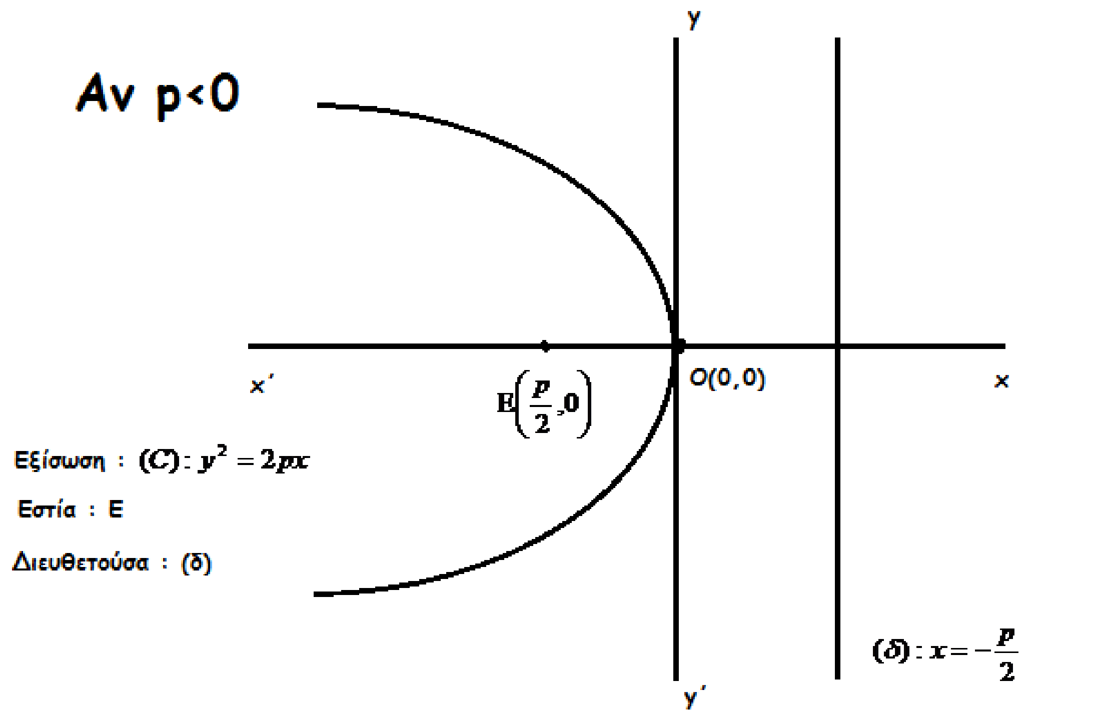
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Παραβολή είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy τα οποία **ισαπέχουν** από μια **ευθεία (δ)** , (διευθετούσα) και ένα σταθερό **σημείο Ε** , (Εστία).

- Αν Μ(x ,y) αυτά τα σημεία και Διευθετούσα $(\delta): x = -\frac{p}{2}$ και Εστία $\mathrm{E}\left(\frac{p}{2},0\right)$ τότε:

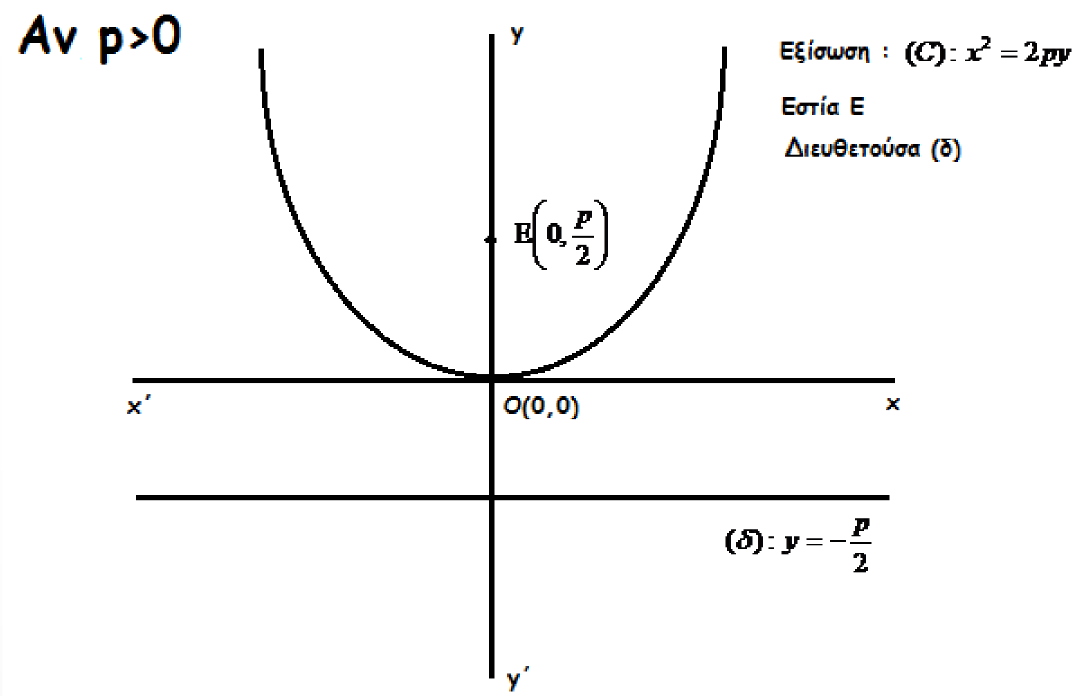
  d(M , δ) = (ME) $\Leftrightarrow (C): y^2 = 2px$.

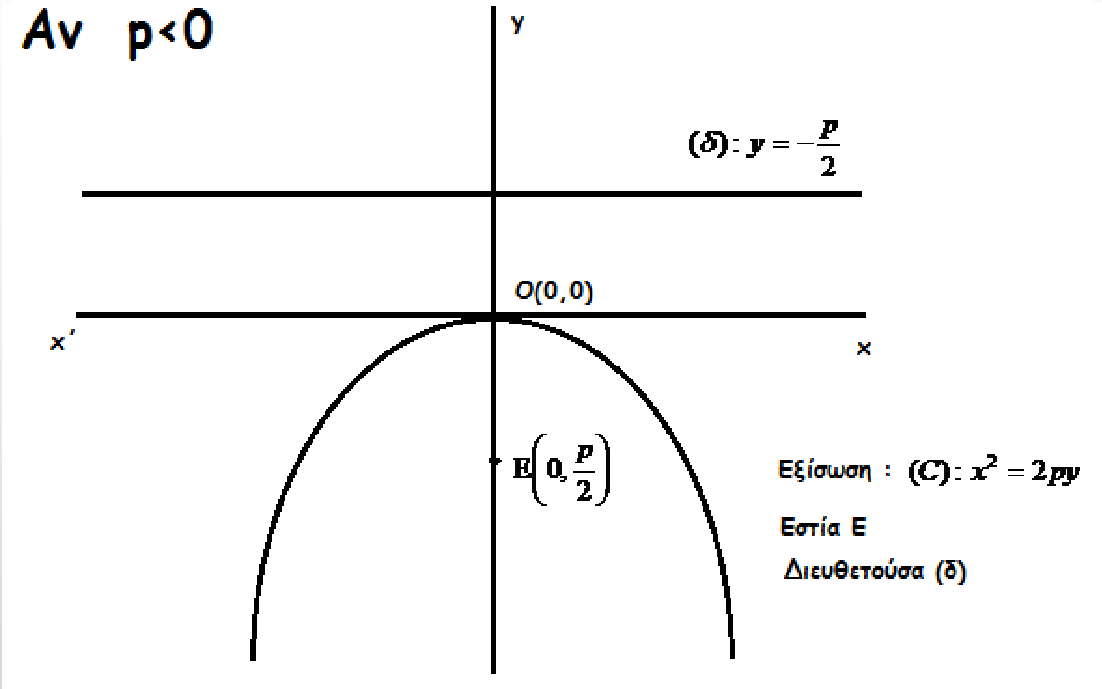




- Αν Μ(x ,y) αυτά τα σημεία και Διευθετούσα $(\delta): y = -\frac{p}{2}$ και Εστία $\mathrm{E}\left(0,\frac{p}{2}\right)$ τότε:

