Μιγαδικοί αριθμοί

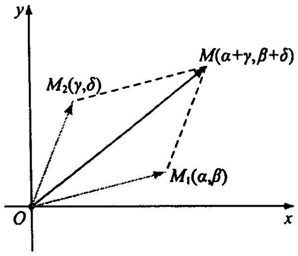
Θεωρία 1

Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των α+βi και γ+δi αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα (α+βi)+(γ+δi)=(α+γ)+(β+δ)i παριστάνεται με το σημείο Μ(α+γ, β+δ).

Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.



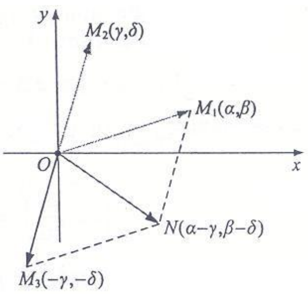
ΘΕΩΡΙΑ 2

Αποδείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των α+βi και γ+δi αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διαφορά (α+βi)-(γ+δi)=(α-γ)+(β-δ)i παριστάνεται με το σημείο Ν(α-γ,β-δ).

Επομένως, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$



ΘΕΩΡΙΑ 3

Πως εκφράζεται το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου γ+δi≠0, στη μορφή μιγαδικού αριθμού;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου γ+δ≠0, στη μορφή κ+λi, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με την συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή, $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$

ΘΕΩΡΙΑ 4
Πως υπολογίζουμε τη δύναμη i^{ν}, με ν φυσικό;
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή ν=4ρ+υ, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^{\nu} = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^{\upsilon} = (i^4)^{\rho} i^{\upsilon} = 1^{\rho} i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad \upsilon = 0 \\ i, & \alpha\nu \quad \upsilon = 1 \\ -1 & \alpha\nu \quad \upsilon = 2 \\ -i & \alpha\nu \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ 5
Αποδείξτε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)} = \overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} = (\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i = (\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i) = \overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 6
Να βρείτε τον τύπο που δίνει τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με α,β,γ πραγματικούς και $\alpha\neq 0$.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο C. Πράγματι, έστω η εξίσωση
$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, μα α,β,γ πραγματικούς και $\alpha\neq 0$.
Τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν Δ>0. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0. Τότε , επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2} = \dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$ η εξίσωση

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow z+\frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

ΘΕΩΡΙΑ 7

Αποδείξτε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

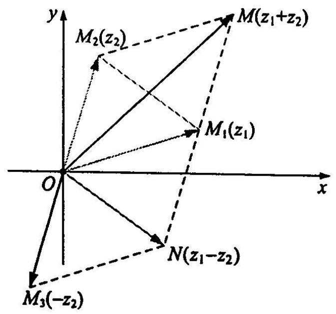
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}$

$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}$ και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

ΘΕΩΡΙΑ 8

Αποδείξτε ότι $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί και ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Από την τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος z_1+z_2 και της διαφοράς z_1-z_2 δύο μιγαδικών σύμφωνα με το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι:

$||OM_1| - |M_1M|| \le |OM| \le |OM_1| + |M_1M|$ δηλαδή

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$ (αφού το ONM_1M_2 είναι παραλληλόγραμμο).

Δηλαδή: $(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$

Όρια - συνέχεια

ΘΕΩΡΙΑ 1

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

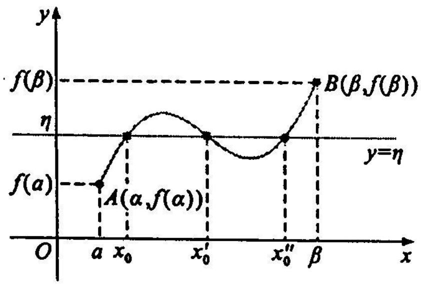
Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Αποδείξτε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι f(α)<f(β). Τότε θα ισχύει f(α)<η<f(β) (βλ. σχήμα).



