ΘΕΜΑ Α

Α) Θεωρία

Β) Θεωρία

Γ) Σ – Λ – Λ – Σ – Λ

ΘΕΜΑ Β

$z+\frac{1}{z}=-1 \Rightarrow z^2+z+1=0$ (1)

α) z_1, z_2 ρίζες της (1) οπότε $z_1^2+z_1+1=z_2^2+z_2+1=0$ και $z_1+z_2=-1$, $\boxed{z_1 z_2=1}$

$z_1^2+z_1+1=0 \Rightarrow z_1^2=-z_1-1 \xRightarrow{\cdot z_1} z_1^3=-z_1^2-z_1 \Rightarrow z_1^3=-(-z_1-1)-z_1 \Rightarrow z_1^3=\cancel{z_1}+1-\cancel{z_1} \Rightarrow \boxed{z_1^3=1}$

β) $z_2=\bar{z}_1 \Rightarrow z_2^{2009}=\bar{z}_1^{2009} \Rightarrow z_2^{2009}=\left(\overline{z_1^{2009}}\right)$. Άρα $z_1^{2009}+z_2^{2009}=z_1^{2009}+\left(\overline{z_1^{2009}}\right)=2\,Re\left(z_1^{2009}\right)\in\mathbb{R}$.

γ) $z_1^8=\left(z_1^3\right)^2\cdot z_1^2=1^2\cdot z_1^2=z_1^2$

$z_1 z_2=1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1=1 \Rightarrow \bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$

$z_2^{10}=(\bar{z}_1)^{10}=\left(\overline{z_1^{10}}\right)=\overline{\left(z_1^3\right)^3\cdot z_1}=\bar{z}_1=\frac{1}{z_1} \Rightarrow \frac{1}{z_2^{10}}=z_1$

Άρα $z_1^8+\frac{1}{z_2^{10}}+1=z_1^2+z_1+1=0$.

δ) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1 z_2}=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}=\frac{(-1)^2-2\cdot 1}{1}=-1$. Άρα $f(0)-2=-1 \Rightarrow f(0)=1$

$\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}=\frac{z_2+z_1}{2z_1z_2}=\frac{-1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{2}$. Άρα $f(1)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$

Έστω $g(x)=f(x)-3x+2$

<u>Θ. Bolzano για την g στο $[0,1]$</u>

– g συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $[0,1]$

– $\left.\begin{array}{l} g(0)=f(0)-3\cdot 0+2=1+2=3>0 \\ g(1)=f(1)-3\cdot 1+2=-\cancel{2}-3+\cancel{2}=-3<0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)g(1)<0$

Άρα $\exists x_0\in(0,1): g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=3x_0-2$

ε) $w=2z_1+2z_2 \Rightarrow w=2(z_1+z_2) \Rightarrow w=2\cdot(-1) \Rightarrow w=-2$. Άρα $\Gamma(-2,0)$

$(A\Gamma)=|z_1+2| \Rightarrow (A\Gamma)^2=|z_1+2|^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2=(z_1+2)(\bar{z}_1+2) \Rightarrow (A\Gamma)^2=z_1\bar{z}_1+2z_1+2\bar{z}_1+4=|z_1|^2+4Re(z_1)+4$

$(B\Gamma)=|z_2+2| \Rightarrow (B\Gamma)^2=|z_2+2|^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2=\ldots\ldots\ldots=|z_2|^2+4Re(z_2)+4$

Επειδή z_1, z_2 συζυγείς άρα $|z_1|=|z_2|$ και $Re(z_1)=Re(z_2)$ οπότε $(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2 \Rightarrow (A\Gamma)=(B\Gamma)$.

Άρα το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

<u>Σημείωση:</u> Το Θέμα Β θα μπορούσε να λυθεί και αν βρίσκαμε τις ρίζες $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ από την εξίσωση $z^2+z+1=0$ με αντικατάσταση αυτών σε κάθε ερώτημα.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=x+2+2\ln x \quad , x>0$

α) $f'(x)=1+\frac{2}{x}>0 \quad \forall x>0.$ Άρα $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

$f''(x)=-\frac{2}{x^2}<0 \quad \forall x>0.$ Άρα $f \cap$ στο $(0,+\infty)$.