  d(M,δ) = ME $\Leftrightarrow (C): x^2 = 2py$.





- **ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ**
  Η εφαπτομένη της παραβολή $(C): y^2 = 2px$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση : $\boxed{(\varepsilon): y_1 y = p(x + x_1)}$

  Η εφαπτομένη της παραβολή $(C): x^2 = 2py$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση : $\boxed{(\varepsilon): x_1 x = p(y + y_1)}$

- **Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής** : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεια $\mathrm{M}_1\mathrm{E}$ και η ημιευθεια $\mathrm{M}_1 t$, που είναι ομόρροπη της ΟΕ, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει :
i) Εστία Ε(2,0) ii) Εστία Ε(0,-3) iii) Διευθετούσα (δ) : $x=-1$ iv) Διευθετούσα (δ) : $y=5$

Λύση :

i) Ε(2,0) άρα $\frac{p}{2}=2 \Leftrightarrow p=4$ άρα $(C): y^2=2\cdot 4x \Leftrightarrow y^2=8x$

ii) Ε(0,-3) άρα $\frac{p}{2}=-3 \Leftrightarrow p=-6$ άρα $(C): x^2=2\cdot(-6)y \Leftrightarrow x^2=-12y$

iii) (δ) : $x=-1$ $-\frac{p}{2}=-1 \Leftrightarrow p=2$ άρα $(C): y^2=2\cdot 2x \Leftrightarrow y^2=4x$

iv) (δ) : $y=5$ άρα $-\frac{p}{2}=5 \Leftrightarrow p=-10$ άρα $(C): x^2=2\cdot(-10)y \Leftrightarrow x^2=-20y$

2) Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση :

i) $y^2=6x$ ii) $y^2=-8x$ iii) $x^2=4y$ iv) $y=-\frac{1}{4}x^2$

Λύση :

i) $y^2=6x$ $p=3$ άρα Εστία : $\mathrm{E}\left(\frac{p}{2},0\right) \to \mathrm{E}\left(\frac{3}{2},0\right)$,

Διευθετούσα : (δ): $x=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

ii) $y^2=-8x$ $p=-4$ άρα Εστία : $\mathrm{E}\left(\frac{p}{2},0\right) \to \mathrm{E}(-2,0)$,

Διευθετούσα : (δ): $x=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow x=2$

iii) $x^2=4y$ $p=2$ άρα Εστία : $\mathrm{E}\left(0,\frac{p}{2}\right) \to \mathrm{E}(0,1)$,

Διευθετούσα : (δ): $y=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow y=-1$

iv) $y=-\frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2=-4y$ $p=-2$ άρα Εστία : $\mathrm{E}\left(0,\frac{p}{2}\right) \to \mathrm{E}(0,-1)$,

Διευθετούσα : (δ): $y=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow y=1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει :
i. Εστία Ε(1,0)
ii. Εστία Ε(0,-2)
iii. Διευθετούσα (δ) : $x=3$
iv. Διευθετούσα (δ) : $y=-3$

4) Να βρεθεί η εστία Ε και η διευθετούσα (δ) των παραβολών με εξισώσεις
i. $y^2=-8x$
ii. $x^2=12y$

5) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής αν έχει:
   i. Εστία Ε(2,0).
   ii. Εστία Ε(–2,0).
   iii. Διευθετούσα την ευθεία x=4.
   iv. Άξονα συμμετρίας τον x'x και το Α(3,3) είναι σημείο της.

6) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής (C) : $y=\frac{1}{4}x^2$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+3$

7) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από το Α(3,0) και την ευθεία ε:x+3=0.

8) Δίνονται τα σημεία Α(–1,y) και Β(2x,y). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x,y) αν AOB=90^o.

9) Δίνεται η παραβολή y^2=12x και το σημείο Α(4,2). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και τέμνει την παραβολή στα Β, Γ ώστε το Α να είναι μέσον του ΒΓ.

10) Δίνεται η παραβολή y^2=4x και η ευθεία ε:y=x–1.
   i. Να δείξετε ότι η ε διέρχεται από την εστία της παραβολής.
   ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της ε και της παραβολής.

11) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της παραβολής $y^2=8x$, η οποία έχει μέσο το σημείο Μ(3,1).

12) Δίνεται η παραβολή $y^2=6x$. Από σημείο Ρ(-3,3) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ προς την παραβολή. Να βρεθεί η εξίσωση ΑΒ.

13) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2=8x$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Ρ(5,-7)

14) Δίνεται η παραβολή $y^2=-4x$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της οι οποίες απέχουν από την κορυφή της απόσταση ίση με $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15) Δίνεται η παραβολή $y^2=12x$. Η εφαπτομένη της παραβολής σε ένα σημείο της Α με χ=1 τέμνει τον άξονα χ'χ στο Β. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισόπλευρο, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής.

16) Η παραβολή με εξίσωση $y^2=ax$ διέρχεται από το σημείο Α(2,4) , όπου $a\in\Re$.
   i. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε(2,0). (5)
   ii. Έστω Ε' το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα y'y . Αν Μ(x,y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\vec{\mathrm{ME}}^2=\vec{\mathrm{ME}}\cdot\vec{\mathrm{E'E}}$, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(x,y) ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και ακτίνα 2. (10)
   iii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α. (10)

17) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=8x$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45^o.

18) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής:
  i. $y^2=6x$ που διέρχεται από το Μ(0,1)
  ii. $x^2=4y$ στο σημείο με τετμημένη 2
  iii. $y^2=4x$ στο Α(1,–2) και την απόστασή της από την εστία.

19) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής (C) : $y=\frac{1}{4}x^2$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+3$.

20) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (C) : $x^2+y^2-6x+1=0$ εφάπτεται στην παραβολή (C) : $y^2=4x$. (Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτομένες στα κοινά σημεία τους) (13)

21) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες της παραβολής (C) : $x^2=4y$ στα σημεία της Α(4,4) και Β$\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ τέμνονται κάθετα σε σημείο που ανήκει στη διευθετούσα της. (13)

22) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:
  i. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής
  ii. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  iii. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε):y= x – 1.