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g(x)=f(x)-η, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο [α,β] και
- g(α)g(β)<0

Αφού
g(α)=f(α)-η<0 και g(β)=f(β)-η>0.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_o)=f(x_o)-\eta=0$, οπότε $f(x_o)=\eta$.

Διαφορικός λογισμός

ΘΕΩΡΙΑ 1
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τι προκύπτει για την παραγωγισιμότητα της f στο x_0;

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
Για $x \neq x_0$ έχουμε

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΘΕΩΡΙΑ 2
Έστω η σταθερή συνάρτηση f(x)=c, $c \in R$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>
Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,$$

δηλαδή (c)΄=0.

ΘΕΩΡΙΑ 3

Έστω η συνάρτηση f(x)=x. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f΄(x)=1, δηλαδή (x)΄=1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$$

δηλαδή (x)΄=1.

ΘΕΩΡΙΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu}) = \nu x^{\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu+2}x_0+...+x_0^{\nu-1}\,,$$

Οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+...+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}\,,$$

Δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

ΘΕΩΡΙΑ 5

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\,,$$

οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,,$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6

Έστω συνάρτηση f(x)=ημx. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f(x)΄=συνx, δηλαδή (ημx)΄=συνx

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για κάθε $x \in \Re$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$$

Δηλαδή, (ημx)΄ = συνx.

ΘΕΩΡΙΑ 7

Έστω η συνάρτηση f(x)=συνx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f΄(x)=-ημx, δηλαδή (συνx)΄ = - ημx

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για κάθε $x \in \Re$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x.$$

Δηλαδή, (συνx)΄=-ημx.

ΘΕΩΡΙΑ 8

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΘΕΩΡΙΑ 9

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-v}$, $v\in N^*$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})'=-vx^{-v-1}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-v})=\left(\frac{1}{x^v}\right)'=\frac{(1)'x^v-1(x^v)'}{(x^v)^2}=\frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}}==-vx^{-v-1}$$

ΘΕΩΡΙΑ 10

Αποδείξτε ότι, $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$, με $k\in Z$-{0,1} και $x\in R^*$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Από την ερώτηση 4 και 9 προκύπτει ότι, αν $k\in Z-\{0,1\}$, τότε $(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$.

Πράγματι, αν και θετικός ακέραιος ισχύει $(x^v)'=vx^{v-1}$, όπου κ = ν, $v\in N$-{0,1}.

Αν και αρνητικός ακέραιος ισχύει: $(x^{-v})'=-vx^{-v-1}$, όπου κ = -ν, $v\in N$-{0,1}.

ΘΕΩΡΙΑ 11

Έστω η συνάρτηση f(x)=εφx. Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1=R-{x/συνx=0} και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Πράγματι, για κάθε $x\in R_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 12

Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in R$-Z είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Πράγματι, αν $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε u=α lnx, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 13

Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x \ln\alpha$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x\ln x}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως, $y'=(e^u)'=e^u \cdot u'=e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$.

ΘΕΩΡΙΑ 14

Αποδείξτε ότι, η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

Αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, $y=\ln(-x)$ και αν θέσουμε $u= -x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει: $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

ΘΕΩΡΙΑ 15

Διατυπώστε το θεώρημα Rolle και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

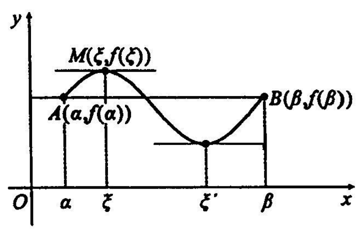
<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

Τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



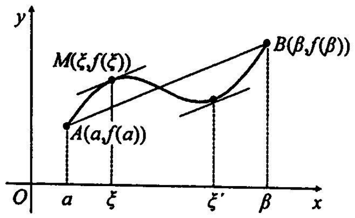
ΘΕΩΡΙΑ 16
Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