β) $f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in f((0,+\infty))$ και $f \uparrow$ και συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η f έχει μια ρίζα $x_0\in(0,+\infty)$.

γ) $g(x)=\frac{x\ln x}{x+2} \quad , x>0$

$g'(x)=\frac{x+2+2\ln x}{(x+2)^2}=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$. Είναι $g'(x)=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow f(x)=0 \overset{(β)}{\Longrightarrow} x=x_0$

$\forall \; 0<x<x_0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x)<f(x_0) \Rightarrow f(x)<0$. Άρα $g'(x)<0 \quad \forall x\in(0,x_0)$

$\forall \; x>x_0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x)>f(x_0) \Rightarrow f(x)>0$. Άρα $g'(x)>0 \quad \forall x\in(x_0,+\infty)$.

	0		x_0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Επειδή στο x_0 έχουμε Ο.Ε. το $g(x_0)$ άρα:

$g(x)\geq g(x_0) \quad \forall x>0.$

δ) Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x-2,x+1]$ και $[x+1,x+4]$, $x>2$

- f συνεχής στα $[x-2,x+1]$ και $[x+1,x+4]$
- f παραγ. στα $(x-2,x+1)$ και $(x+1,x+4)$

Άρα $\exists x_1\in(x-2,x+1): f'(x_1)=\frac{f(x+1)-f(x-2)}{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}=\frac{f(x+1)-f(x-2)}{3}$

και $\exists x_2\in(x+1,x+4): f'(x_2)=\frac{f(x+4)-f(x+1)}{\cancel{x}+4-\cancel{x}-1}=\frac{f(x+4)-f(x+1)}{3}$

Επειδή $f\cap$ στο $(0,+\infty)$ άρα $f' \downarrow$ στο $(0,+\infty)$

Άρα $x_1<x_2 \overset{f'\downarrow}{\Longrightarrow} f'(x_1)>f'(x_2) \Rightarrow$

$\frac{f(x+1)-f(x-2)}{\cancel{3}}>\frac{f(x+4)-f(x+1)}{\cancel{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(x+1)-f(x+4)>f(x-2)$

ΘΕΜΑ 4

Α) $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{e^x} \quad , x>0$

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}>0$ για $x>0$ οπότε: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x)=\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)' \Rightarrow f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}+c.$

$f(1)=\frac{1}{e} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{e}}+c=\cancel{\frac{1}{e}} \Rightarrow c=0.$ Άρα $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}} \quad , x>0$

Β) α) $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-\frac{1}{e}=\frac{2}{e}(x-1) \Rightarrow y=\frac{2}{e}x-\frac{1}{e}$.

β) Είναι: $f''(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}>0 \quad \forall x>0$. Άρα $f \cup$ στο $(0,+\infty)$ οπότε:

$f(x)\geq y \Rightarrow f(x)\geq\frac{2}{e}x-\frac{1}{e} \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>\int_1^2\left(\frac{2}{e}x-\frac{1}{e}\right)dx \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>\left[\frac{x^2-x}{e}\right]_1^2 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx>\frac{2}{e}.$

Γ) Επειδή $f(x)>0 \quad \forall x>0$ άρα $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}>0 \quad \forall x>0.$

$E=\int_1^t g(x)\,dx=\int_1^t \frac{f(x)}{x^3}dx=\int_1^t \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=\int_1^t\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'dx=\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_1^t=e^{-\frac{1}{t}}-e^{-1}.$

Δ) $\lim_{t\to+\infty}E(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{t}}-e^{-1}\right)\overset{u=-\frac{1}{t}}{=\!=}\lim_{u\to 0^-}\left(e^{u}-e^{-1}\right)=e^0-e^{-1}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}.$