23) Δίνεται η παραβολή $y^2=4αx$ και το σημείο Α(α,2α).
  i. Να δείξετε ότι το Α ανήκει στην παραβολή.
  ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της στο Α.
  iii. Να βρείτε το α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες να ισούται με $\frac{3α}{2}-1$.

24) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής $y^2=8x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έχουν κοινά σημεία οι δύο κωνικές τομές;

25) Έστω η παραβολή C: $y^2=4x$ και η ευθεία ε:y=x–1.
  i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της παραβολής.
  ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της ευθείας ε και της παραβολής C.
  iii. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

45. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης (σελ. 100 σχολικό)

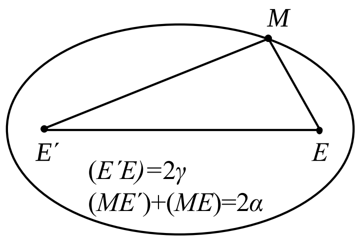
Απάντηση :

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερό* και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως,με **2α** και την απόσταση των εστιών E' και E με **2γ**. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.

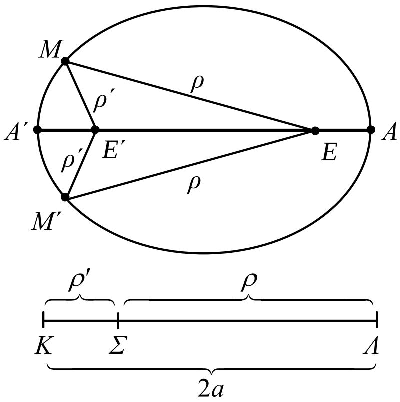
Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

α) Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν

$$\boxed{(ME')+(ME)=2\alpha}$$



β) Ισχύει $(E'E)<(ME')+(ME)$, δηλαδή $2\gamma<2\alpha$ οπότε **γ<α**. Αν $\gamma=0$, τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα α.

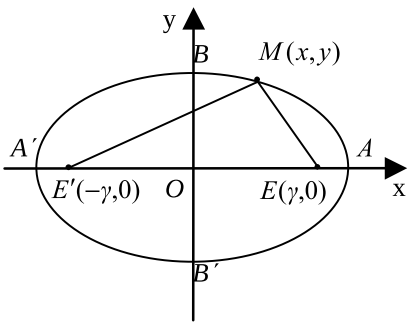


46. Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης (σελ. 103 σχολικό)

Απάντηση :

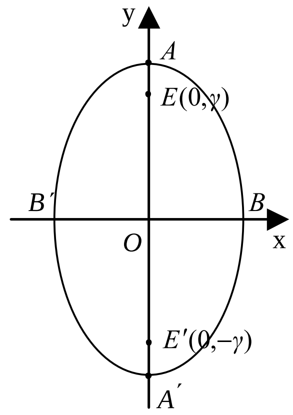
➢ Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$$



- Η εξίσωση της έλλειψης *C* με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$$



47. Να γράψετε τις ιδιότητες της έλλειψης (σελ. 104 σχολικό)

Απάντηση :

Έστω μια έλλειψη $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

- Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης *C*, τότε τα σημεία $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_1,y_1)$ και $M_4(-x_1,-y_1)$ ανήκουν στην *C*, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E',E της έλλειψης και η μεσοκάθετος του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο *O* του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο *O* λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.

- Από την εξίσωση της έλλειψης για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\beta$. Επομένως, η έλλειψη *C* τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$. Τα σημεία A',A,B',B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A)=2\alpha$ και $(B'B)=2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς *O* σημεία M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι $\boldsymbol{2\beta\leq(M_1M_4)\leq2\alpha}$,

δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

- Τέλος, από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2}=1-\frac{y^2}{\beta^2}\leq1$

Οπότε $x^2-\alpha^2\leq0$ και άρα $\boldsymbol{-\alpha\leq x\leq\alpha}$. Ομοίως $\boldsymbol{-\beta\leq y\leq\beta}$.

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και $y=-\beta$, $y=\beta$.

48. Τι καλούμε εκκεντρότητα μιας έλλειψης ; (σελ. 104 σχολικό)

Απάντηση :
Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$.

Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Όταν το ε τείνει στο μηδέν, η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όταν, όμως, το ε τείνει στη μονάδα, τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα. Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες**.

49. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης (σελ. 108 σχολικό)

Απάντηση :

- Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$

- Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boldsymbol{\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$$

50. Να γράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της της έλλειψης (σελ. 108 σχολικό)

Απάντηση :

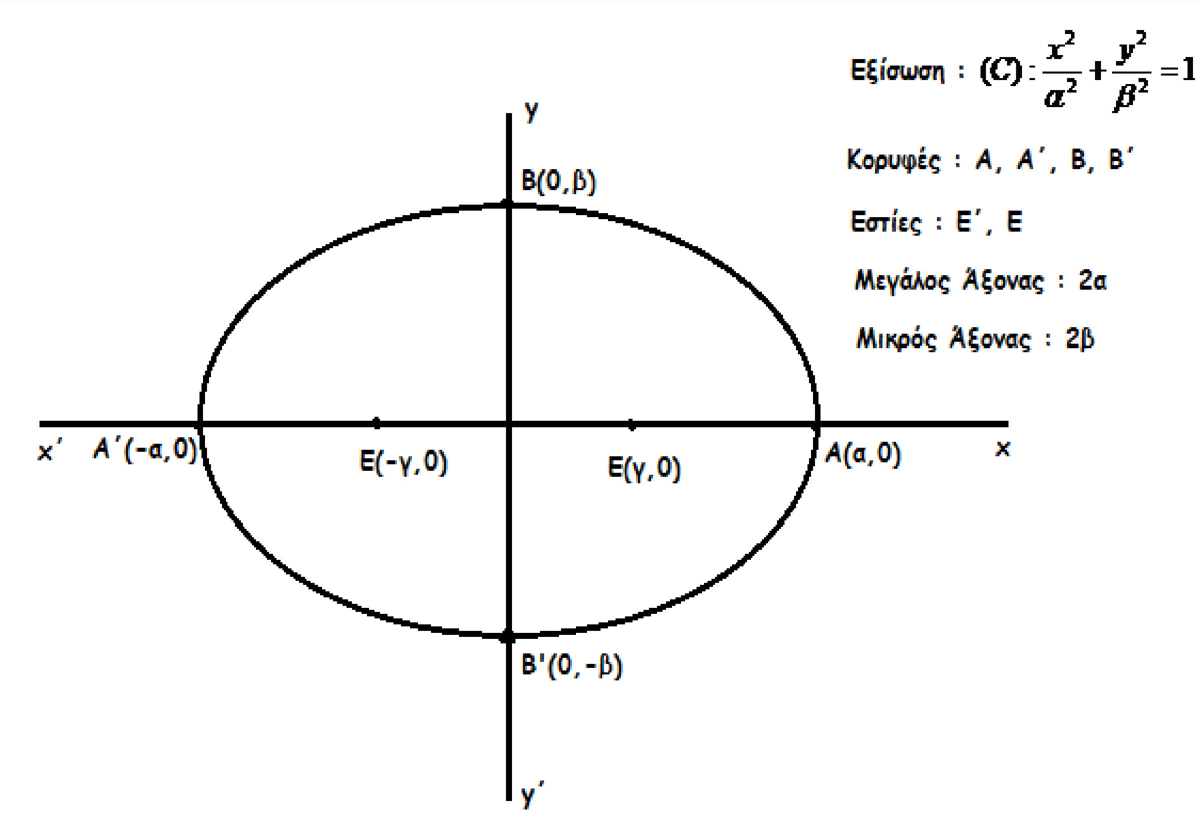
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής *Μ* διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E',E οι εστίες της έλλειψης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