ΘΕΩΡΙΑ 17
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.
Πράγματι
Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

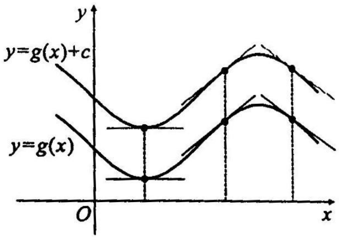
ΘΕΩΡΙΑ 18
Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ.
Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+c$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η συνάρτηση f-g είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει
$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.
Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση f-g είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



ΘΕΩΡΙΑ 19

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
• Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
• Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.
Ισχύει το αντίστροφο; Δώστε ένα παράδειγμα.

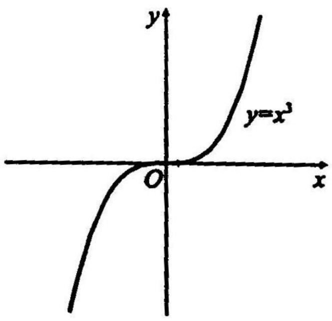
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $f'(x)>0$ και $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως,
υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x \in R$.

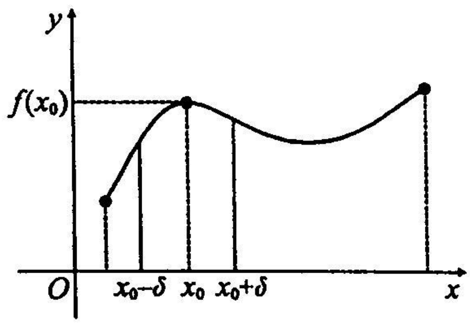


ΘΕΩΡΙΑ 20

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως, αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

Αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει $f'(x_0)=0$.

Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΘΕΩΡΙΑ 1

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:
• όλες οι συναρτήσεις της μορφής
 $G(x)=F(x)+c, c \in R$,
είναι παράγουσες της f στο Δ και
• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
 $G(x)=F(x)+c, c \in R$.

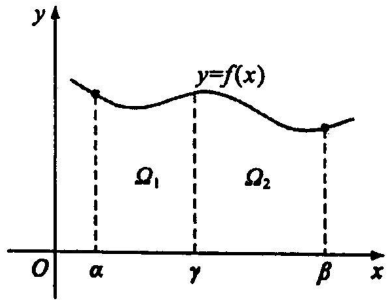
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G'(x)=(F(x)+c)'=F'=(x)=f(x)$, για κάθε $x \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, διότι:
$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

• Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x \in \Delta$.

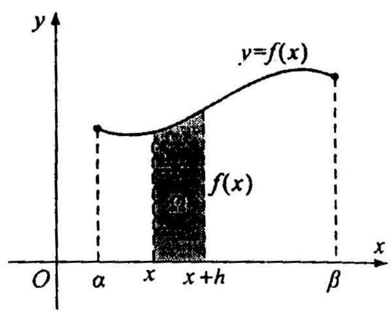
ΘΕΩΡΙΑ 2
Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha<\gamma<\beta$ και η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:
$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$.
Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά η παραπάνω ιδιότητα;
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:
$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$
Αφού
$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$, $\quad E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$
και
$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.



ΘΕΩΡΙΑ 3
Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, x \in \Delta$, είναι μι παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:
$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Δώστε μια εποπτική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (βλ. σχήμα) ως εξής:
$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$
=Εμβαδόν του χωρίου Ω.
$\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h>0$.
Άρα, για μικρά $h>0$ είναι
$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε
$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$



ΘΕΩΡΙΑ 4

Αποδείξτε ότι $\left(\int_{\alpha}^{x(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αν θέσουμε $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ *τό τε* $F'(x) = F(x)$ *και* $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

Δηλαδή: $(F(g(x)))' = \left(\int_{\alpha}^{x(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