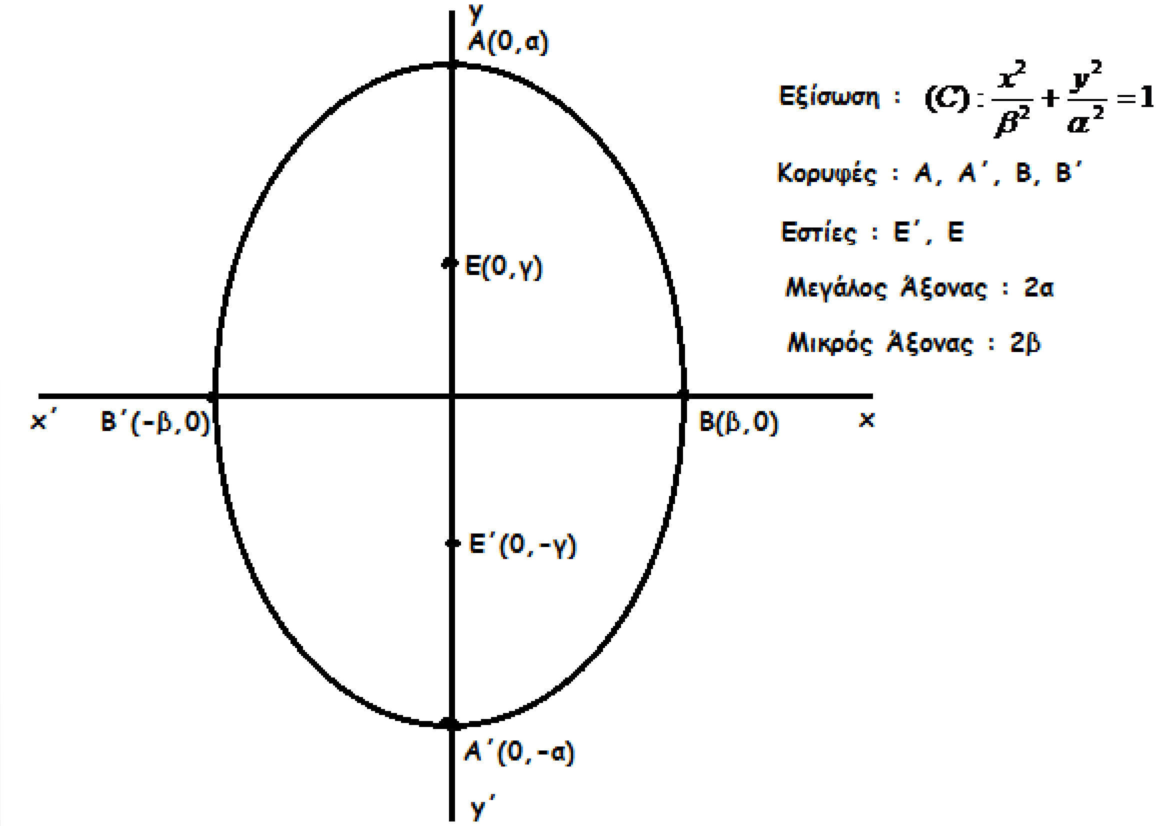
Έλλειψη είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy τα οποία έχουν **σταθερό άθροισμα αποστάσεων , (2α)** , από δύο **σταθερά σημεία** Ε , Ε΄ (εστίες)

(Πρέπει: ΕΕ΄= 2γ<2α).

- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0) τότε: $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME'})=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.



- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(0,γ), Ε΄(0,-γ) τότε: $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME'})=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.



- Εκκεντρότητα της έλλειψης ονομάζεται ο αριθμός ε=$\frac{\gamma}{\alpha}$

- **<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΛΛΗΨΗΣ</u>**

  Η εφαπτομένη της έλλειψης $(C): \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

  $$\boxed{(\varepsilon): \frac{x_1 x}{\alpha^2}+\frac{y_1 y}{\beta^2}=1}$$

  Η εφαπτομένη της έλλειψης $(C): \frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

  $$\boxed{(\varepsilon): \frac{y_1 y}{\alpha^2}+\frac{x_1 x}{\beta^2}=1}$$

- **Ανακλαστική Ιδιότητα Έλλειψης :** Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία Ε΄ΜΕ, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :
   i) όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-4,0) και Ε(4,0) και μεγάλο άξονα 10
   ii) όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0,-5) και Ε(0,5) και μεγάλο άξονα 26

Λύση :

i) Ε΄(-4,0) και Ε(4,0) άρα γ=4, μεγάλος άξονας 10 άρα $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$
Επίσης $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = \pm 3$
Άρα $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

ii) Ε΄(0,-5) και Ε(0,5) άρα γ=5, μεγάλος άξονας 26 άρα $2\alpha = 26 \Leftrightarrow \alpha = 13$
Επίσης $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow \beta^2 = 144 \Leftrightarrow \beta = \pm 12$
Άρα $(C): \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

2) Να βρείτε τα μήκη αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων :
   i) $x^2 + 4y^2 = 4$ ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$

Λύση :

i) $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ άρα $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$ και
$\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = \pm 1$ άρα $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow 1 = 4 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 3 \Leftrightarrow \gamma = \pm\sqrt{3}$
Μεγάλος Άξονας : $2\alpha = 4$, Μικρός Άξονας $2\beta = 2$, Εστίες $\mathrm{E}'(-\sqrt{3},0)$, $\mathrm{E}(\sqrt{3},0)$
Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336 \Leftrightarrow \frac{169x^2}{24336} + \frac{144y^2}{24336} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$
άρα $\alpha^2 = 169 \Leftrightarrow \alpha = \pm 13$ και $\beta^2 = 144 \Leftrightarrow \beta = \pm 12$ άρα
$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow 144 = 169 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = \pm 5$
Μεγάλος Άξονας : $2\alpha = 26$, Μικρός Άξονας $2\beta = 24$, Εστίες $\mathrm{E}'(0,-5)$, $\mathrm{E}(0,5)$
Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{13}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει :
   i. όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-4,0) και Ε(4,0) και μικρό άξονα 6
   ii. όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0,-2) και Ε(0,2) και μεγάλο άξονα 12

4) Να βρείτε τα μήκη αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων :
   i. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ ii. $12x^2 + 3y^2 = 36$

5) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Μ(x,y) των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα σημεία Ε'(–4,0) και Ε(4,0) είναι 10.

6) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία Ε(0,3) και Ε'(0,–3) είναι 8.

7) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με μεγάλο άξονα στον x'x αν δίνονται:
   i. α=2β, Ε($2\sqrt{5}$,0), Ε'($-2\sqrt{5}$,0)
   ii. α=2β, και το σημείο της Μ(6,4).
   iii. Ε(3,0), Ε'(–3,0) και η κορυφή Β(0,4).
   iv. τα σημεία Κ(3,2) και Λ($4,\frac{4\sqrt{2}}{3}$)
   v. 2α=10, 2γ=8
   vi. η εστία Ε(2,0) και η κορυφή Α(5,0).

8) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:
   i. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ii. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$ iii. $16x^2+25y^2=1$

9) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με μεγάλο άξονα Α'Α τα σημεία που ο κύκλος $x^2+y^2=25$ τέμνει τον x'x και μία εστία, την εστία της παραβολής $y^2=6x$.

10) Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται σε επίπεδο έτσι ώστε η απόστασή του από την ευθεία y=8 είναι διπλάσια της απόστασής του από το σημείο Α(0,2). Να βρείτε τον γ.τ. του Μ.

11) Αν οι ελλείψεις $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{112}=1$ είναι όμοιες, να δείξετε ότι α=16.

12) Δίνεται η παραβολή $y^2=8x$. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εκκεντρότητα $ε=\frac{1}{2}$ και κορυφή Α την εστία της παραβολής.

13) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ στα σημεία Κ($-1,\frac{4\sqrt{2}}{3}$), Μ(0,2).

14) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2+3y^2=3$ που είναι:
   i. παράλληλες στην η: x+3y+1=0.
   ii. κάθετες στην ζ: x+y+2=0.
   iii. διέρχονται από το Μ(4,–6).

15) Δίνονται οι κωνικές τομές $y^2=8x$ και $4x^2+2y^2=48$.
   i. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης.
   ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών Κ και Λ.
   iii. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ είναι κάθετες.

16) Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $4x^2+y^2=4$, που σχηματίζει με τον x'x γωνία 45^o.

17) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=4$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ στα κοινά τους σημεία συμπίπτουν.

18) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία η: 2x+3y=1 στο σημείο Μ(–1,1) και έχει το κέντρο του στην εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ στο Α(2,0).

3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

51. Να δώσετε τον ορισμό της υπερβολής (σελ. 113 σχολικό)

Απάντηση :

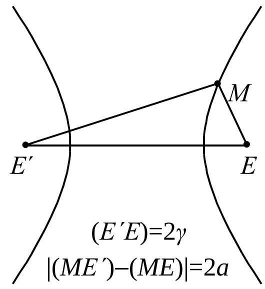
Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερή* και μικρότερη του $(E'E)$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμεσυνήθως με 2α, ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό:

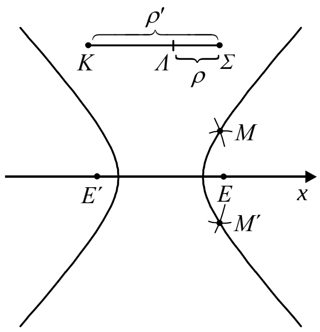
α) Ένα σημείο M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν

$$\boxed{|(ME')-(ME)|=2\alpha}.$$

β) Ισχύει $|(ME')-(ME)|<(E'E)$ δηλαδή $2\alpha<2\gamma$, οπότε $\boldsymbol{\alpha<\gamma}$.



Για να βρούμε σημεία της υπερβολής C, εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ μήκους 2α και ένα οποιοδήποτε σημείο Σ της ημιευθείας $K\Lambda$ εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$. Με κέντρα E' και E και ακτίνες $\rho'=(K\Sigma)$ και $\rho=(\Lambda\Sigma)$, αντιστοίχως, γράφουμε κύκλους οι οποίοι τέμνονται στα σημεία M και M'. Τα σημεία M και M' είναι σημεία της υπερβολής, γιατί ισχύει $(ME')-(ME)$ $=(K\Sigma)-(\Lambda\Sigma)=(K\Lambda)=2\alpha$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε οσαδήποτε σημεία της υπερβολής.

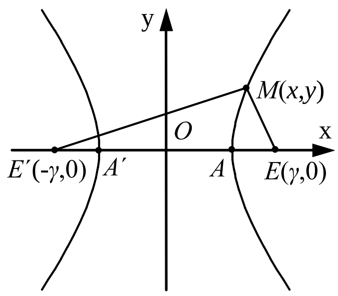


52. Να γράψετε την εξίσωση της υπερβολής (σελ. 115 σχολικό)

Απάντηση :

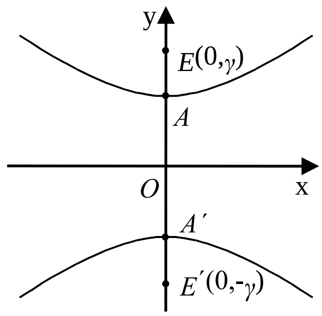
- Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$



- Η εξίσωση της υπερβολής *C* με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\boxed{\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$



- Τέλος, αν είναι $\alpha=\beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: $x^2-y^2=\alpha^2$

53. Να γράψετε τις ιδιότητες της υπερβολής (σελ. 116 σχολικό)

Απάντηση :

- Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής *C*, τότε και τα σημεία $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_1,y_1)$ και $M_4(-x_1,-y_1)$ ανήκουν στην *C*, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή *C* έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E',E της υπερβολής και η μεσοκάθετη του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο *Ο* του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο *Ο* λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

- Από την εξίσωση της υπερβολής για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$. Συνεπώς, η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$, και $A(\alpha,0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Από την ίδια εξίσωση για $x=0$ προκύπτει η εξίσωση $y^2=-\beta^2$, η οποία είναι αδύνατη στο **R**. Επομένως, **η υπερβολή *C* δεν τέμνει τον άξονα $y'y$**.

- Τέλος, από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2}=1+\frac{y^2}{\beta^2}\geq 1$, οπότε $x^2-\alpha^2\geq 0$ και άρα

$$x\leq -\alpha \quad \text{ή} \quad x\geq \alpha .$$

Επομένως, τα σημεία της υπερβολής *C* βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

54. Ποιες είναι οι ασύμπτωτες της υπερβολής ; (σελ. 118 σχολικό)

Απάντηση :

- Οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $\boxed{y=\frac{\beta}{\alpha}x, \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$
- Οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $\boxed{y=\frac{\alpha}{\beta}x \quad y=-\frac{\alpha}{\beta}x}$
- Είναι φανερό ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογώνιου *ΚΛΜΝ* με κορυφές τα σημεία $K(\alpha,\beta)$, $\Lambda(\alpha,-\beta)$, $M(-\alpha,-\beta)$ και $N(-\alpha,\beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.

55. Τι καλούμε εκκεντρότητα μιας υπερβολής ; (σελ. 119 σχολικό)

Απάντηση :

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$$

Όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

56. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (σελ. 120 σχολικό)

Απάντηση :

- Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σ΄ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$

- Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ σ΄ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boxed{\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$$

57. Να γράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της της υπερβολής (σελ. 121 σχολικό)

Απάντηση :

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της *Μ* διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E',E οι εστίες της υπερβολής.