ΘΕΩΡΙΑ 5

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει $c \in R$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$G(x) = F(x)+c \qquad (1)$$

Από την (1), για x=α, έχουμε: $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε c = G(α). Επομένως,

$$G(x) = F(x)+G(\alpha) \qquad (2)$$

Από την (2), για x=β, έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

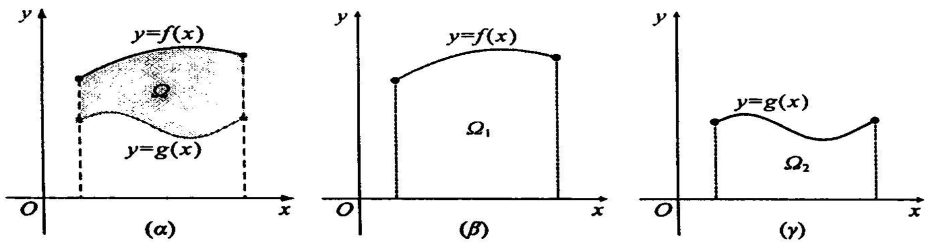
Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΩΡΙΑ 6

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα [α,β] με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α και x=β.

Αποδείξτε ότι $E(\Omega) = \int (f(x) - g(x))dx$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$. Επομένως, $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$.

ΘΕΩΡΙΑ 7

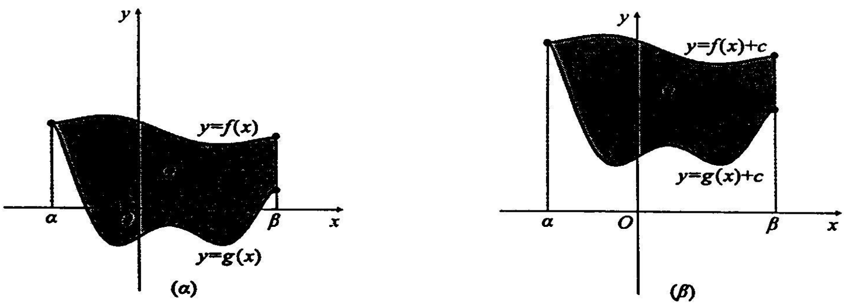
Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα [α,β] με f(x)≥g(x) για κάθε x∈[α,β] και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α και x=β. Αποδείξτε ότι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β], θα υπάρχει αριθμός $c\in R^*$ τέτοιος ώστε:

f(x)+c≥g(x)+c≥0, για κάθε x∈[α,β].

Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (σχήμα α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω΄(σχήμα β).



Επομένως, έχουμε: $E(\Omega)-E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$.

ΘΕΩΡΙΑ 8

Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x΄x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με g(x)≤0 για κάθε x∈[α,β] και τις ευθείες x=α και x=β δίνεται από τον τύπο $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

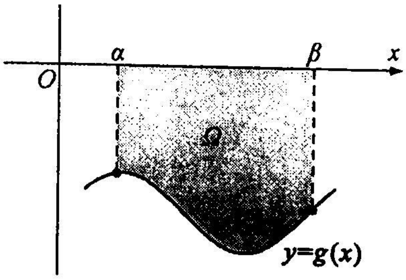
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Επειδή ο άξονας x΄x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=0 έχουμε

$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

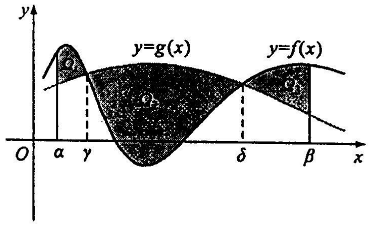
Επομένως, αν για μια συνάρτησης g ισχύει g(x)≤0 για κάθε x∈[α,β], τότε:

$E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$



ΘΕΩΡΙΑ 9

Όταν η διαφορά f(x)-g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], όπως στο επόμενο σχήμα, αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α και x=β είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.



<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$

Είναι

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(f(x)-g(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$.