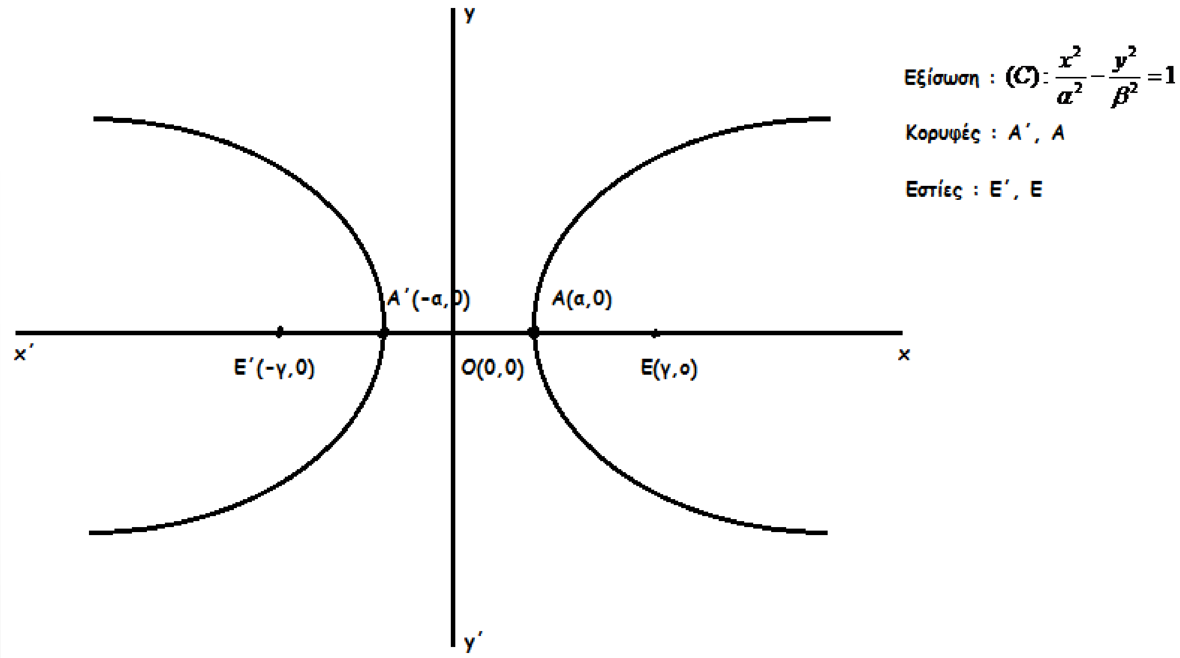
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Υπερβολή είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου Οχψ τα οποία έχουν **σταθερή απόλυτη διαφορά αποστάσεων , (2α)** , από δύο **σταθερά σημεία** Ε , Ε΄ (εστίες),

(Πρέπει: ΕΕ΄= 2γ>2α)

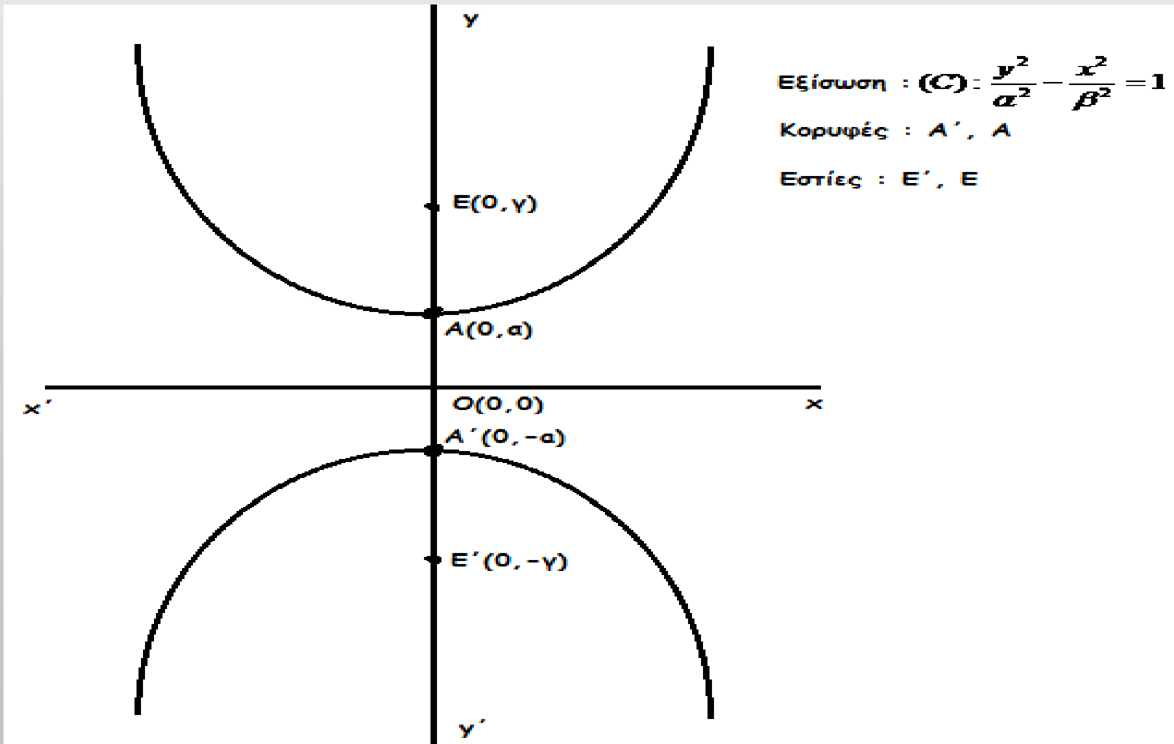
- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0) τότε:

$$|(ME)-(ME')|=2\alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \qquad \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.$$



- Αν M(x,y) αυτά τα σημεία και Ε(0,γ), Ε΄(0,-γ) τότε:

$$|(ME)-(ME')|=2\alpha \Leftrightarrow \frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1, \qquad \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.$$



- Εκκεντρότητα της υπερβολής ονομάζεται ο αριθμός $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$,
- Ασύμπτωτες τις υπερβολής $(C): \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ και $(\varepsilon_2): y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$, ενώ της $(C): \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$ οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \dfrac{\alpha}{\beta}x$ και $(\varepsilon_2): y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x$.
- Αν α=β, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής υπερβολή και έχει εξίσωση της μορφής : $(C): x^2 - y^2 = \alpha^2$
- **<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ</u>**

  Η εφαπτομένη της υπερβολής $(C): \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση : $\boxed{(\varepsilon): \dfrac{x_1 x}{\alpha^2} - \dfrac{y_1 y}{\beta^2} = 1}$

  Η εφαπτομένη της έλλειψης $(C): \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

  $\boxed{(\varepsilon): \dfrac{y_1 y}{\alpha^2} - \dfrac{x_1 x}{\beta^2} = 1}$

- **Ανακλαστική Ιδιότητα Υπερβολής :** Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της Μ διχοτομεί τη γωνία Ε΄ΜΕ, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της υπερβολής.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

1) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :
   i) όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-13,0) και Ε(13,0) και κορυφές τα σημεία Α΄(-5,0) και Α(5,0)
   ii) όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0,-10) και Ε(0,10) και εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{5}{3}$

<u>Λύση :</u>

i) Ε΄(-13,0) και Ε(13,0) άρα γ=13,
κορυφές τα σημεία Α΄(-5,0) και Α(5,0) άρα $\alpha = 5$
Επίσης $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow \beta^2 = 144 \Leftrightarrow \beta = \pm 12$
Άρα $(C): \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$

ii) Ε΄(0,-10) και Ε(0,10) άρα γ=10,
εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{10}{\alpha} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow 5\alpha = 30 \Leftrightarrow \alpha = 6$
Επίσης $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \beta^2 = 64 \Leftrightarrow \beta = \pm 8$
Άρα $(C): \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{64} = 1$

2) Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες των υπερβολών :

i) $9x^2-16y^2=144$ ii) $x^2-y^2=4$

<u>Λύση :</u>

i) $9x^2-16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ άρα $\alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=\pm 4$ και $\beta^2=9 \Leftrightarrow \beta=\pm 3$ άρα $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow 9=\gamma^2-16 \Leftrightarrow \gamma^2=25 \Leftrightarrow \gamma=\pm 5$

Εστίες : $\mathrm{E}'(-5,0)$, $\mathrm{E}(5,0)$, Εκκεντρότητα : $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$

Ασύμπτωτες : $(\varepsilon_1): y=\frac{3}{4}x$ και $(\varepsilon_2): y=-\frac{3}{4}x$

ii) $x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ (ισοσκελής υπερβολή) άρα $\alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=\pm 2$ και $\beta^2=4 \Leftrightarrow \beta=\pm 2$ άρα $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow 4=\gamma^2-4 \Leftrightarrow \gamma^2=8 \Leftrightarrow \gamma=\pm 2\sqrt{2}$

Εστίες : $\mathrm{E}'(-2\sqrt{2},0)$, $\mathrm{E}(2\sqrt{2},0)$, Εκκεντρότητα : $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Ασύμπτωτες : $(\varepsilon_1): y=\frac{2}{2}x \Leftrightarrow y=x$ και $(\varepsilon_2): y=-\frac{2}{2}x \Leftrightarrow y=-x$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

3) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει :

i. όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(-5,0) και Ε(5,0) και απόσταση κορυφών 8
ii. όταν έχει εστίες : $\mathrm{E}'(-2\sqrt{5},0)$, $\mathrm{E}(2\sqrt{5},0)$ και εκκεντρότητα : $\varepsilon=\sqrt{5}$.

4) Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες των υπερβολών:

i. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ii. $9x^2-4y^2=36$

5) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον x'x αν έχει:

i. γ=5, β=4
ii. α=4 και διέρχεται από το Μ(5,3).
iii. κορυφές Α(6,0), Α'(–6,0) και ε=4/3.

6) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον y'y αν έχει:

i. γ=5, β=4
ii. γ=10, ε=5/3

7) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον x'x αν έχει:

i. εστιακή απόσταση 6 και εκκεντρότητα $\frac{3}{2}$.
ii. εστιακή απόσταση 20 και ασύμπτωτη την y=$\frac{4}{3}$x.

8) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον x'x αν έχει:

i. κάθετες ασύμπτωτες και γ=$\sqrt{2}$.
ii. εστιακή απόσταση 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.
iii. ε=$\sqrt{2}$ και διέρχεται από το Μ(5,4).

9) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον y'y αν έχει κάθετες ασύμπτωτες και γ=$\sqrt{5}$.

10) Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\beta^2}$=1, της οποίας η ασύμπτωτη y=$\frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον x'x γωνία 30^o.

11) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον x'x αν έχει εστιακή απόσταση 20 και ασύμπτωτη την y=$\frac{4}{3}$x.

12) Οι υπερβολές $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$=1 και $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}$=1 έχουν:

i. Ίδιες ασύμπτωτες Σ ή Λ;
ii. Ίδια εκκεντρότητα Σ ή Λ;

13) Να βρείτε την εστιακή απόσταση της υπερβολής $3x^2–13y^2=39$

14) Να βρείτε τις εστίες και την εστιακή απόσταση της υπερβολής $3y^2–13x^2=39$

15) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$=1 και η μία κορυφή της είναι το Α($\sqrt{5}$,0).

16) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη
$4x^2+9y^2=36$
και κορυφές Α και Α' με $|AA'|$=4.

17) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής, που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$=1 και εκκεντρότητα ε=5/4.

18) Να βρείτε την γωνία των ασύμπτωτων μιας υπερβολής αν β=$\sqrt{3}$ και γ=2α.

19) Ομοίως αν ε=2.

20) Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής είναι τετράγωνο με πλευρά 4. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

21) Δίνεται η υπερβολή $9x^2–y^2=1$. Να δείξετε ότι η ευθεία ε:y=3x+2 είναι παράλληλη σε μία από τις ασύμπτωτες. Σε πόσα σημεία η ε τέμνει την υπερβολή;

22) Δίνεται η υπερβολή $3x^2–y^2=3\alpha^2$. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον άξονα x'x.

23) Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$=1. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου βάσης.

24) Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής $x^2–2y^2=2$ στο σημείο Α(2,1). Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από την εφαπτομένη είναι 1.

25) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ που διέρχονται από το σημείο Α(1,0).

26) Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(1,4) και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x–y+1=0$ εφάπτεται στην υπερβολή $x^2–4y^2=12$ στο Κ(–4,–1).

27) Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ με εστίες Ε, Ε'. Να βρείτε την εφαπτομένη της στο $M(6,\frac{3\sqrt{5}}{2})$ και το σημείο Ρ που η εφαπτομένη τέμνει τον x'x. Να δείξετε ότι $: E'MP = EMP$.

28) Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο Α(4,0) τέμνει την ασύμπτωτη $y=\frac{3}{4}x$ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι (ΟΕ)=(ΟΓ), όπου Ε η εστία της υπερβολής.

29) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$ στα σημεία με τετμημένη 3.

30) Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$ στην κορυφή Α τέμνει την ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΕΓ είναι ισόπλευρο.

31) Δίνεται η έλλειψη $9x^2+25y^2=225$ και η υπερβολή $x^2–7y^2=14$. Να δείξετε ότι:

i. Έχουν τις ίδιες εστίες.
ii. Τα σημεία τομής των σχηματίζουν ορθογώνιο.
iii. Οι εφαπτόμενες στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.

3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$

58. Τι γνωρίζεται για τη σχετική θέση ευθείας και κωνικής ; (σελ. 128 σχολικό)

<u>Απάντηση :</u>

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$. Η ευθεία ε και η κωνική *C* έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

1) Να δείξετε ότι για να εφάπτεται η ευθεία ε:y=λx+κ στον κύκλο c: $x^2+y^2=\rho^2$ πρέπει $\kappa^2=\rho^2(\lambda^2+1)$.

2) Να βρείτε το μ ώστε ο κύκλος $x^2+y^2=25$ να εφάπτεται στην ευθεία 2x+y=μ.

3) Δίνεται ο κύκλος c: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ και η ευθεία λx–4y+4=0, $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το λ ώστε:
   i. Να τέμνονται
   ii. Να εφάπτονται
   iii. Να μην έχουν κοινά σημεία.

4) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και η ευθεία y=λx+k. Να δείξετε ότι έχουν ένα κοινό σημείο αν p=2kλ.

5) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής :$y^2=2px$, p>0 που εφάπτεται στην ευθεία (ε):3x–2y+3=0

6) Δίνεται η παραβολή $y^2=2x$ και η ευθεία ε: x–λy+8=0. Να βρείτε το λ ώστε η ε να εφάπτεται της παραβολής και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

7) Δίνεται η υπερβολή $x^2-y^2=1$ και η ευθεία ε: y=2x+λ. Να βρείτε το λ ώστε η ε να εφάπτεται της υπερβολής και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2014 - 2015

3.1 ΚΥΚΛΟΣ

1. ΘΕΜΑ 2

2.22507

Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+10y+16=0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-5)$ και ακτίνα $\rho=3$. Μονάδες 12

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. Μονάδες 13

2. ΘΕΜΑ 2

2.22508

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο που διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$ και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C:(x-4)^2+(y-8)^2=5$,και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K . Μονάδες 13

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

3. ΘΕΜΑ 2

2.22533

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(x, y), Β(3, 2) και Γ(1, 0) . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο $C:(x-2)^2+(y-1)^2=2$. Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές. Μονάδες 12

4. ΘΕΜΑ 2

2.22534

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $K(2,-1)$ και $A(-6,5)$.

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α, έχει εξίσωση $C:(x-2)^2+(y+1)^2=100$ Μονάδες 12

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C. Μονάδες 13

5. ΘΕΜΑ 2

2.22536

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(1, 0), Β(3, - 2) και την ευθεία $\varepsilon: x+y+1=0$.Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ. Μονάδες 10

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε. Μονάδες 15

6. ΘΕΜΑ 4

4.22557

Έστω η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda=2$ και τι όταν $\lambda=6$; Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο. Μονάδες 8

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6) , να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. Μονάδες 9

7. ΘΕΜΑ 4

4.22558

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2=-x_1$ και $y_2=-y_1$; Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν(κ,λ) για τα οποία ισχύει $\overline{NA}\cdot\overline{NB}=5$ είναι ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=9$. Μονάδες 12

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει: $4\le x^2+y^2\le 9$. Μονάδες 8

8. ΘΕΜΑ 4

4.22581

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x΄x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. Μονάδες 7

γ) Το σημείο $M(2,-1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M. Μονάδες 10

9. ΘΕΜΑ 4

4.22584

Δίνονται οι εξισώσεις $(x+y-1)(x+y+1)=2xy$ (1) και $(\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+2\lambda-5=0$ (2) $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. Μονάδες 10

γ) Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2). Μονάδες 7

10. ΘΕΜΑ 4

4.22586

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-(3\alpha+2)x+\alpha^2-4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο. Μονάδες 10

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha=2$ και $y=\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ. Μονάδες 10

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το Ο. Μονάδες 5

11. ΘΕΜΑ 4

4.22587

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(-25, 0) και B(-1, 0) για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{AM}|=5|\overrightarrow{BM}|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο $C: x^2+y^2=25$. Μονάδες 10

β) Θεωρούμε το σημείο Σ(7, 1) .

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C . Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. Μονάδες 10

12. ΘΕΜΑ 4

4.22589

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(-2, 0) και B(2, 0) ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=3\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος $C: x^2+y^2=20$ Μονάδες 10

β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2=5$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων Ο, είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$ όταν το Μ κινείται στον κύκλο. Μονάδες 5

13. ΘΕΜΑ 4

4.22590

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda-1)x-(\lambda-7)y+\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda\neq5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda=5$. Μονάδες 12

β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda=3$ και $\lambda=9$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. Μονάδες 6

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. Μονάδες 7

3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

14. ΘΕΜΑ 2

2.22511

Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία ε: $x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C.

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 10

β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ, καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα. Μονάδες 10

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C.

Μονάδες 5

15. ΘΕΜΑ 2

2.22512

Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. Μονάδες 13

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2. Μονάδες 12

16. ΘΕΜΑ 2

2.22514

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1: y^2 = -2px$ και $C_2: y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα.

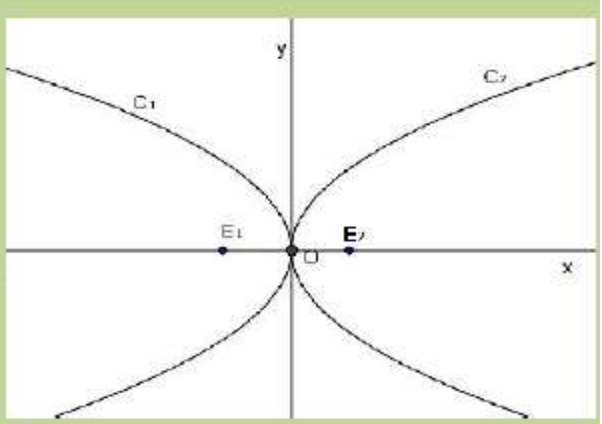
Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.

α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

Μονάδες 10



17. ΘΕΜΑ 4

4.22559

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $ε: x-y-1=0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1: (x-1)^2+y^2=25$. Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1. Μονάδες 7

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2, τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $ε_1$ και $ε_2$ της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά. Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1. Μονάδες 4

18. ΘΕΜΑ 4

4.22560

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $Γ(0,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C: x^2+(y-4)^2=4$ Μονάδες 10

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C. Μονάδες 9

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2. Μονάδες 6

19. ΘΕΜΑ 4

4.22579

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$, την παραβολή $y^2=4x$ και έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(MAB)=\frac{1}{4}\left(y^2+4y+16\right)$ **ii.** $(MAB)\geq 3$ Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ ώστε το εμβαδόν (ΜΑΒ) του τριγώνου ΜΑΒ να γίνεται ελάχιστο. Μονάδες 5

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν $M(1, -2)$. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΜΑΒ. Μονάδες 10

3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

20. ΘΕΜΑ 2

2.22509

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 8$ Μονάδες 13

21. ΘΕΜΑ 2

2.22510

Δίνονται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 20$,η έλλειψη $C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία ε: $x = 4$. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . Μονάδες 11

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. Μονάδες 14

22. ΘΕΜΑ 2

2.22516

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5},0)$, $E(\sqrt{5},0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. Μονάδες 10

β) Αν Μ είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $(ME') = 2(ME)$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ΜΕ΄ και ΜΕ. Μονάδες 9

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία Ε΄ΜΕ είναι ορθή. Μονάδες 6

23. ΘΕΜΑ 4

4.22592

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y) για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right) = 0$,όπου $A(-3,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 11

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα x x΄, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και εστίες τα σημεία Α και Β . Μονάδες 10

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 . Μονάδες 4

3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

24. ΘΕΜΑ 2

2.22515

Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ Μονάδες 15

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy. Μονάδες 10

25. ΘΕΜΑ 4

4.22591

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α΄(-2, 0) , Α(2, 0) και διέρχεται από το σημείο $\Gamma\left(2\sqrt{5},2\right)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα Α΄Α. Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$. Μονάδες 10